Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. J. Duistermaat

J. Sjostrand

Sur une classe d'opérateurs de type sous-elliptique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 7, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1972-1973

SUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DE TYPE SOUS-ELLIPTIQUE

par J. J. DUISTERMAAT et J. SJOSTRAND

exposé par J. SJOSTRAND

Exposé N° VII

15 Novembre 1972

§ 1. INTRODUCTION

Soit X une variété C^∞, para-compacte de dimension n et soit $P \in L^m(X)$ un opérateur pseudodifférentiel, proprement supporté, de type 1, 0 et de symbole principal $p \in C^\infty(T^*(X)\backslash 0)$ positivement homogène de degré m. Nous posons

$$(1.1) \qquad \Sigma = \{(x,\xi) \in T^*(X)\backslash 0 \ ; \ p(x,\xi) = 0\}.$$

Soit

$$(1.2) \qquad \{p,\bar{p}\} = 2i \ \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}$$

le crochet de Poisson de p et $\bar{p}$.

Hörmander [4] a démontré que si $\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\} > 0$ sur Σ on a l'estimation a priori :

$$(1.3) \qquad \|u\|_s \leq C_{K,s}(\|P^*u\|_{s-m+\frac{1}{2}} + \|u\|_{s-1}),$$

$$u \in H^{loc}_{s+\frac{1}{2}}(X) \cap \mathcal{E}'(K), \quad K \subset\subset X, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ici P^* est l'adjoint de P par rapport au produit sesquilinéaire :

$$(1.4) \qquad \int u\,\bar{v}\,d\mu \ , \ u,v \in C_0^\infty(X)$$

où $d\mu$ est une densité C^∞, strictement positive que nous prenons fixe. (1.3) implique que P^* est hypoelliptique et qu'on a resolubilité locale pour P. Hörmander [4] a aussi montré que si $\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\} > 0$ en un point de Σ, alors P n'est pas hypoelliptique. (Voir [6] pour des résultats plus généraux et plus précis.)

Dans cet exposé nous allons esquisser la construction des projections naturelles ("orthogonales") sur le noyau et le conoyau de P considéré comme opérateur : $\mathcal{D}'(X)/C^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)/C^\infty(X)$ sous la condition que $\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\} \neq 0$ sur Σ. Dans le cas où $\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\}$ est toujours négatif ou toujours positif sur Σ et X est compacte nous pouvons choisir des projections qui donnent une description exacte du noyau et du conoyau de P considéré comme opérateur de $\mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$.

Nous considérons donc la sous-classe la plus simple des opérateurs de type sous-elliptique considérée par Egorov [2]. Notons aussi que Kawai [7] dans le cas analytique a construit une suite exacte, microlocale qui décrit le noyau et le conoyau de P considéré comme opérateur sur le faisceau $\mathcal{C}$ de Sato.

Notons finalement que dans [10] il y a un résultat quand la projection $\Sigma \to X$ est de rang n - 1 et aussi un résultat microlocale dans le cas général.

<u>Notations</u> : Si $A : C_0^\infty(X) \to \mathcal{D}'(X)$ est continu, linéaire, nous écrivons A^* pour l'adjoint par rapport au produit (1.4). Pour les opérateurs A, B nous écrivons $A \equiv B$ si A-B est un opérateur intégral de noyau C^∞. Nous désignons par I l'opérateur d'identité et par WF (ou par WF') le "wavefrontset" introduit par Hörmander [5]. (Pour des opérateurs, "WF'" est souvent la notion la plus convenable.) Pour chaque ensemble V, nous posons $\operatorname{diag}(V) = \{(\rho,\rho);\ \rho \in V\}$.

<u>Théorème 1.1</u> : Soit $P \in L^m(X)$, proprement supporté, de symbole principal $p \in C^\infty(T^*(X)\backslash 0)$ positivement homogène de degré m. Supposons que

$$(1.5) \qquad \frac{1}{i}\{p,\bar{p}\} \neq 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et écrivons $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ où

$$\Sigma^{\pm} = \{(x,\xi) \in \Sigma\ ;\ \frac{1}{i}\{p,\bar{p}\} \gtrless 0\ \}.$$

