Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

A. Melin

J. Sjöstrand

Fourier intégraux à phases complexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 13, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A12_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1973-1974

FOURIER INTEGRAUX A PHASES COMPLEXES

A. MELIN et J. SJÖSTRAND

par J. SJÖSTRAND

Exposé N° XIII   23 Janvier 1974

§ 1. INTRODUCTION.

Le but de cet exposé est de donner une extension du calcul des Fourier intégraux au cas où les fonctions de phase prennent des valeurs complexes. Rappelons que, outre la possibilité de transformer une équation (pseudo) différentielle en une équation plus simple, les Fourier intégraux nous donnent aussi la possibilité de construire des solutions globales explicites pour une équation homogène

$$P(X,D)\, u = 0 \tag{1.1}$$

avec une erreur dans C^{∞}. (On peut par exemple traiter (1.1) avec des données de Cauchy pour u). Cela marche très bien quand P est de type principal réel et dans certains autres cas, mais, en général, quand on essaie de résoudre (1.1) explicitement, on obtient, pour la construction locale, des intégrales oscillantes avec des fonctions de phases complexes. (Voir [1,2,4,7]).
Il est donc nécessaire pour la construction globale de disposer d'un calcul pour les Fourier intégraux à phases complexes.

Nous n'avons pas la place de développer ici les applications (en cours de rédaction), nous indiquerons seulement un petit exemple :

Dans [2] on a construit un opérateur $F^{+} : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$ qui est approximativement le projecteur orthogonal sur le noyau de $P : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$, où P est un opérateur pseudo-différentiel tel que le crochet de Poisson $\{p,\overline{p}\} \neq 0$ là où le symbole principal p est $= 0$. Dans la construction microlocale, on a rencontré des phases complexes et il était naturel de conjecturer que F^{+} était un opérateur Fourier intégral à phase complexe. On peut maintenant l'affirmer, en utilisant le résultat que le produit de deux opérateurs Fourier intégraux à phases complexes est aussi en général un opérateur du même type.
F^{+} est en effet par construction une somme de tels produits.

Notons que Maslov dans son exposé au Congrès International de Nice 1970 a annoncé un calcul pour des Fourier intégraux à phases complexes. Je n'ai pas très bien compris son exposé, mais il semble qu'il s'agit plutôt d'une théorie approximative. Notre présentation suit beaucoup celle d'Hörmander [3]. Nous supposerons que l'article [3] est assez bien connu.

§ 2. TERMINOLOGIE PRESQUE ANALYTIQUE.

Les fonctions "presque analytiques" ont été introduites par Nirenberg [6] et Hörmander [5,3 p. 93-94]. Nous aurons aussi besoin d'autres objets "presque analytiques".

Soit $\tilde{W} \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et posons $W = \tilde{W} \cap \mathbb{R}^n$.
Soit $\Lambda \subset \tilde{W}$ une sous-variété fermée, C^∞. Si $f,g \in C(\Lambda)$, nous écrirons $f \sim g$ si $|f(z) - g(z)| \leq C_{K,N} |\mathrm{Im}\, z|^N$, $N \geq 0$, $z \in K \cap \Lambda$, pour tout $K \subset\subset \tilde{W}$.

Nous dirons que deux sous-variétés fermées $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \tilde{W}$ sont équivalentes si la distance $d(z,\Lambda_2)$ de z à Λ_2 est ~ 0 sur Λ_1 et, de même, pour $d(z,\Lambda_1)$, $z \in \Lambda_2$. En particulier, les intersections $\Lambda_{j\,\mathbb{R}} = \Lambda_j \cap \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$, coïncident. Nous écrirons alors $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$.

Nous dirons que $f \in C^\infty(\tilde{W})$ est presque analytique si $\bar{\partial} f \sim 0$ et nous dirons qu'une sous-variété fermée $\Lambda \subset \tilde{W}$ est presque analytique si Λ est localement équivalente à une variété donnée par des équations presque analytiques: $f_{n-k+1}(z) = \ldots = f_n(z) = 0$ où $\partial f_{n-k+1}, \ldots, \partial f_n$ sont linéairement indépendantes.
Si $f \in C^\infty(W)$, il existe une extension presque analytique $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{W})$ qui est unique modulo la relation d'équivalence définie ci-dessus.
En effet, on pose :

$$\tilde{f}(x+iy) = \Sigma\, \chi_\alpha(x+iy)\, \partial^\alpha f(x)/\partial x^\alpha\, (iy)^\alpha/\alpha!$$

où les $\chi_\alpha \in C^\infty(\tilde{W})$ sont $= 1$ près de W et à support suffisamment près de W.

