Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

L. Frank

Fonctions de mailles et théorie elliptique des opérateurs aux différences finies

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 5, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : 633-25-79

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1972-1973

FONCTIONS DE MAILLES ET THEORIE ELLIPTIQUE DES OPERATEURS AUX DIFFERENCES FINIES

par L. FRANK

Exposé N° V

25 Octobre 1972

§ 0. INTRODUCTION

Au voisinage des problèmes elliptiques différentiels, il y a des approximations "non-elliptiques" ne conservant pas sur les réseaux les propriétés fondamentales des opérateurs approchés, la situation que l'on va illustrer avec un exemple simple.

Soit l'opérateur

$$D_x = -i \frac{d}{dx} \tag{1}$$

On va considérer trois approximations de (1). Soit $R^1_{x,h} = \{x \in R^1_x, x=kh, k = 0, \pm 1, \ldots\}$ une famille de réseaux sur la droite de pas h. On désigne par $\theta_{x,h}$ et $\bar{\theta}_{x,h}$ les opérateurs de translation d'un pas respectivement en avant et en arrière et l'on introduit les opérateurs

$$D_{x,h} = \frac{\theta_{x,h} - 1}{ih} \tag{2}$$

$$\bar{D}_{x,h} = \frac{1 - \bar{\theta}_{x,h}}{ih} \tag{3}$$

Enfin, on pose

$${}^sD_{x,h} = \frac{1}{2}\left(D_{x,h} + \bar{D}_{x,h}\right) = \frac{\theta_{x,h} - \bar{\theta}_{x,h}}{2h} \tag{4}$$

On prend $\mathcal{D}(R'_x)$ comme domaine de l'opérateur (1) et les traces des fonctions de $\mathcal{D}(R'_x)$ sur $R'_{x,h}$ comme domaine des opérateurs (2) (4). On a, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$:

$$\left.\begin{aligned} (D_x - D_{x,h})\varphi &= 0(h) \\ (D_x - \bar{D}_{x,h})\varphi &= 0(h) \\ (D_x - {}^sD_{x,h})\varphi &= 0(h^2) \end{aligned}\right\} \qquad (h \to 0)$$

Donc, apparemment l'opérateur (4) approche mieux l'opérateur (1) que (2), (3). Néanmoins, cet opérateur ne conserve pas sur $R^1_{x,h}$ la propriété fondamentale de (1), à savoir, celle de n'avoir pour solutions de l'équation homogène correspondante que les constantes, car on a parmi les solutions de l'équation

$$ {}^{s}D_{x,h}u = 0 $$

la fonction $(-1)^{\frac{x}{h}}$ qui possède sur $R'_{x,h}$ de très mauvaises propriétés de régularité, vu que les dérivées au sens de différences finies ce cette fonction sont

$$ D^{k}_{x,h}(-1)^{\frac{x}{h}} = (2i)^{k}h^{-k}(-1)^{\frac{x}{h}} \sim 0(h^{-k})(h \to 0) $$
$$ D^{k}_{x,h}(-1)^{\frac{x}{h}} = (-2i)^{k}h^{-k}(-1)^{\frac{x}{h}} \sim 0(h^{-k})(h \to 0). $$

Par contre, toutes les solutions des équations

$$ D_{x,h}u = 0 \quad \bar{D}_{x,h}u = 0 $$

sont constantes sur $R^{1}_{x,h}$.

Introduisant les analogues discrets des normes de Sobolev d'ordre 0 et 1 :

$$ \|u\|^{2}_{0,h} = \sum_{x \in R'_{x,h}} |u(x)|^{2}h, \quad \|u\|^{2}_{1,h} = \|u\|^{2}_{0,h} + \|D_{x,h}u\|^{2}_{0,h}, $$

on constate que la majoration,

$$ \|u\|_{1,h} \leq C(\|{}^{s}D_{x,h}u\|_{0,h} + \|u\|_{0,h}) $$

avec une constante C indépendante de h est impossible, car il suffit de prendre $u = h(-1)^{\frac{x}{h}} C(x)$, $C \in \mathcal{D}$, pour obtenir une contradiction avec (5), le premier membre étant $0(1)$ et le second $0(h)$ $(h \to 0)$. On va passer maintenant à l'introduction des analogues discrets des espaces de Sobolev $H_{s}(R^{n}_{x})$ et ensuite à l'introduction et l'étude d'une algèbre des opérateurs aux différences finies qui permettra d'établir la théorie elliptique de ces opérateurs.