Alors il existe des opérateurs linéaires et proprement supportés $F, F^+, F^- : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$ tels que F est continu : $H_s^{loc}(X) \to H_{s+m-1/2}^{loc}(X)$ et $F^{\pm}$ sont continus : $H_s^{loc}(X) \to H_s^{loc}(X)$ pour tout s. En plus :

$$(1.6) \qquad F^+ + FP \equiv I$$

$$(1.7) \qquad F^- + PF \equiv I$$

$$(1.8) \qquad (F^+)^* \equiv F^+,\ (F^-)^* \equiv F^-$$

$$(1.9) \qquad WF'(F) = \operatorname{diag}\,(T^*(X)\backslash 0)$$

$$(1.10) \qquad WF'(F^{\pm}) = \operatorname{diag}\,(\Sigma^{\pm})$$

Si $\tilde{F}$, $\tilde{F}^+$, $\tilde{F}^-$ sont des opérateurs linéaires, continus de $\mathcal{D}'(X)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ et aussi de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(X)$, satisfaisant (1.6) - (1.8) et si $WF'(\tilde{F}^+) \cap WF'(\tilde{F}^-) = \emptyset$, $WF'(\tilde{F}) \cap (\Sigma^+ \times \Sigma^-) = \emptyset$, alors $\tilde{F} \equiv F$, $\tilde{F}^{\pm} \equiv F^{\pm}$.

<u>Remarque</u> : Si on multiplie (1.6) à gauche et (1.7) à droite par P et si on prend la différence et utilise (1.10), on obtient

(1.11) $$PF^+ \equiv F^-P \equiv 0.$$

Multipliant (1.6) à droite par F^+ et (1.7) à gauche par F^- on obtient de (1.11) que

(1.12) $$(F^+)^2 \equiv F^+ \quad , \quad (F^-)^2 \equiv F^-.$$

Donc dans un sens approximatif les opérateurs F^+ et F^- sont les projections orthogonales sur le noyau de P et le conoyau de P respectivement .

Multipliant (1.6) à droite et (1.7) à gauche par F et prenant la différence, on obtient de (1.9) et (1.10) que

(1.13) $$F^+F \equiv FF^- \equiv 0.$$

Si X est compact et Σ^+ ou Σ^- est vide le théorème 1.1 est valable dans un sens exact et pas seulement modulo des opérateurs à noyau C^∞. Par exemple si $\Sigma^+ = \emptyset$ on a

<u>Théorème 1.2</u> : Si X est compact et si $\frac{1}{i}\{p,\bar{p}\} < 0$ sur Σ, alors, il existe des opérateurs E, E^+, E^- : $\mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$ tels que

(1.14) $E^+ + EP = I \quad , \quad E^- + PE = I \quad , \quad E^-P = PE^+ = 0$,

(1.15) $(E^+)^* = E^+$, $(E^-)^* = E^-$.

(1.16) Le rang de E^+ est fini et son noyau distribution est C^∞.

(1.17) E est continu : $H_s(X) \to H_{s+m-\frac{1}{2}}(X)$ et E^- est continu : $H_s(X) \to H_s(X)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(1.18) $WF'(E) = \mathrm{diag}\,(T^*(X)\backslash 0)$

(1.19) $WF'(E^-) = \mathrm{diag}\,(\Sigma)$.

Notons qu'un opérateur différentiel, non elliptique ne peut pas satisfaire les conditions du théorème 1.1. Nous donnons maintenant un exemple avec $\Sigma^{\pm} \neq \emptyset$ montrant que en général on ne peut pas avoir le théorème 1.1 avec égalité au lieu de congruence dans (1.6)-(1.8). Soit $X = \mathbb{R}^2 / 2\pi\, \mathbb{Z}^2$ le tore de dimension 2 et soit

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\Phi(x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

où $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z})$ a des valeurs réelles et un nombre fini de zéros qui sont tous simples. Alors P satisfait les conditions du théorème 1.1 et $\Sigma^{\pm} \neq \emptyset$. Si $\int_0^{2\pi}\Phi(x_1)dx_1 \neq 0$ on voit, en prenant la transformée de Fourier par rapport à x_1, que $u \in \mathcal{D}'(X)$, $Pu = 0 \Rightarrow u =$ constante. D'autre part, si le théorème 1.1 était valable dans le sens exact, le noyau de P aurait une dimension infinie.

Nirenberg [8] a donné un exemple d'un opérateur vérifiant les conditions du théorème 1.1, tel que toute solution locale de classe C^1 de l'équation $Pu = 0$ est constante.