Si $\Lambda \subset \tilde{W}$ est presque analytique, nous définirons les fonctions presque analytiques sur Λ comme les fonctions C^∞ qui sont équivalentes aux restrictions à Λ des fonctions presque analytiques dans $\tilde{W}$.

Finalement, si M est une variété C^∞ paracompacte, une variété presque analytique Λ associée à M , "$\Lambda \subset \tilde{M}$", <u>est par définition</u> la donnée pour toute carte locale $\mathcal{H}$ d'une variété presque analytique $\Lambda_{\mathcal{H}} \subset \tilde{W}_{\mathcal{H}} \subset \mathbb{C}^n$:

$$M \supset \Omega_{\mathcal{H}} \xrightarrow[\mathcal{H}]{\approx} W_{\mathcal{H}} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ici $\tilde{W}_{\mathcal{H}}$ est un voisinage complexe de $W_{\mathcal{H}}$ et les $\Lambda_{\mathcal{H}}$ doivent satisfaire les conditions de compatibilité suivantes: pour tout $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$:

$$\Lambda_{\mathcal{H}'} \sim \widetilde{\mathcal{H}' \circ \mathcal{H}^{-1}}(\Lambda_{\mathcal{H}})$$

dans un petit voisinage complexe de $\mathcal{H}'(\Omega_{\mathcal{H}} \cap \Omega_{\mathcal{H}'})$.

Ici $\widetilde{\mathcal{H}' \circ \mathcal{H}^{-1}}$ est une extension presque analytique de $\mathcal{H}' \circ \mathcal{H}^{-1}$.

Les $\Lambda_{\mathcal{H}}$ seront appelés représentants locaux de la variété Λ. Il est clair qu'on peut aussi étendre la notion d'équivalence.
Dans la suite, nous ne ferons pas toujours la distinction entre les variétés et leurs classes d'équivalence.

§ 3. <u>LA METHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE</u>.

Nous présenterons ici une extension de la méthode de la phase stationnaire. Soit $a(x,w)$ une fonction C^∞ définie au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, tel que $\operatorname{Im} a(x,w) \geq 0$, $\operatorname{Im} a(0,0) = 0$, $d_x a(0,0) = 0$, $\det\, (d_x^2 a(0,0)) \neq 0$.
Soit $b(x,t) \in S^m_{1-\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, $\delta < \frac{1}{2}$ un symbole dont le support, par rapport à x est contenu dans un petit voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Nous allons étudier le comportement asymptotique de

$$I(a,b,t) = \int e^{i\,t\,a(x,w)}\, b(x,t)\, dx \quad , \quad t \to +\infty.$$

Lemme 3.1 : Soit $a(z,w)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{R}^k$ une extension C^∞, presque analytique en z. Alors pour $w \in \mathbb{R}^k$ petit, l'équation $\partial_z a(z,w) = 0$ possède une solution unique $z = Z(w)$ qui est une fonction C^∞ de w. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\operatorname{Im} a(Z(w),w) \geq C.\, |\operatorname{Im} Z(w)|^2.$$

Démonstration : La première partie est une conséquence facile du théorème des fonctions implicites. Pour la deuxième partie, nous nous contenterons de traiter le cas $n = 1$, ce qui suffit pour donner l'idée essentielle. La formule de Taylor et la presque analyticité donnent :

$$a(z,w) = a(Z(w),w) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}(Z(w),w)(z - Z(w))^2 \tag{3.1}$$

$$+ O\left(|z - Z(w)|^3 + |\operatorname{Im} Z(w)|^3\right).$$

Considérant la variation d'argument, nous voyons que

$$\inf_{\substack{|x-\operatorname{Re}Z(w)| \leq 3|\operatorname{Im}Z(w)| \\ x \in \mathbb{R}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} . (x - Z(w))^2 \right) \leq -C\, |\operatorname{Im} Z(w)|^2$$

où $C > 0$. Comme $\operatorname{Im} a(x,w) \geq 0$ pour x réel, on obtient l'inégalité dans le lemme avec une autre constante C.