§ 1. ESPACES DES FONCTIONS DE MAILLES

1) Notations : On désigne par $\mathbb{Z}^n$ l'ensemble des points de R^n_x à coordonnées nombres entiers et par $R^n_{x,h}$ ou R^n_h la famille de réseaux de pas h dans R^n_x qui s'obtient de $\mathbb{Z}^n$ par l'homothétie :

$$R^n_{x,h} = h\mathbb{Z}^n , \quad h \in]0,h_o].$$

h_o est supposé fixe et suffisamment petit.

On note par $T^n_{\xi,h}$ ou par T_h tout court la famille des tores duals à R^n_h : $T_h = \{\xi \in R^n_\xi, \; |h\xi_j| \leq \pi\}$.

Les symboles $\theta_{x_j,h}$ et $\bar{\theta}_{x_j,h}$ sont réservés pour les opérateurs de translation d'un pas le long de l'axe des x_j respectivement en avant et en arrière.

On introduit

$$D_{x_j,h} = (ih)^{-1}(\theta_{x_j,h} - 1) \;,\; \bar{D}_{x_j,h} = (ih)^{-1}(1 - \bar{\theta}_{x_j,h})$$

les opérateurs de dérivation au sens des différences finies, respectivement en avant et en arrière, multipliés par -i.

On pose :

$$\zeta_{\xi_j} = (ih)^{-1}(\exp(ih\xi_j)-1),$$

$$\zeta_\xi = (\zeta_{\xi_1},\ldots,\zeta_{\xi_n}), \quad \omega_\xi = \zeta_\xi|_{h=1}$$

On note pour tout multi-index α :

$$D^\alpha_{x,h} = D^{\alpha_1}_{x_1,h} \ldots D^{\alpha_n}_{x_n,h} \;,\; Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1},\ldots,Z_n^{\alpha_n} \;,\; \langle Z\rangle^s = (1+|Z|^2)^{s/2},$$

$$\forall\, Z \in \mathbb{C}^n.$$

2) Espaces $\mathcal{S}_h$, $\mathcal{S}'_h$, $\tilde{\mathcal{S}}^h_h$, $\tilde{\mathcal{S}}'^h_h$.

Définition 1.1 : On appelle fonction de mails (f.m.) toute application

$$u :]0,h_o]\times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}^p \qquad (1.1)$$

continue en $h \in]0,h_o]$.

Pour tout $h \in]0,h_o]$ on peut considérer une f.m. $u(x)$ comme une application

$$u : R^n_{x,h} \to \mathbb{C}^p. \qquad (1.2)$$

On désigne par $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des f.m. à décroissance rapide pour $|x| \to \infty$, $\mathcal{S}'_h$ désignant l'ensemble dual des f.m. à croissance lente pour $|x| \to \infty$. On désigne par $\mathcal{S}(0,h_o)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_h$ de f.m. $\varphi^{(x)}$ pour lesquelles sont finies les semi-normes :

$$\sup_h \sup_x <x>^j |D^\alpha_{x,h}\varphi| < \infty , \quad \forall(j,\alpha)$$

a) A toute f.m. $u \in \mathcal{S}_h$ on fait correspondre sa transformée de Fourier discrète :

$$\tilde{u}^h(\xi) = F_{x\to\xi,h}\, u = \sum_{x\in R^n_{x,h}} u(x)\, e^{-ix.\xi}h^n \qquad (1.3)$$

avec la formule évidente d'inversion

$$u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\xi,h}} e^{ix.\xi}\, \tilde{u}^h(\xi)d\xi$$

et celle de Perséval

$$\sum_x u(x)\overline{v(x)}\ h^n = (2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\xi,h}} \tilde{u}^h(\xi)\overline{\tilde{v}^h}(\xi)d\xi$$