Dans les paragraphes 2 et 3, nous allons esquisser la démonstration du théorème 1.1 et dans le paragraphe 4 nous démontrerons le théorème 1.2.

§ 2. L'UNICITE ET REDUCTION A UNE CONSTRUCTION MICROLOCALE.

Soient X, P, F, $F^{\pm}$, $\tilde{F}$, $\tilde{F}^{\pm}$ comme dans le théorème 1.1. L'argument donnant (1.11) donne aussi que $P\tilde{F}^{+} \equiv \tilde{F}^{-}P \equiv 0$. Multiplication de (1.6) à droite par $\tilde{F}^{+}$ donne $F^{+}\tilde{F}^{+} \equiv \tilde{F}^{+}$ et par symmetrie, on a aussi $\tilde{F}^{+}F^{+} \equiv F^{+}$. Comme F^{+}, $\tilde{F}^{+}$ sont approximativement autoadjoints on a donc

$$F^{+} \equiv (F^{+})^{*} \equiv (F^{+})^{*}(\tilde{F}^{+})^{*} \equiv F^{+}\tilde{F}^{+} \equiv \tilde{F}^{+}.$$

Similairement on a $F^{-} \equiv \tilde{F}^{-}$. Comme $F^{+} + FP \equiv \tilde{F}^{+} + \tilde{F}P$ ($\equiv I$) on a $FP \equiv \tilde{F}P$. Multiplication à droite par F donne

$$F(I - F^{-}) \equiv \tilde{F}(I - \tilde{F}^{-}). \tag{2.1}$$

L'argument donnant (1.13) donne maintenant que $\tilde{F}^{+}\tilde{F} \equiv \tilde{F}\tilde{F}^{-} \equiv 0$. Donc (2.1), (1.13) impliquent que $F \equiv \tilde{F}$ et nous avons démontré l'unicité dans le théorème 1.1.

<u>Notation</u> : Si A_j , $j = 1,2$ sont des opérateurs tels que $WF'(A_j) \subset \operatorname{diag}(T^*(X)\backslash 0)$ et si $V \subset T^*(X)\backslash 0$ est ouvert et conique, nous écrivons : "$A_1 \equiv A_2$ dans V" si $WF'(A_1 - A_2) \cap \operatorname{diag}(V) = \emptyset$.

Supposons maintenant que pour chaque $\rho \in T^*(X)\backslash 0$ il y a un voisinage ouvert conique $V_\rho \ni \rho$ et des opérateurs $F_\rho, F_\rho^{\pm} : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$ tels que

(2.2) F_ρ est continu $H_s^{loc}(X) \to H_{s+m-1/2}^{loc}(X)$, $F_\rho^{\pm}$ est continu $H_s^{loc}(X) \to H_s^{loc}(X)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(2.3) $WF'(F_\rho) \subset \operatorname{diag}(T^*(X)\backslash 0)$,
$WF'(F_\rho^{\pm}) \subset \operatorname{diag}(\Sigma^{\pm})$

(2.4) (1.6) - (1.8) sont satisfaits dans V_ρ avec F, $F^{\pm}$ remplacés par F_ρ, $F_\rho^{\pm}$.

Soit $\chi_j \in L^0(X)$, $j \in J$ une famille localement finie d'opérateurs proprement supportés, tels que, pour des ρ_j correspondants, on ait

(2.5) $$WF(\chi_j) \subset V_{\rho_j} \quad , \quad \sum_j \chi_j \equiv I.$$

Posons

(2.6) $$F = \sum_j \chi_j F_{\rho_j} \quad , \quad F^{\pm} = \sum_j \chi_j F^{\pm}_{\rho_j}.$$

Alors

(2.7) $$WF'(F) \subset \operatorname{diag}(T^*(X)\backslash 0),\ WF'(F^{\pm}) \subset \operatorname{diag}(\Sigma^{\pm})$$

et après avoir additionné des opérateurs à noyau C^∞, on peut supposer que F, $F^{\pm}$ sont proprement supporté avec la même continuité dans H_s^{loc} que dans le théorème 1.1.

