

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. GRUBB

## **Systèmes elliptiques ayant un spectre essentiel**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1972-1973), exp. n° 27,  
p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1972-1973\\_\\_\\_A28\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A28_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

SYSTEMES ELLIPTIQUES AYANT UN  
-----  
SPECTRE ESSENTIEL  
-----

par G. GRUBB



§ 1. INTRODUCTION

Soit  $T$  un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert  $H$ , fermé et de domaine dense. Le domaine, l'image et le noyau sont notés  $D(T)$ ,  $R(T)$  resp.  $Z(T)$ . Comme définition du spectre essentiel nous prenons celle de Wolf [9], qui donne un exposé détaillé :  $T$  est appelé Fredholm quand  $R(T)$  est fermé, et  $Z(T)$  et  $R(T)^\perp$  sont de dimension finie. L'ensemble de Fredholm est

$$(1) \quad \Phi(T) = \{ \lambda \in \mathbf{C} \mid T - \lambda \text{ est Fredholm} \},$$

et le spectre essentiel est

$$(2) \quad \text{sp}_{\text{ess}} T = \mathbf{C} \setminus \Phi(T) \quad (= \text{sp } A \setminus \Phi(T)).$$

$\text{sp}_{\text{ess}} T$  peut être caractérisé par les suites singulières :

Définition 1 : Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est appelée une suite singulière pour  $T$ , si  $Tu_n \rightarrow 0$ ,  $\|u_n\| = 1$  pour tout  $n$ , et  $u_n$  n'a pas de soussuites convergentes.

On a que  $\lambda \in \text{sp}_{\text{ess}} T$  si et seulement s'il existe une suite singulière, ou bien pour  $T - \lambda$ , ou bien pour  $T^* - \bar{\lambda}$ .

Le  $\text{sp}_{\text{ess}} T$  est fermé, et est invariant par toute perturbation compacte.

Il est bien connu que les problèmes aux limites elliptiques réguliers n'ont pas de spectre essentiel. Soit  $\bar{\Omega}$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ , de frontière  $\Gamma$  et intérieur  $\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Gamma$  ( $\Gamma$  éventuellement vide). Soit  $A$  un opérateur différentiel (scalaire ou matriciel) proprement elliptique sur  $\Omega$  d'ordre  $r > 0$ , et soit  $B$  un opérateur différentiel (en général matriciel) défini près de  $\Gamma$ . Soit  $A_B$  la réalisation dans  $L^2(\Omega)$  de domaine

$$(3) \quad D(A_B) = \{ u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega), Bu|_\Gamma = 0 \}.$$

Alors  $A_B - \lambda$  est Fredholm pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  si

- (i)  $\Omega$  est borné,
- (ii)  $A$  est uniformément elliptique sur  $\Omega$ ,
- (iii)  $B$  recouvre  $A$ ,
- (iv)  $\Omega$ ,  $\Gamma$  et les coefficients de  $A$  et  $B$  sont "smooth".

Quand  $\Gamma = \emptyset$ , (i), (ii) et (iv) entraînent que la réalisation maximale (que nous appelons encore  $A$ ) de domaine

$$(4) \quad D(A) = \{u \in L^2(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega)\},$$

n'a pas de spectre essentiel.

L'absence d'une des propriétés (i) à (iv) peut donner un spectre essentiel. Quant à (i), il y a les études de l'opérateur de Schrödinger  $-\Delta + q(x)$  sur  $\mathbb{R}^n$ , où typiquement  $\text{sp}_{\text{ess}} = [0, \infty[$  (voir Schechter [7] et ses références). Quand (ii) n'a pas lieu, l'ellipticité de  $A$  peut dégénérer à la frontière. Avec une dégénérescence légère,  $A_B$  peut encore être à invers compact (comme dans les travaux de Baouendi et Goulaouic) ; la dégénérescence plus forte qui crée un spectre essentiel a été étudiée par Wolf [9] et Poulsen [6]. Si (iii) n'est pas vérifié (mais (i), (ii) et (iv) le sont) on réduit le problème à l'étude d'un opérateur pseudo-différentiel non-elliptique sur  $\Gamma$ , en général non-Fredholm (travaux de Hörmander, Vishik et Eskin, Sjöstrand, et al...). Nous ne nous occuperons pas de (iv).