En outre,

$$F_{x\to\xi,h}(D^{\alpha}_{x,h}u) = \zeta^{\alpha}_{\xi}\,\tilde{u}^{h}\ ,\ F_{x\to\xi,h}(\bar{D}^{\alpha}_{x,h}u) = \bar{\zeta}^{\alpha}_{\xi}\,\tilde{u}^{h},\ F_{x\to\xi,h}(x^{\alpha}u) = (i\partial_{\xi})^{\alpha}\tilde{u}^{h}(\xi)$$

Il est clair que $\tilde{\mathcal{S}}^{h}_{h} = F_{x\to\xi,h}\,\mathcal{S}_{h}$ est l'ensemble des fonctions $\tilde{u}^{h}(\xi) \in C^{\infty}_{\xi}$, périodiques en ξ de période $2\pi/h$, $\forall\ h \in]0,h_{o}]$.

De même, $\tilde{\mathcal{S}}'^{h}_{h} = F_{x\to\xi,h}\,\mathcal{S}'_{h}$ est l'ensemble des distributions périodiques de périodes $2\pi/h$ d'ordre fini, $\forall\ h \in]0,h_{o}]$.

$$\tilde{\mathcal{S}}(0,h_{o}) = \{u : \sup_{h}\ \sup_{x} <\zeta_{\xi}>^{j}|\partial^{\alpha}_{\xi}\ u^{h}| < \infty\}.$$

b) Opérateurs de restriction π_{n} et de prolongement ℓ_{n}.
Pour toute fonction $u \in C(R^{n}_{x})$ est définie la projection (restriction sur $R^{n}_{x,h}$) :

$$\pi_{h}u = u(x),\ x \in R^{n}_{x,h}$$

Pour toute f.m. $u \in \mathcal{S}_{h}$ est définit l'opérateur de prolongement ℓ_{n} :

$$\ell_{h}\ u(x) = (2\pi)^{-n}\int_{T^{n}_{\xi,h}} e^{ix.\xi}\tilde{u}^{h}(\xi)d\xi,\quad x \in R^{n}_{x} \tag{1.4}$$

<u>Proposition 1.1</u> : on a l'inclusion :

$$\pi_{h}\,\mathcal{S} \subset \mathcal{S}(0,h_{o})$$

les semi-normes

$$|\varphi|_{k,j} = \sup_{h}\ \sup_{x}\ <x>^{k}\sum_{|\alpha|=j}|D^{\alpha}_{x,h}\ \varphi|\ ,\ \varphi \in \mathcal{S}$$

étant finies, $\forall$ k, j, $\forall\ \varphi \in \mathcal{S}$, et vérifiant les inégalités :

$$|\varphi|_{k,j} \le 2^{k/2}(1 + j^{2}h^{2}_{o})^{k/2}\ [\varphi]_{k,j}$$

où $[\varphi]_{k,j}$ sont les semi-normes correspondantes dans $\mathcal{S}$. La démonstration est immédiate.

3) <u>Espaces</u> $H_s(0,h_o)$: On introduit les normes

$$\|u\|^2_{s,h} = (2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\xi,h}} <\zeta_\xi>^{2s}|\tilde{u}^h(\xi)|^2 d\xi \qquad (1.5)$$

$$[|u|]_s = \sup_{0<h\leq h_o} \|u\|_{s,h} \qquad (1.6)$$

et l'on désigne par $H_s(0,h_o)$ l'ensemble de $u \in \mathcal{S}'_h$ à la norme (1.6) finie.