La démonstration de l'unicité ci-dessus montre aussi que $F_\rho \equiv F_{\rho'}$, $F^\pm_\rho \equiv F^\pm_{\rho'}$, dans $V_\rho \cap V_{\rho'}$, pour tout ρ, ρ'. Donc (2.5), (2.6) impliquent que $F \equiv F_\rho$, $F^\pm \equiv F^\pm_\rho$ dans V_ρ pour tout ρ, et comme les V_ρ recouvrent $T^*(X)\backslash 0$ on voit que (1.6), (1.8) sont satisfaites globalement.

Hörmander [6] a montré (pour des opérateurs plus généraux) que, pour chaque $\Gamma \subset \Sigma^+$, fermé, conique, il existe $u \in \mathcal{D}'(X)$ telle que $Pu \in C^\infty(X)$, $WF(u) = \Gamma$. Comme $u \equiv F^+u \bmod C^\infty(X)$, (2.7) montre que $WF'(F^+) = \operatorname{diag} \Sigma^+$ (et similairement pour F^-). Utilisant (2.7) il est facile de montrer (1.9) et on a donc démontré le théorème 1.1 en supposant l'existence des F_ρ, $F^\pm_\rho$.

§ 3. CONSTRUCTION DES F_ρ, $F_\rho^{\pm}$

Si $\rho \notin \Sigma$ on peut prendre $F_\rho \in L^{-m}(X)$, $F_\rho^{\pm} = 0$. On peut donc supposer que $\rho \in \Sigma$ et par dualité même que $\rho \in \Sigma^+$. Pour $\rho \in \Sigma^+$ nous allons esquisser la construction des F_ρ, F_ρ^+ satisfaisant (2.2) - (2.4) avec $F_\rho^- = 0$.

Sato-Kawai-Kashiwara [9] ont annoncé dans le cas analytique que si P satisfait les conditions du théorème 1.1 alors P est micro-localement équivalent à l'opérateur $D_n + i\, x_n\, D_{n-1}$ dans un certain sens. Dans le cas non-analytique on a le même résultat et notre démonstration est probablement celle de Sato-Kawai-Kashiwara à quelques modifications près.

Proposition 3.1 : Soient P et $\rho \in \Sigma^+$ comme ci-dessus. Alors il existe une transformation canonique, homogène $\mathcal{H}$ d'un voisinage V_ρ de ρ dans $T^*(\mathbf{R}^n)\backslash 0$ et des opérateurs intégraux Fourier de type 1 :

$$B = I^{1-m}(\mathbf{R}^n \times X, \Gamma'), \qquad C \in I^{0}(\mathbf{R}^n \times X, \Gamma')$$

tels que

(3.1) Γ est un sous-ensemble fermé, conique du graphe de $\mathcal{H}$ et

$$\Gamma' = \{(\mu, -\nu) \; ; \; (\mu,\nu) \in \Gamma\} .$$

(3.2) B et C sont non-caractéristiques au point $(\mathcal{H}(\rho), -\rho)$.

(3.3) $(\mathcal{H}(\rho), \rho) \notin WF'(BP - (D_n + i x_n D_{n-1})C)$.

Pour montrer cette proposition il faut d'abord construire $\mathcal{H}$ transformant $p(x,\xi)$ en $a(x,\xi)(\xi_n + i x_n \xi_{n-1})$ où $a(x,\xi)$ est elliptique d'ordre m-1. Avec une telle $\mathcal{H}$ on obtient la proposition avec $D_n + i x_n D_{n-1} + C_0$ au lieu de $D_n + i x_n D_{n-1}$, où $C_0 \in L^0(\mathbf{R}^n)$. Pour eliminter C_0 on montre qu'il existent B', $C' \in L^0(\mathbf{R}^n)$ elliptiques tels que $B'(D_n + i x_n D_{n-1} + C_0) \equiv (D_n + i x_n D_{n-1})C'$ près de $\mathcal{H}(\rho)$.