Nous allons étudier un cinquième aspect des réalisations elliptiques, qui fait intervenir aussi un spectre essentiel, d'une manière peut-être inattendue.

Le travail a été fait en collaboration avec G. Geymonat, Torino ; nous sommes encore en train de développer certains points.

§ 2. SYSTEMES D'ORDRE MIXTES

Soit A un système elliptique au sens de Douglis-Nirenberg. Si (i) à (iv) sont satisfaits (ce que nous supposons toujours),  $A_B$  est Fredholm, voir Agmon-Douglis-Nirenberg [1]. Mais il peut arriver que  $\text{sp}_{\text{ess}} A_B \neq \emptyset$ . Rappelons que ces systèmes A sont des matrices où les éléments peuvent avoir des ordres différents. Nous considérons un cas symétrique :

$\{m_1, \dots, m_q\}$  est un ensemble d'entiers  $\geq 0$ , et

$A = (A_{st})_{s,t=1, \dots, q}$ , où  $A_{st}$  est d'ordre  $m_s + m_t$  ; donc A est continu de  $\prod_{s=1}^q H^{m_s + \alpha}(\Omega)$  dans  $\prod_{s=1}^q H^{-m_s + \alpha}(\Omega)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On peut supposer que la suite  $m_1, \dots, m_q$  est décroissante, et nous supposons en plus

$$(5) \quad m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r > m_{r+1} = \dots = m_q = 0,$$

où  $1 \leq r < q$ . Alors nous écrivons

$$(6) \quad A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & M \end{pmatrix},$$

où  $P = (A_{st})_{st \leq r}$ ,  $Q = (A_{st})_{s \leq r, t > r}$ ,  $R = (A_{st})_{s > r, t \leq r}$  et  $M = (A_{st})_{s, t > r}$  (c'est la multiplication par une matrice  $M(x)$ ). Le symbole principal de A est  $\sigma^0(A) = (\sigma^0(A_{st}))_{s,t=1, \dots, q} = (\sigma_{m_s+m_t}^0(A_{st}))_{s,t=1, \dots, q}$ . Rappelons que A est appelé elliptique sur  $\bar{\Omega}$  si la déterminante satisfait à

$$(7) \quad \det \sigma^0(A)(x, \xi) \neq 0, \quad \Psi(x, \xi) \in T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0,$$

et fortement elliptique sur  $\bar{\Omega}$  si

$$(8) \quad \sigma^0(A)(x, \xi) + \sigma^0(A)^*(x, \xi) \text{ est défini positif,} \\ \Psi(x, \xi) \in T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0.$$

**Exemple 1** :  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\{m_1, m_2, m_3\} = \{1, 1, 0\}$ . L'opérateur Navier-Stokes linéarise :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & \partial_x \\ 0 & -\Delta & \partial_y \\ -\partial_x & -\partial_y & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^0(A^{(1)}) = \begin{pmatrix} \xi^2 + \eta^2 & 0 & i\xi \\ 0 & \xi^2 + \eta^2 & i\eta \\ -i\xi & -i\eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici,  $\det \sigma^0(A^{(1)}) = -(\xi^2 + \eta^2)^2 \neq 0$ ,  $\forall (\xi, \eta) \neq (0, 0)$ .  $A^{(1)}$  n'est pas fortement elliptique, mais  $A^{(1)} + c I$  l'est, pour  $c > 2$ .

**Exemple 2** :  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\{m_1, m_2\} = \{1, 0\}$ ,  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -\Delta & a \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \sigma^0(A^{(2)}) = \begin{pmatrix} |\xi|^2 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$A^{(2)}$  est elliptique pour  $b \neq 0$  et fortement elliptique pour  $b > 0$ .

D'autres exemples viennent de la théorie des réacteurs.