Pour $s = m \geq 0$, m entier, on vérifie aisément que $H_m(0,h_o)$ est l'espace des f.m. u telles que

$$\sup_h \sum_{x\in R^n_{x,h}} \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha_{x,h}\, u|^2 h^n < \infty$$

Evidemment, $H_{s_1}(0,h_o) \leq H_{s_2}(0,h_o)$ si $s_1 \leq s_2$. L'opérateur π_h étant défini sur H_s avec $s > n/2$, on peut demander si

$$\pi_h H_s \subset H_s(0,h_o).$$

La réponse est fournie par le

<u>Théorème 1.1</u> : Soit $u \in H_s$, $s > n/2$. Alors $\pi_n u \in H_t(0,h_o)$, $\forall\, t \leq s$ et les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \|\pi_h u\|_{t,s} \leq \|u\|_t + C_{s,t}\, h^{s-t}\left(\int_{CT^n_{\xi,h}} <\xi>^{2s}|\tilde{u}\,(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ \\ \|u\|_t \leq [|\pi_h u|]_t \end{cases} \qquad (1.7)$$

<u>Démonstration</u> : On pose

$$v = \pi_h u$$

et l'on utilise la formule de Poisson :

$$\tilde{v}^h(\xi) = \check{\tilde{u}}(\xi) + \check{\tilde{w}}(\xi)$$

avec

$$w(\xi) = \sum_{0\neq\alpha\in\mathbb{Z}^n} \tilde{\check{u}}(\xi + 2\pi\,\alpha\, h^{-1}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$|\tilde{\check{w}}(\xi)|^2 \leq C_s h^{2s} \sum_\alpha{}' \langle\xi + 2\pi\alpha h^{-1}\rangle^{2s} |\tilde{\check{u}}(\xi + 2\pi\alpha h^{-1})|^2 \quad , \quad \forall\, \xi \in T^n_{\xi,h} \qquad (1.8)$$

Multipliant (1.8) par $\langle\zeta_\xi\rangle^{2t}$ et intégrant par $\xi \in T^n_{\xi,h}$, on obtient la première des inégalités (1.7).

Pour prouver la seconde, on utilise (1.8) et le théorème de Lebesgue .

Remarque 1.2 : Il résulte des inégalités (1.7) que pour tout $u \in H_s$ avec $s > n/2$, on a :

$$\|u\|_t = \overline{\lim_{h\to 0}}\, \|\pi_h u\|_{t,h},\ \forall\, t \leq s.$$

Pour s quelconque on peut se donner une autre projection qui garantit l'inclusion voulue et donne sur les réseaux une f.m. qui pour h petit diffère peu de la fonction donnée initialement. Notamment est vraie la

Proposition 1.2 : Soit $u \in H_s$. Alors il existe v_h vérifiant les conditions :

a) $v_h \in H_{s+t},\ \forall\, t \geq 0,\ h^t\|v_h\|_{s+t} \leq C_{s,t}\|u\|_s$

b) $\pi_h v_h \in H_s(0,h_0),\ [|\pi_h v_h|]_s \leq C\|u\|_s$

c) $\|u - v_h\|_{s-s'} \leq C_{s,s'}\, h^{s-s'}\|u\|_{s'},\ \forall\, s' \leq s.$

Démonstration : Soit $\Phi_0(\xi) \in C_0^\infty(R^n_\xi)$, $1 \geq \Phi_0(\xi) \geq 0$, $\Phi_0(\xi) \equiv 1$ dans un voisinage du zéro, supp $\Phi_0 \subset \{|\xi|\leq 1\}$. On pose :

$$\tilde{\check{v}}_h(\xi) = \Phi_0(h\xi)\tilde{\check{u}}(\xi)$$

Les propriétés a), c) sont évidentes. La propriété b) résulte du théorème 1.1 et de a).