Nous considérons maintenant l'opérateur $\Lambda = D_n + i x_n D_{n-1}$ près du point $\eta = \mathcal{H}(\rho) = (x^0, \xi^0)$ où $x_n^0 = \xi_n^0 = 0$, $\xi_{n-1}^0 < 0$. Considérons les opérateurs $G : C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \to C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $G^+ : C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1}) \to C^\infty(\mathbf{R}^n)$, définis par

$$(3.4)\qquad \widetilde{Gf}(\xi',x_n) = i\int_0^{x_n} e^{1/2(x_n^2-y_n^2)\xi_{n-1}}\,\psi(\xi')\tilde{f}(\xi',y_n)\,dy_n$$

$$(3.5)\qquad \widetilde{G^+g}(\xi',X_n) = e^{1/2 x_n^2\,\xi_{n-1}}\,\psi(\xi')\,\tilde{g}(\xi')\quad ,$$

où $f\in C_o^\infty(\mathbf{R}^n)$, $g\in C_o^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ et $\sim$ est la transformée de Fourier par rapport à x' et ψ est une fonction dans $C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, que l'on choisit à valeurs réelles, positivement homogène de degré zéro pour $|\xi'|$ grand. De plus supp $\psi\subset\{\xi'\ ;\ \xi_{n-1}<0\}$ et $\psi(\xi')=1$ quand $|\xi'|$ est grand et $\xi'/|\xi'|\approx\xi_o'/|\xi_o'|$. On vérifie que

$$(3.6)\qquad \Lambda G = \psi(D'),\ \gamma G=0,\ \Lambda G^+=0,\ \gamma G^+=\psi(D'),$$

$$(3.7)\qquad G\Lambda = \psi(D') - G^+\gamma,$$

où $\gamma : C^\infty(\mathbf{R}^n)\to C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ est l'opérateur de restriction à $x_n=0$. On a aussi :

$$(3.8)\qquad (G^+)^*\,G^+ = (\psi(D'))^2\,a(D')$$

où $a(\xi')\in C^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ est positivement homogène pour $|\xi'|$ grand de degré $-1/2$ et $a(\xi')\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $\forall\xi'$.

Soit $T=T(D)\in L^o(\mathbf{R}^n)$, proprement supporté tel que

1) $T\equiv I$ près de $\eta=\mathcal{H}(\rho)$.

2) $T(\xi)$ est d'ordre $-\infty$ en dehors d'un petit voisinage de ξ^o.

3) $\frac{\partial}{\partial\xi_n}T(\xi)$ est d'ordre $-\infty$ dans un voisinage conique de $\xi_n=0$.

Posons

$$(3.9)\qquad E_\eta^+ = G^+(a(D'))^{-1}(G^+)^*$$

$$(3.10)\qquad E_\eta = T(D)(G-G^+(a(D'))^{-1}(G^+)^*G)T(D).$$

Proposition 3.2 : E_η, E_η^+ vérifient :

(i) E_η est continu $H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s+1/2}(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$

(ii) E_η^+ est continu $H_s(\mathbb{R}^n) \to H_s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

(iii) $WF'(E_\eta) \subset \mathrm{diag}(T^*(\mathbb{R}^n)\backslash 0)$

(iv) $WF'(E_\eta^+) \subset \mathrm{diag}(\{(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)\backslash 0 \ ; \ x_n = \xi_n = 0\})$

(v) $\Lambda E \equiv I$ près de η.

(vi) $E^+ + E\Lambda \equiv I$ près de η

(vii) $(E^+)^* \equiv E^+$ près de η.

Toutes les propriétés sauf (iii) découlent assez facilement de la construction. Pour montrer (iii) on montre d'abord que χE_η, $E_\eta \chi$ sont des opérateurs pseudodifférentiels si $\chi \in L^o(\mathbb{R}^n)$ et $WF(\chi) \cap \{(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)\backslash 0 \ ; \ x_n = \xi_n = 0\} = \emptyset$.

Utilisant ce fait et une estimation de $WF'(E_\eta)$ dans la direction de (x',ξ') qui se déduit de (3.4), (3.10), on montre (iii).

Nous pouvons maintenant construire les F_ρ, F_ρ^+ dans (2.2)-(2.4). Soient P comme dans le théorème 1.1, $\rho \in \Sigma^+$ et , B, C, Γ comme dans la proposition 3.1. Prenons $U \in I^o(\mathbb{R}^n \times X, \Gamma')$ tel que $U^*U \equiv I$ près de ρ, $UU^* \equiv I$ près de $\eta = \mathcal{X}(\rho)$. (Un tel U peut être construit en utilisant la proposition 2.2.2 dans [5].). Nous écrivons (3.3) sous la forme