Quand  $\Gamma \neq \emptyset$ , la réalisation de la condition de Dirichlet pour un tel opérateur est défini par

$$(9) \quad D(A_\gamma) = \left\{ u \in \prod_{s=1}^q H_0^s(\Omega) \mid Au \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^q) \right\}.$$

Dans l'exemple 2, un calcul très facile montre que le spectre de  $A_\gamma^{(2)}$  consiste en deux suites de valeurs propres,  $\lambda_n^+$  convergeant vers  $+\infty$  et  $\lambda_n^-$  convergeant vers  $b$  ( $\lambda_n^- = b$  pour tout  $n$ , si  $a = 0$ ). Donc

$b \in \text{sp}_{\text{ess}} A_\gamma^{(2)}$ . Pour l'exemple 1 le calcul à la main est déjà plus difficile. Remarquons cependant que

$$\sigma^0(A^{(1)} - \lambda) = \begin{pmatrix} \xi^2 + \eta^2 & 0 & i\xi \\ 0 & \xi^2 + \eta^2 & i\eta \\ -i\xi & -i\eta & -\lambda \end{pmatrix},$$

tel que  $\det \sigma^0(A^{(1)} - \lambda) = (-\lambda - 1)(\xi^2 + \eta^2)^2$ ; donc  $A^{(1)}$  est elliptique si et seulement si  $\lambda \neq -1$ . On peut montrer que  $\gamma$  recouvre  $A$  pour tout  $\lambda \neq -1$  donc  $\text{sp}_{\text{ess}} A_\gamma^{(1)} \subset \{-1\}$ . Nous verrons plus loin que  $-1 \in \text{sp}_{\text{ess}} A_\gamma^{(1)}$ .

Une indication plus générale que le  $\text{sp}_{\text{ess}} A_B$  doit être non vide est que l'injection  $D(A_B) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  n'est pas compacte sous nos hypothèses. Les exemples nous amènent à poser les problèmes :

Problème 1 : Trouver le  $\text{sp}_{\text{ess}}$  (de  $A$  si  $\Gamma = \emptyset$ , de  $A_\Gamma$  et des  $A_B$  si  $\Gamma \neq \emptyset$ ).

Problème 2 : Trouver le spectre discret (les valeurs propres) ; son comportement asymptotique a) à l'infini, b) près du  $\text{sp}_{\text{ess}}$ .

§ 3. CAS D'UNE VARIÉTÉ SANS BORD

Soit  $\bar{\Omega}$  compacte et sans bord. Supposons que  $A$  est fortement elliptique et que  $A + A^*$  est défini positif sur  $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{C}^q)$ . (Il suffit de supposer que  $P$  (voir (6)) est fortement elliptique, et ajouter une suffisamment grande constante à  $A$ .) Alors  $A$  et  $P$  sont inversibles. Le domaine de la réalisation maximale dans  $L^2$  (cf.(4)) est explicité par le lemme suivant :

Lemme 1 : Ecrivons  $\{m_1, \dots, m_q\}$  comme

$$(10) \quad \{m_1, \dots, m_q\} = \underbrace{\{l_1, \dots, l_1\}}_{r_1 \text{ fois}} ; \underbrace{\{l_2, \dots, l_2\}}_{r_2 \text{ fois}} ; \dots ; \underbrace{\{l_{q'}, \dots, l_{q'}\}}_{r_{q'} \text{ fois}},$$

où  $l_1 > l_2 > \dots > l_{q'}$ . (Alors  $\sum_{j=1}^{q'} l_j r_j = q$ ,  $l_{q'-1} = m_r$ ,  $l_{q'} = 0$ , et

$r_{q'} = q - r$ ). En regroupant les rangs et colonnes de  $A$  de cette manière, on obtient par une construction explicite

$$(11) \quad A = \Psi_1 \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & T_2 & \\ 0 & & \dots & T_{q'} \end{pmatrix} \Psi_2,$$

où chaque  $T_j$  est un opérateur pseudo-différentiel classique elliptique  $r_j \times r_j$  - matriciel d'ordre  $2l_j$ , et  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont triangulaires avec des 1 dans la diagonale, des o.p.s.d. d'ordre négatif en dessous de, resp. en dessus de la diagonale, et des zéros ailleurs.



Puisque  $\Psi_2$  est un isomorphisme dans  $L^2(\Omega, \mathfrak{C}^q)$ , il résulte que

$$(12) \quad D(A) = \Psi_2^{-1} \prod_{j=1}^{q'} H^{1j}(\bar{\Omega}, \mathfrak{C}^{rj}) = \Psi_2^{-1} \prod_{s=1}^q H^m_s(\bar{\Omega}),$$

et donc que  $C^\infty(\bar{\Omega}, \mathfrak{C}^q)$  est dense dans  $D(A)$  (donc la réalisation maximale = la réalisation minimale = l'extension de Friedrichs de la réalisation minimale).