Théorème 3.2 : Soient $a(x,w)$ et $b(x,t)$ définis comme précédemment. Alors, il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}^k$ de 0 et des opérateurs différentiels $C_{\nu,w}(D_z)$ d'ordre $\leq 2\nu$, $\nu = 0,1,2,\ldots$, dont les coefficients sont des fonctions C^∞ en $w \in V$, tels que l'on ait le développement asymptotique suivant dans $S^{m-n/2}_{0,1}(V \times \mathbb{R}_+)$:

$$\int e^{it\, a(x,w)}\, b(x,t)\, dx \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{-\nu-n/2} e^{it\, a(Z(w),w)} (C_{\nu,w}(D)\, b(z,t)\, (Z(w)) \tag{3.2}$$

ici $b(z,t) \in S^m_{1-\delta}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_+)$ désigne aussi une extension presque analytique en z. La fonction $(2\pi)^{-n/2}\ c_{0,w}$ est la branche de $(\det\ (i^{-1}a''_{zz}(Z(w),w)))^{-1/2}$ qui est homotope à 1 par l'homotopie

$$[0,1] \ni s \ \rightarrow\ i^{-1}(1-s)\ a''_{zz} + s\ I \in Gl\ (n,\mathbb{C}),$$

$$a''_{zz} = \partial^2 a/\partial z^2.$$

<u>Esquisse de la démonstration</u> : Copiant la démonstration du lemme de Morse, on peut trouver des coordonnées locales $\tilde{z}$ dans $\mathbb{C}^n$ (dépendant de w) telles que

$$a(z,w) \ =\ a(Z(w),w) + i < \tilde{z},\tilde{z} > + \rho(z,w)$$

où ρ est un terme suffisamment petit pour être négligeable dans la suite. Utilisant le fait que Im a ≥ 0 sur $\mathbb{R}^n$, on voit que $\mathbb{R}^n$ est donné par une équation C^∞ : $\tilde{y} = g(\tilde{x},w)$ dans les nouvelles coordonnées $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$. on déforme $\mathbb{R}^n$ continûment le long des surfaces $\Gamma_{s,w}$: $\tilde{y} = s\,g\,(\tilde{x},w)$ $(0 \leq s \leq 1)$ jusqu'à la variété $\tilde{y} = 0$. Il n'est pas trop difficile de voir que Im $a(z,w) \geq 0$ sur $\Gamma_{s,w}$, et que, grâce à la presque analyticité, nous pouvons remplacer l'intégrale le long de $\mathbb{R}^n$, par l'intégrale de $e^{i\,t\,a(z,w)}\ b(z,t)$ le long de $\Gamma_{0,w}$, sans changer le comportement asymptotique. Cela nous donne une intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(a(Z(w),w)+i|\tilde{x}|^2)t}\ \tilde{b}(\tilde{x},t)\ d\tilde{x}$$

avec un nouveau symbole $\tilde{b}$ calculable en fonction de b et de a, et cette intégrale peut se développer en somme asymptotique par des méthodes standards.

§ 4. <u>VARIETES LAGRANGIENNES POSITIVES ET FONCTIONS DE PHASE</u> .

Soit M une variété C^∞, para compacte, symplectique. (M possède une 2-forme distinguée : σ, qui est fermée et non dégénérée. Les coordonnées locales $(x,\xi) = (x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ sont dites <u>symplectiques</u> si σ prend la forme

$$\sigma = \Sigma\ d\xi_i \wedge d\xi_j\ .$$

L'exemple habituel d'une variété symplectique est $M = T^*(X)$ où X est une variété.)

<u>Définition 4.1</u> : La variété presque analytique $\Lambda \subset \widetilde{M}$ est appelée une variété Lagrangienne positive, si, au voisinage de chaque point réel ρ_o de Λ, on peut trouver des coordonnées symplectiques réelles : (x,ξ), telles que Λ possède un représentant local

$$(4.1) \qquad \xi = \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad , \ x \in \mathbb{C}^n \ , \ \xi \in \mathbb{C}^n$$

où g est presque analytique, $\operatorname{Im} g(x_o) = 0$, $\operatorname{Im} g(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.
Ici $\rho_o = (x_o, \xi_o)$.

En utilisant le lemme 3.1, on peut montrer qu'une variété Lagrangienne positive possède un représentant local de la forme (4.1), avec un g du type précédent, pour <u>tout</u> choix de coordonnées réelles symplectiques telles que la projection

$$\Lambda' \ni (x,\xi) \ \rightarrow \ x \in \mathbb{C}^n$$

soit régulière. Ici Λ' désigne un représentant local dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

<u>Définition 4.2</u> : Soit $V \subset \mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^n$ un ouvert conique. On dit que $\varphi(x,\theta) \in C^\infty(V)$ est une <u>fonction de phase positive non dégénérée</u> si