(3.11) $$(\mathcal{X}(\rho), \rho) \notin WF'(UP - (C_1 \Lambda C_2)U),$$

où $C_1 \in L^{m-1}(\mathbb{R}^n)$, $C_2 \in L^o(\mathbb{R}^n)$ sont non-caractéristiques près de η. S'il existe des opérateurs F_η, F_η^+, ($F_\eta^- = 0$) satisfaisant (2.2) - (2.4) près de η pour l'opérateur $C_1 \Lambda C_2$, alors les opérateurs

(3.12) $$F_\rho = U^* F_\eta U, \quad F_\rho^+ = U^* F_\eta^+ U$$

vérifient (2.2)-(2.4) près de ρ pour l'opérateur P. On a donc réduit le problème à l'opérateur $C_1 \Lambda C_2$.

Soient $C_1' \in L^{1-m}(\mathbb{R}^n)$, $C_2' \in L^o(\mathbb{R}^n)$ à noyaux de distributions dans $\mathcal{E}'$ tels que $C_j'C_j \equiv C_jC_j' \equiv I$ près de η. Il est facile de montrer que

$$K = (C_2' G^+)^*(C_2' G^+) \in L^{-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

et que K est non-caractéristique en $\eta' = (x^{o'}, \xi^{o'})$.
Soit $B \in L^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ à noyau de distribution dans $\mathcal{E}'$ tel que $BK \equiv KB \equiv I$ près de η' et posons

$$F_\eta^+ = C_2' G^+B(C_2' G^+)^*$$

$$F_\eta = (C_2' E_\eta - F_\eta^+ C_2' E_\eta)C_1'.$$

Alors F_η, F_η^+ satisfont (2.2) - (2.4) près de η pour l'opérateur $C_1 \Lambda C_2$ et notre esquisse de la démonstration du théorème 1.1 est terminée.

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2

Soit P, X comme dans le théorème 1.2. Pour chaque $s \in \mathbb{R}$ nous considérons P comme un opérateur non-borné $P_s : H_{s+m-1/2}(X) \to H_s(X)$. Soient F, F^- les opérateurs du théorème 1.1, donc

$$(4.1) \qquad FP \equiv I$$

$$(4.2) \qquad F^- + PF \equiv I$$

(4.1) implique que $N_{P_s} = N_P \subset C^\infty(X)$ est un espace de dimension finie, indépendant de s. Prenons une base orthonormé $(f_1, \dots, f_\nu)$ de N_P et posons :

$$(4.3) \qquad E^+u = \sum_{j=1}^{\nu} (u, f_j)f_j \quad , \quad u \in \mathcal{D}'(X).$$

Alors E^+ est de rang fini, son noyau distribution est C^∞ et $E^+\big|_{H_o(X)}$ est la projection orthogonale sur N_P. Posons

$$(4.4) \qquad N'_{P_s} = \{u \in H_{s+m-1/2}(X) \ ; \ E^+u = 0\} ,$$

$H_{s+m-1/2}(X)$ est la somme directe topologique de N_{P_s} et N'_{P_s} .

(4.1) donne l'estimation à priori :

(4.5) $$\|u\|_{s+m-1/2} \leq C_{s,\rho}(\|Pu\|_s + \|u\|_{s+m-1/2-\rho}) ,$$

$$u \in H_{s+m}(X) , \quad \rho > 0 , \quad s \in \mathbb{R} .$$

Un argument dans la démonstration du théorème 8.7.2 dans [3] donne

(4.6) $$\|u\|_{s+m-1/2} \leq C_s \|P_s u\|_s, \qquad u \in N'_{P_s} \cap \mathfrak{D}_{P_s} .$$

Donc $\operatorname{Im} P_s = \operatorname{Im} P \cap H_s(X)$ est fermé dans H_s pour tout $s \in \mathbb{R}$ et la fermeture de $\operatorname{Im} P_o$ dans H_s est contenu dans $\operatorname{Im} P_s$ pour tout $s \leq 0$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe un opérateur unique, borné $\underline{E}_s : \operatorname{Im} P_s \to N'_{P_s}$ tel que $P_s \underline{E}_s = I$ sur $\operatorname{Im} P_s$ et $\underline{E}_s P_s = I$ sur $N'_{P_s} \cap \mathfrak{D}_{P_s}$ et $\underline{E}_s = \underline{E}_{s'}$ sur $\operatorname{Im} P_s \cap \operatorname{Im} P'_s$. Soit $E_o^- : H_o(X) \to (\operatorname{Im} P_o)^{\perp}$ la projection orthogonale. Alors $I - E_o^-$ est la projection sur $\operatorname{Im} P_o$ et nous posons