Proposition 1.3 : Soit $u \in H_s(0,h_o)$. Il existe un prolongement $\ell_h u = v_h$ vérifiant les inégalités :

$$h^t \|v_h\|_{s+t} \leq C_{s,t}[|u|]_s, \ \forall\ t \geq 0. \tag{1.9}$$

Démonstration : On utilise le prolongement :

$$v_h(x) = \ell_n u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} e^{ix.\xi} \tilde{u}^h(\xi)\, d\xi, \quad \forall\ x \in R^n_x. \tag{1.10}$$

On peut trouver dans [6] une étude assez détaillée des espaces de fonctio de mailles y compris ceux qui pourrait être utilisés dans les problèmes aux limites discrètes.

§ 2. OPERATEURS AUX DIFFERENCES FINIES. CLASSES DE SYMBOLES K_ν. SYMBOLE GRADUE. CLASSES $\mathcal{L}_\nu$.

1) Classes K_ν de symboles canoniques

Soit une fonction $a(x,\xi) \in C^\infty(R^n_x\ R^n_\xi \setminus \{0(\mathrm{mod}\, 2\pi)\})$ à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre p, périodique en ξ de périodes $(2\pi,..,2\pi)$. On suppose, en outre, qu'il existe

$$\lim_{x\to\infty} a(x,\xi) = a(\infty,\xi)$$

et l'on note

$$\mathfrak{a}(x,\xi) = a(x,\xi) - a(\infty,\xi).$$

Pour tout couple de multi index α,β et tout j entier ≥ 0, on pose :

$$a^\alpha_\beta(x,\xi) = D^\beta_x\, \partial^\alpha_\xi\ a(x,\xi)$$

$$\tilde{a}_{<x>^j \xi^\alpha}(\chi,\xi) = <\chi>^j\ F_{x\to\chi}\ a^\alpha$$

et l'on introduit les normes

$$\|\tilde{a}_{<x>^j\xi^\alpha}\|_{|\alpha|-\nu} = (2\pi)^{-n} \int_{R^n_\chi} \sup_\xi <\chi>^j |\tilde{\mathfrak{a}}^\alpha(\chi,\xi)|\, |\omega_\xi|^{|\alpha|-\nu} d\chi + \tag{2.1}$$
$$+ (2\pi)^{-n} \sup_\xi |a^\alpha(\infty,\xi)|\, |\omega_\xi|^{|\alpha|-\nu}$$

avec $\omega_\xi = (\omega_{\xi},\ldots,\omega_{\xi_n})$, $\omega_{\xi_j} = -i(e^{i\xi} - 1)$

<u>Définition 2.1</u> : On définit pour tout ν réel la classe k_ν des fonctions matricielles avec les propriétés ci-dessus et telles que les normes (2.1) sont finies, $\forall\ \alpha$, j; les éléments de k_ν sont dits symboles canoniques.

<u>Remarque 2.1</u> : La fonction $h^{-\nu}a(x,h\xi)$ homogène d'ordre ν en (h^{-1},ξ) est analogue à un symbole homogène d'ordre ν dans le cas pseudodifférentiel. En outre, si pour tout compact $k \subset R^n_x\ R^n_\xi$ on a

$$\lim_{h\to\infty} h^{-\nu}a(x,h\xi) = \alpha(x,\xi) \not\equiv 0,$$

alors $\alpha(x,\xi)$ est homogène d'ordre ν et $\alpha(x,\xi) \in \mathscr{S}^\nu$ (classe de Kohn-Nirenberg, Hörmander, [1], [2]).

<u>Définition 2.2</u> : Soit une suite numérique monotone $\{s_j\}$, $s_j \to -\infty$, et une suite de symboles canoniques $\{{}^ja\}$, ${}^ja \in k_{s_j}$. On appelle symbole gradué et l'on note $\sigma_\Gamma(a)$ la somme formelle

$$\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j=0} {}^ja(x,\xi),\quad {}^ja \in k_{s_j}$$