Le lemme 1 est essentiellement une généralisation du lemme suivant, où on étudie la décomposition (6).

Lemme 2 : Soit  $S = M - RP^{-1}Q$ , c'est un o.ps.-d. d'ordre zéro. Notons  $\sigma^0(S)(x, \xi) = s_0(x, \xi)$ . Alors

$$(13) \quad A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ R & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P^{-1}Q \\ 0 & S \end{pmatrix} ;$$

et on a pour les symboles principaux, pour tout  $\lambda \in \mathfrak{C}$ ,

$$(14) \quad \sigma^0(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} \sigma^0(P) & \sigma^0(Q) \\ \sigma^0(R) & M - \lambda I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^0(P) & 0 \\ \sigma^0(Q) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^0(P^{-1}Q) \\ 0 & s_0 - \lambda I \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$(15) \quad \det \sigma^0(A - \lambda I) = \det \sigma^0(P) \det(s_0 - \lambda I)$$

en chaque point de  $T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0$ . (Les I et 0 désignent des opérateurs et matrices "identité" ou "zéro" convenables).

La vérification est facile. Remarquons que  $S = T_{q'}$ , de (11).

Introduisons

$$(16) \quad \omega = \bigcup_{(x, \xi) \in T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0} \{ \lambda \in \mathfrak{C} \mid \lambda \text{ est valeur propre de } s_0(x, \xi) \}.$$

Nous allons montrer :

Théorème 1 :

$$(17) \quad \text{sp}_{\text{ess}} A = \text{sp}_{\text{ess}} S = \omega.$$

Démonstration : Il résulte de (13) que  $S$  est inversible et que

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -P^{-1}QS^{-1} \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ -RP^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où les  $C_{ij}$  sont des o.p.d. d'ordre (mixte) négatif, donc des opérateurs compacts. Cela entraîne que  $\text{sp}_{\text{ess}} A = \text{sp}_{\text{ess}} S$ . Montrons alors la deuxième identité dans (17).

Quand  $\lambda \notin \omega$ ,  $\|s_0(x, \xi) - \lambda I\| \geq c > 0$  pour tout  $(x, \xi) \in T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0$  (car  $\bar{\Omega}$  est compacte et  $s_0$  est homogène de degré 0), donc  $S - \lambda$  est elliptique et  $\lambda \in \Phi(S)$ . Inversement, supposons que  $\lambda$  est une valeur propre de  $s_0(x_0, \xi_0)$  et que  $\theta \in \mathbb{C}^q$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ . Alors une certaine suite, utilisée souvent dans la littérature des o.p.s-d. va nous servir comme suite singulière : Considérons une carte locale où  $x_0 = 0$  ; soit  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  avec  $\|v\|_0 = 1$ , et posons

$$(19) \quad u_k(x) = k^{n/2} v(kx) e^{i\langle x, k^2 \xi_0 \rangle} \theta$$

(voir p.ex. [4] p.158-159, ou [5] p.129) ; alors on trouve que cette suite a les propriétés exigées dans la définition 1, pour  $T = S - \lambda$ . Remarquons en plus que  $\text{supp } u_k \rightarrow \{0\}$ , et que  $u_k \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$  ([5]).

Notons la conséquence de (15) et du fait que  $s_0(x, \xi)$  est borné :

Corollaire 1 :  $\text{sp}_{\text{ess}} A = \{\lambda \mid A - \lambda \text{ n'est pas elliptique}\}$ , et  $\text{sp}_{\text{ess}} A$  est borné.

Remarque 1 : La suite singulière (19) pour  $S - \lambda$  sert à construire une suite singulière pour  $A - \lambda$  : Soit  $E$  un parametrix de  $P$ , dont le noyau a son support près de la diagonale, alors  $(\|E Q u_k\|_0^2 + \|u_k\|_0^2)^{-1/2} \{-E Q u_k, u_k\}$  est une suite singulière pour  $A - \lambda$  (utilisant que  $u_k \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}$  et que  $\text{supp } E Q u_k$  est près de  $\text{supp } u_k$ ).