(4.7) $$E_o = \underline{E}_o(I - E_o) : H_o(X) \to H_{m-1/2}(X).$$

Alors

(4.8) $$E_o^- P_o = 0$$

(4.9) $$P_o E_o = I - E_o^-$$

(4.10) $$E_o P_o \subset I - E^+$$

(4.11) $$P_o E^+ = 0$$

Supposons que E_o^- a une restriction ou une extension continue $E_s^- : H_s \to H_s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Alors $E_s = \underline{E}_s(I - E_s^-)$ est une extension ou une restriction continue : $H_s(X) \to H_{s+m-1/2}(X)$ de E_o. Les unions $E^- = \bigcup_s E_s^-$, $E = \bigcup_s E_s$ sont continus de $\mathfrak{D}'(X)$ dans $\mathfrak{D}'(X)$ et aussi de $C^\infty(X)$ dans $C^\infty(X)$. En plus (1.14), (1.15) sont satisfaites et l'énoncé d'unicité dans le théorème 1.1 montre que $E \equiv F$, $E^- \equiv F^-$, ce qui nous donne le théorème 1.2.

Pour montrer que E_o^- est continu dans tous les espaces $H_s(X)$ nous multiplions (4.2) à gauche par E_o^- et utilisons (4.8) :

(4.12) $\quad E_o^- F^- \equiv E_o^- \mod (\mathcal{L}(H_{-s}(X), H_o(X)))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Ici $\mathcal{L}(A,B)$ est l'espace des opérateurs bornés : $A \to B$. Multiplions (4.9) à gauche par F^-. Comme $F^-P \equiv 0$ on obtient

(4.13) $\quad F^- E_o^- \equiv F^- \mod (\mathcal{L}(H_o(X), H_s(X)), \ \forall s \in \mathbb{R}$.

Prenant les adjoints et utilisant que $(F^-)^* \equiv F^-$, $(E_o^-)^* = E_o^-$, on obtient

(4.14) $\quad E_o^- F^- \equiv F^- \mod (\mathcal{L}(H_{-s}(X), H_o(X))), \ \forall s \in \mathbb{R}$.

(4.12) et (4.14) impliquent que

(4.15) $\quad E_o^- \equiv F^- \mod (\mathcal{L}(H_{-s}(X), H_o(X))), \ \forall s \in \mathbb{R}$,

et prenant les adjoints on a

(4.16) $\quad E_o^- \equiv F^- \mod (\mathcal{L}(H_o(X), H_s(X)), \ \forall s \in \mathbb{R}$.

Comme F^- est continu $H_s(X) \to H_s(X)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ on déduit de (4.15), (4.16) que E_o^- a pour tout $s \in \mathbb{R}$ une extension ou une restriction E_s^- continue : $H_s(X) \to H_s(X)$. Le théorème 1.2 est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Duistermaat J. J. et Hörmander L. : Fourier integral operators II, Acta Math. 128 (1972), 183-269.

[2] Egorov Yu. V. : Non degenerate subelliptic pseudo-differential operators, Math. USSR Sbornik 11(1970), 291-308.

[3] Hörmander L. : Linear partial differential operators, Springer-Verlag 1963.

[4] Hörmander L. : Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. Math. 83(1966), p. 129-209.

[5] Hörmander L. : Fourier integral operators I, Acta Math. 127(1971), 79-183.

[6] Hörmander L. : On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential operators, l'Enseignement Mathématique 17(2) (1971), p. 99-163.

[7] Kawai T. : Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients, II, Publ.R. I. M. S., Kyoto Univ. 7 (1971), p. 399-426.

[8] Nirenberg L. A. : Lectures on Linear Partial Differential Equations, Proc. of Regional Conference at Texas Tech., Conference Board of the Math. Sciences of the A. M. S. (à paraître).

[9] Sato M., Kawai T., Kashiwara M. : On pseudo-differential equations in hyperfunction theory, Proc. of the A. M. S. Summer Institute on Partial Differential Equations, Berkeley 1971.

[10] Sjöstrand J. : Operators of principal type with interior boundary conditions. A paraître dans Acta Math. 130 (1973).