1) φ n'a pas de points critiques et $\operatorname{Im} \varphi \geq 0$.
2) $\varphi(x,\theta)$ est positivement homogène de degré 1 en θ.
3) $d(\partial\varphi/\partial\theta_1), \ldots, d(\partial\varphi/\partial\theta_N)$ sont linéairement indépendants comme vecteurs complexes sur l'ensemble

$$C_{\varphi\,\mathbb{R}} = \{(x,\theta) \in V \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(x,\theta) = 0\}.$$

Soit $\widetilde{V} \subset \mathbb{C}^n \times \dot{\mathbb{C}}^N$ un ouvert conique tel que $\widetilde{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^N) = V$ et soit $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\widetilde{V})$ une extension presque analytique. Alors

$$C_{\widetilde{\varphi}} = \{(x,\theta) \in \widetilde{V} \ ; \ \partial_\theta \widetilde{\varphi} = 0\}$$

est une variété presque analytique (suffisamment près de V) dont la dimension complexe est n. Il est facile de démontrer, en utilisant le 3^o, que l'image $\Lambda_{\tilde{\varphi}}$ de l'application :

$$(4.2) \qquad C_{\tilde{\varphi}} \ni (x,\theta) \quad \to \quad (x, \partial_x \tilde{\varphi}(x,\theta)) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$$

est localement une variété de la même dimension que $C_{\tilde{\varphi}}$. Utilisant le lemme 3.1, on peut en effet démontrer la

Proposition 4.3 : L'image de (4.2) est localement une variété Lagrangienne positive $\Lambda_{\tilde{\varphi}} \subset \widetilde{T^*(\mathbb{R}^n)}\backslash 0$, bien définie, dont la classe d'équivalence ne dépend pas du choix de l'extension presque analytique $\tilde{\varphi}$.

§ 5. EQUIVALENCE DES FONCTIONS DE PHASES ET DEFINITION GLOBALE DES FOURIER INTEGRAUX.

Soit $\varphi \in C^\infty(V)$ une fonction de phase positive, non dégénérée, $V \subset \mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^N$. Comme dans le cas des fonctions de phase réelles, on peut définir une distribution $I(a,\varphi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, par l'intégrale oscillante

$$< I(a,\varphi), u > \;=\; \iint e^{i\,\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)\, u(x)\, dx\, d\theta \;,\; u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ici, on suppose que $a \in S^m_{1-\delta}(V)$, $\delta < 1/2$, et que supp a est contenu dans un cône fermé dans $\mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^N$ qui est contenu dans V. Il est assez facile de montrer que $WF(I(a,\varphi)) \subset \Lambda_{\tilde{\varphi}\,\mathbb{R}}$; la partie réelle de $\Lambda_{\tilde{\varphi}}$. Supposons maintenant que $\psi \in C^\infty(W)$, $W \subset \mathbb{R}^n \times \dot{\mathbb{R}}^M$ est une autre fonction de phase et que $\Lambda_{\tilde{\varphi}} \sim \Lambda_{\tilde{\psi}}$ au voisinage de $\rho_o = (x_o, \xi_o) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$. Les points correspondants de $C_{\tilde{\varphi}}$, $C_{\tilde{\psi}}$ sont notés (x_o, θ_o), (x_o, w_o).

Théorème 5.1 : Pour tout $a(x,\theta) \in S^{m+(n-2N)/4}_{1-\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N)$ à support dans un voisinage conique de (x_o, θ_o) suffis^{nt} petit, il existe $b(x,w) \in S^{m+(n-2M)/4}_{1-\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^M)$ à support dans un petit voisinage conique de (x_o, w_o) tel que

$$I(a,\varphi) - I(b,\psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ce théorème nous permet (comme dans [3]) de définir un espace de densités distributions d'ordre 1/2 : $I^m_{1-\delta}(X,\Lambda)$ sur une variété paracompacte X, si $\Lambda \subset T^*(X)\backslash 0$ est une variété Lagrangienne positive, conique.
En effet, $I^m_{1-\delta}(X,\Lambda)$ est défini comme l'ensemble des densités distributions qui ont microlocalement la forme $I(a,\varphi)$ comme dans le théorème, où φ est une fonction de phase qui définit Λ localement.
Nous notons aussi que ce théorème nous permet (comme dans [3]) de développer tout un calcul pour des opérateurs Fourier intégraux, en particulier on obtient les résultats qu'on espère sur la composition de tels opérateurs.

Nous remarquons aussi que la réciproque du théorème 5.1 est aussi vraie, si on se restreint à considérer seulement des symboles classiques, mais pas en général. Dans ce cas, on peut aussi définir la notion de symbole principal.