2) <u>Classes</u> $\mathcal{L}_\nu$

Soit une fonction $a(h,x,\xi)$ sur $]0,h_0] \times R^n_x \times R^n_\xi$ à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre p. On suppose que $a \in C^\infty(R^n_x \times R^n_\xi)$, $a \in C(]0,h_0] \times R^n_x \times R^n_\xi)$, a est périodique en ξ de périodes $(2\pi/h,\ldots,2\pi/h)$. Avec les mêmes hypothèses de comportement à l'infini ($|x|\to\infty$) et les mêmes notations que ci-dessus on pose

$$|\tilde{a}_{<x>^j\xi^\alpha}|_{|\alpha|-\nu} = (2\pi)^{-n} \int_{R^n_\chi} \sup_{h,\xi} <\chi>^j |\tilde{\mathfrak{a}}^\alpha(\chi,\xi)|\, |<\zeta_\xi>|^{|\alpha|-\nu} d\chi + \tag{2.2}$$
$$+ (2\pi)^{-n} \sup_{h,\xi} |a^\alpha(h,\infty,\xi)|\, |<\zeta_\xi>|^{|\alpha|-\nu}$$

Soit $\varphi(t) \in C^{\infty}(\bar{R}^1_+)$, $\varphi \equiv 1$ pour $t \geq 1$, $\varphi \equiv 0$ pour $0 \leq t \leq 1/2$, $1 \geq \varphi \geq 0$.
On note

$$\varphi_\xi = \varphi(|\zeta_\xi|)$$

<u>Définition 2.3</u> : Pour tout ν réel on définit la classe $\mathcal{L}_\nu$ des fonctions matricielles $a(h,x,\xi)$ ayant les propriétés ci-dessus et telles qu'il existe un symbole gradué

$$\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j\geq 0} {}^j a(x,\xi), \quad {}^j a \in k_{s_j}, \quad s_o = \nu, \quad s_j \to -\infty$$

tel que pour tout $N \geq 0$, N entier, les restes

$$N_\tau(h,x,\xi) = \begin{cases} a(h,x,\xi) - \varphi_\xi \sum_{0\leq j<N} h^{-s_k}\, {}^k a(h,x,\xi), & N > 0 \\ a(h,x,\xi), & N = 0 \end{cases} \qquad (2.$$

vérifient les inégalités :

$$|\tilde{N}_{\tau <x>^j \xi^\alpha}|_{|\alpha|-s_N} < \infty, \quad \forall\ j,\ \alpha,\ N$$

<u>Théorème 2.1</u> : Soit un symbole gradué $\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j\geq 0} {}^j a$, ${}^j a \in k_{s_j}$, $s_o = \nu$
Alors il existe un symbole $a(h,x,\xi) \in \mathcal{L}_\nu$ ayant $\sigma_\Gamma(a)$ pour symbole gradué.

<u>Démonstration</u> : Soit $\varphi(t)$ la fonction introduite ci-dessus et $\{t_k\}$ une suite numérique $t_o = 1$, $t_k \to 0$, $k \to \infty$. On note

$${}^k b(h,x,\xi) = \varphi(t_k|\zeta_\xi|)h^{-s_k}\, {}^k a(x,h,\xi) \qquad (2.5)$$

et l'on pose

$$a(h,x,\xi) = \sum_{k\geq 0} {}^k b(h,x,\xi)$$

Choisissant t_k de manière à ce que $t_k \to 0$ assez rapidement, on prouve que $a \in \mathcal{L}_\nu$. D'autre part, on vérifie aisément que $a(h,x,\xi)$ a pour symbole gradué $\sigma_\Gamma(a)$ donné initialement.

§ 3. DEFINITION D'UN OPERATEUR AUX DIFFERENCES FINIES (o.d.f.)