Le problème 1 étant résolu, regardons le problème 2. Pour cela nous supposons en plus que  $A$  est (formellement) auto-adjoint. Vue du corollaire 1 et le fait que  $A$  n'est pas borné, il y a sûrement une suite de valeurs propres  $\lambda_j^+(A)$  tendant vers  $+\infty$ . Pour le trouver, on est amené à considérer le problème de valeur propre non-linéaire:

$$(20) \quad (P - \lambda - Q^*(M - \lambda)^{-1}Q)u = 0.$$

Cependant, pour  $\lambda$  grand, l'effet du terme  $Q^*(M - \lambda)^{-1}Q$  doit être relativement petit.  $P$ , étant d'ordre positif, est à invers compacte, et on peut montrer que

$$(21) \quad \lambda_j(P) - C(P) j^{2m_r/n} = \mathcal{O}(j^{2m_r/n})$$

pour  $j \rightarrow \infty$ , où  $C(P)$  est dérivée de  $\sigma^0(P)$ ; en effet le comportement asymptotique est précisément celui de l'opérateur  $T_{q^1-1}$  (voir (11)); la constante est déterminée dans Seeley [8]. Par une méthode un peu étrange (utilisant la théorie des perturbations) nous avons montré :

$$\text{Théorème 2} : \lambda_j^+(A) - C(P) j^{2m_r/n} = \mathcal{O}(j^{2m_r/n}) \text{ pour } j \rightarrow +\infty.$$

Finalement, quelques mots sur le spectre discret près du spectre essentiel. Quelques études de cette question ont été faites pour  $-\Delta + q$  sur  $\mathbb{R}^n$ , voir [7]. Pour notre problème nous nous bornons aux indications suivantes : si  $S$  a des suites hors du  $\text{sp}_{\text{ess}} S$  convergeant vers  $\text{sp}_{\text{ess}} S$  (qui consiste en un nombre fini d'intervalles dans  $\mathbb{R}$ ), alors  $A$  en aura aussi ; c'est le cas pour l'exemple 2 où  $S = b + a^2 \Delta^{-1}$  (si  $a \neq 0$ ). Mais même si  $S$  n'a pas de suites,  $A$  peut en avoir ; on trouve cela pour l'exemple 1 (en prenant  $\bar{\Omega} = S^1 \times S^1$ , le tore), où  $S = -1$ . Du point de vue systématique, nous avons comme condition suffisante pour l'existence d'une suite décroissante vers  $\max \omega$  (par ex.), que le symbole entier  $s(x, \xi)$  soit assez "plate" dans un point  $(x_0, \xi_0)$  où le maximum s'atteint (i.e. qu'un nombre de dérivées de chaque terme de  $s(x, \xi)$  s'annulent dans

$(x_0, \xi_0)$ ), et où  $\sigma(Q)(x_0, \xi_0) \neq 0$ .

#### § 4. LE CAS D'UNE VARIÉTÉ À BORD

Le problème est compliqué ici par la présence des conditions au bord. Considérons d'abord la réalisation de Dirichlet,  $A_Y$  (9). Nous supposons que  $A$  est fortement elliptique sur  $\bar{\Omega}$ , alors  $A_Y$  est bien l'extension de Friedrichs de l'opérateur minimal. En ajoutant une suffisamment grande constante nous avons que  $P_Y$  et  $A_Y$  sont inversibles (positifs).

Quand on essaie d'imiter le lemme 1, on trouve qu'une certaine version est vraie, dans laquelle il entre des opérateurs beaucoup plus compliqués que les pseudo-différentiels ; ils contiennent des opérateurs de trace, des noyaux de Poisson compliqués et d'autres choses (ils appartiennent à l'algèbre d'opérateurs introduit par Boutet de Monvel [2]). Aussi le lemme 2 aura un analogue plus compliqué, où  $S$  est remplacé par  $S_Y = M - R P_Y^{-1} Q$ . Le  $\text{sp}_{\text{ess}} A_Y$  sera égal à  $\text{sp}_{\text{ess}} S_Y$ , mais celui-là semble difficile à déterminer. Nous avons cependant

**Théorème 3** : Posons  $s_0(x, \xi) = M(x) - [\sigma^0(R) \sigma^0(P)^{-1} \sigma^0(Q)](x, \xi)$  pour tout  $(x, \xi) \in T^*(\bar{\Omega}) \setminus 0$ , et définissons  $\omega$  par (16). Alors

$$(22) \quad \omega \subseteq \text{sp}_{\text{ess}} A_B$$

pour toute réalisation  $A_B$  de  $A$ .