Esquisse de la démonstration du théorème : D'abord, on peut montrer comme dans [3,p. 136], qu'après un changement de coordonnées locales (réelles) dans $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que $\Lambda_{\tilde{\varphi}}$ a le représentant local

$$x = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi} \quad , \quad \xi \in \mathbb{C}^n , \tag{5.1}$$

où $H(\xi)$ est presque analytique, positivement homogène de degré 1 pour ξ réel et de plus :

$$\operatorname{Im} H(\xi) \leq 0 \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Notons que $H(\xi) = \langle \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi}, \xi \rangle$ grâce à l'homogénéité.

Le fait que $\Lambda_{\tilde{\varphi}}$ prend localement la forme (5.1) implique que

$$\det (\operatorname{Hess} \varphi) \neq 0 \ \text{ en } (x_o, \theta_o).$$

Si $(x(\xi),\xi) \in \Lambda_{\tilde{\varphi}}$ et si $(x(\xi),\theta(\xi)) \in C_{\tilde{\varphi}}$ est le point correspondant, alors $(x(\xi),\theta(\xi))$ est le point critique, au sens du théorème 3.2, de la fonction

$$(x,\theta) \to \tilde{\varphi}(x,\theta) - \langle x,\xi \rangle \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n .$$

La valeur critique correspondante est

$$\tilde{\varphi}(x(\xi),\theta(\xi)) - < x(\xi),\xi > = \tilde{\varphi}(x(\xi),\theta(\xi)) - H(\xi).$$

Utilisant l'homogénéité et le fait que $(\partial_\theta \tilde{\varphi})(x(\xi),\theta(\xi)) = 0$, on voit que $\tilde{\varphi}(x(\xi),\theta(\xi)) = 0\,(|\mathrm{Im}\,(x(\xi),\theta(\xi))|^{\tilde{N}})$ pour tout $\tilde{N} > 0$.
Cela signifie que $\tilde{\varphi}(x(\xi),\theta(\xi))$ est négligeable (même si on ne le montre pas en détail ici) et en utilisant le théorème 3.2, on obtient le développement asymptotique pour la transformée de Fourier de $I(a,\varphi)$, quand $\xi \to \infty$:

$$\widehat{I(a,\varphi)}(\xi) = \iint e^{i(\varphi(x,\theta) - < x,\xi >)}\, a(x,\theta)\, dx\, d\theta$$

$$\sim \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-i\,H(\xi)}\, |\xi|^{(N-n)/2-\nu} (C_{\nu,\xi/|\xi|}(D_x, |\xi|\, D_\theta)\tilde{a})(x(\xi),\theta(\xi)).$$

Ici $C_{\nu,\xi/|\xi|}$ est comme dans le théorème 3.2, en particulier $C_{0,\xi/|\xi|} \not\equiv 0$. $\tilde{a}$ est une extension presque analytique de a dans $S^{m+(n-2N)/4}_{1-\delta}(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N)$.
Comme $\Lambda_\psi \sim \Lambda_\varphi$ près de ρ_o, on a le même type de développement asymptotique pour $\widehat{I(b,\psi)}(\xi)$ avec le même facteur oscillant : $e^{-i\,H(\xi)}$. Par des approximations successives, on peut construire b comme une somme asymptotique telle que

$$\widehat{I(a,\varphi)}(\xi) \sim \widehat{I(b,\psi)}(\xi) .$$

Cela signifie que $I(a,\varphi) - I(b,\psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et notre esquisse de démonstration est terminée ainsi que notre exposé.

****

REFERENCES

[1] DUISTERMAAT J.J. et HÖRMANDER L. : Fourier integral operators II, Acta Math. 128 (1972), 183-269.

[2] DUISTERMAAT J.J. et SJÖSTRAND J. : A global construction for pseudo-differential operators with non-involutive characteristics. Inventiones Math. 20, 209-225 (1973).

Voir aussi Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-1973, exposé n°VII.

[3] HÖRMANDER L. : Fourier integral operators I, Acta Math. 127, 79-183 (1971).

[4] HÖRMANDER L. : On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential operators. L'Ens. Math. 17, 99-163 (1971).

[5] HÖRMANDER L. : Cours polycopié de l'Ecole d'été nordique de Mathématiques (1969).

[6] NIRENBERG L. : A proof of the Malgrange preparation theorem . Proc. Liverpool Singularities. Sympos. I, Dept. pure Math. Univ. Liverpool 1969-1970, 97-105 (1971).

[7] TREVES F. : Hypoelliptic partial differential equations of principal type. Sufficient conditions and necessary conditions. Comm. Pure and Applied Math. 24, 631-670 (1971).

****