Soit $a \in \mathcal{L}_\nu$. On définit une famille des o.d.f. A^h,

$$A^h : \mathcal{S}'_h \to \mathcal{S}'_h$$

par la formule

$$A^h u = F^{-1}_{\xi\to x,h}\ a(h,x,\xi)\ F_{x\to\xi,h} u + T^h_\infty,\ \forall\, u \in \mathcal{S}'_h$$

où T^h_∞ est un opérateur tel que pour tout s on a :

$$T^h_\infty\ H_s(0,h_o) \subset H_\tau(0,h_o) \tag{3.1}$$

On appelle symbole de A^h et l'on note $\sigma(A^h)$ la fonction $a(h,x,\xi)$. Tout opérateur T^h_∞ ayant la propriété (3.1) sera dit régularisant. Le symbole gradué de a est dit symbole gradué de A^h et est noté : $\sigma_\Gamma(A^h)$.

<u>Exemples</u> : a) $a(h,x,\xi) = e^{ih\xi k}$. On vérifie aisément que

$$a \in \mathcal{L}_o,\ \sigma_\Gamma(a) = \Sigma\, {}^j a,\ {}^o a = e^{i\xi k},\ {}^j a \equiv 0,\ j \geq 1,\ s_o = 0$$

s_j quelconque, pourvu que $s_j \to -\infty$, $s_j < 0$, $j \geq 1$. L'opérateur A^h correspondant est la translation en avant $\theta_{x_j,h}$ d'un pas le long de l'axe des x_j.

$$\text{b)}\quad a(h,x,\xi) = -\,|\zeta_\xi|^2 \in \mathcal{L}_2,\ {}^o a(x,\xi) = -|\omega_\xi|^2,\ s_o = 2,$$

${}^j a \equiv 0$, s_j sont arbitraires, pourvu que $s_j \to -\infty$, $s_j < 2$, $j > 0$.
Le symbole $-\,|\zeta_\xi|^2$ définit l'approximation classique Δ^h de l'opérateur de Laplace, dite "croix" qui s'èxprime par la formule

$$\Delta^h u = \sum_{j=1}^{n} \frac{u(x+he_j) - 2u(x) + u(x-he_j)}{h^2} = -\,D_{x,h}\,\bar{D}_{x,h}\,u$$

où e_j est le vecteur-unité le long de l'axe des x_j.

$$\text{c)}\quad a(h,x,\xi) = h^2|\zeta|^4 + |\zeta|^2 + b_1\zeta + b_2\bar{\zeta} + C,\quad a \in \mathcal{L}_2,$$

${}^{o}a = |\omega|^4 + |\omega|^2$, ${}^{1}a = b_1\omega + b_2\bar{\omega}$ ${}^{2}a = C$, ${}^{3}a = {}^{4}a = - = 0$, $\nu = s_o = 2$, $s_1 = 1$, $s_o = 0$, $s_j \to -\infty$, $s_j < 0$.

L'opérateur correspondant s'exprime par la formule :

$$A^h = h^2(D_{x,h}\overline{D}_{x,h})^2 + D_{x,h}\overline{D}_{x,h} + b_i D_{x,h} + b_2\overline{D}_{x,h} + C.$$

d) $a(h,x,\xi) = \langle\zeta_\xi\rangle^{-2} \in \mathcal{L}_{-2}$, ${}^{j}a(x,\xi) = (-1)^j|\omega_\xi|^{-2(j+1)} \in$ $\in k_{-2j-2}$, $s_j = -2(j+1)$. L'opérateur A^h correspondant est la fonction de Green discrète de l'opérateur $I - \Delta_h$, où Δ_h est le laplacien discret de l'exemple b).

ERRATA

Pages	Au lieu de :	Lire :
V.10 Ligne 9	$N_\tau(h,x,\xi) = \dfrac{a(\ldots}{a(\ldots}$	$N_r(h,x,\xi) = \dfrac{a(\ldots}{a(\ldots}$
V.10 Ligne 11	$\lvert \widetilde{N_\tau}_{\langle x\rangle}\ldots$	$\lvert \widetilde{N_r}_{\langle x\rangle}\ldots$
V.10 Ligne 16	$\ldots {}^k a(x,h,\xi)$	$\ldots {}^k a(x,h\xi)$
V.11 Ligne 5	$\ldots + T^h_\infty$	$\ldots + T^h_\infty u,\ \forall \ldots$