Dans la démonstration, on utilise pour les  $x \in \Omega$  la suite singulière du théorème 1 et remarque 1 ; grâce à la remarque on peut la prendre à support dans  $\Omega$ . Les  $x \in \Gamma$  sont inclus par le fait que  $\text{sp}_{\text{ess}}$  est fermé.

(14) et (15) restent valables ; donc  $\omega$  est toujours l'ensemble des  $\lambda$  où  $A - \lambda$  n'est pas elliptique dans  $\bar{\Omega}$ . Pour améliorer (22), on aura donc à décider s'il peut arriver que  $A - \lambda$  est elliptique et  $B$  recouvre  $A$  mais  $B$  ne recouvre pas  $A - \lambda$  ! (Rappelons que la vérification directe de la condition de recouvrement pour les systèmes est un problème algébrique assez formidable).

Pour la condition de Dirichlet, nous savons, grâce à l'ellipticité forte, que  $\gamma$  recouvre  $A - \lambda$  pour  $|\lambda|$  grand. Donc

Proposition 1 :  $\text{sp}_{\text{ess}} A_\gamma$  est borné.

Dans les exemples 1 et 2 on peut en effet vérifier que  $\text{sp}_{\text{ess}} A_\gamma = \omega$ . Une étude plus proche des méthodes de [1] paraît montrer que ceci est vrai en général.

Pour les autres réalisations  $A_B$ , il manque encore une théorie de "réduction d'un problème aux limites à un problème pseudo-différentiel sur le bord" (un début a été fait par l'auteur dans [3]). On espère trouver, au moins pour les réalisations variationnelles, qu'on a l'identité dans (22).

Quant au spectre discret, nous avons trouvé, pour la réalisation de Dirichlet  $A_\gamma$  d'un opérateur formellement auto-adjoint, une généralisation du théorème 2 correspondant à la version généralisée du lemme 1.

---

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg : Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), 35-92.
  - [2] L. Boutet de Monvel : Acta Math. 126 (1971), 11-51.
  - [3] G. Grubb : Weakly semibounded boundary problems and sesquilinear forms, Preprint n°14 (1972) Copenhagen, à paraître aux Ann. Inst. Fourier.
  - [4] L. Hörmander : Proc. Symp. Pure Math. 10 (1968) 138-183.
  - [5] A. Melin : Ark. f. Mat. 9 (1971) 117-140.
  - [6] E. T. Poulsen : J. Math. Mech. 11 (1962) 725-748.
  - [7] M. Schechter : Spectra of Partial Differential Operators, North-Holland Ed. 1971.
  - [8] R. Seeley : Proc. Symp. Pure Math. 10 (1968), 288-307.
  - [9] F. Wolf : Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959) 211-288.
-

E R R A T A

<u>Pages</u>	<u>Au lieu de :</u>	<u>Lire :</u>
XXVII.1 Ligne 10	$\text{sp } A \setminus \mathfrak{F}(T)$	$\text{sp } T \setminus \mathfrak{F}(T)$
XXVII.4 Ligne 20	$\lambda \neq -1$	$\lambda \neq -1, -\frac{1}{2},$
XXVII.4 Ligne 21	$\{-1\}.$	$\{-1, -\frac{1}{2}\}.$
XXVII.6 Ligne 3	$1_j$	$21_j$
XXVII.6 Ligne 3	$m_s$	$2m_s$
XXVII.8 Ligne 11	$Q^* (M - \lambda)^{-1} Q$	$Q(M - \lambda)^{-1} Q^*$
XXVII.8 Ligne 12	$Q^* (M - \lambda)^{-1} Q$	$Q(M - \lambda)^{-1} Q^*$
XXVII.10 Ligne 11	L'identité dans (22).	$\text{sp}_{\text{ess}} A_B = \text{sp}_{\text{ess}} A_Y$

Remplacer les lignes 4-6, page XXVII.10 ("Dans les exemples 1 et 2 ...") par :

"Dans l'exemple 2 on trouve que  $\text{sp}_{\text{ess}} A_Y = \omega$ , ce qui reste vrai pour une grande classe d'opérateurs où  $P$  est scalaire. Cependant, pour l'exemple 1 on trouve que  $\omega = \{-1\} \neq \{-1, -\frac{1}{2}\} = \text{sp}_{\text{ess}} A_Y$  .