Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^3$ au comportement surprenant (d'après A. Andreotti et C. D. Hill)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. nº 23, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A24_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

UN OPERATEUR DIFFERENTIEL DANS $\mathbb{R}^3$ AU COMPORTEMENT SURPRENANT (D'APRES A. ANDREOTTI ET C. D. HILL)

par S. ALINHAC

Exposé N° XXIII

28 Mars 1973

§ 0. INTRODUCTION

Cet exposé rend compte d'un résultat de Hill [1] relatif aux fonctions régulières sur $\mathbb{R}^3$ appartenant au noyau de l'opérateur $L = \frac{\partial}{\partial t} + i(\frac{\partial}{\partial y_1} + a(t) \frac{\partial}{\partial y_2})$. Des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour que ces fonctions jouissent des propriétés "de Liouville", de "quasi-analyticité" ou satisfassent au "principe du maximum".

La preuve de ces conditions, indiquée en [1] mais développée en [2], [3] et [4] s'effectue selon le schéma suivant :

a) On exhibe un plongement $\zeta : R^3 \to C^2$, d'image M (qui est du reste, ici un tube), tel que $\zeta_* L$ soit l'unique champ antiholomorphe de C^2 tangent à M.

b) On montre ensuite comment toute fonction $f \in C^\infty(M)$ satisfaisant aux équations de Cauchy-Riemann tangentielles $\bar{\partial}_M f = 0$ peut être étendue en une fonction holomorphe dans un tube convenable de C^2.

Cette possibilité résulte des théorèmes généraux de [3] et du théorème de Bochner sur la prolongeabilité des fonctions holomorphes dans un tube de C^n.

Enfin, des propriétés des fonctions holomorphes dans un ouvert de C^2 ou dans C^2 tout entier résultent [4] des propriétés correspondantes pour leurs traces sur M, soit en revenant à R^3, pour les fonctions du noyau de L.

Le premier paragraphe précise les notations et les conditions obtenues par Hill. Les trois autres développent les arguments esquissés en a), b) et c) respectivement.

§ 1. Les coordonnées dans R^3 sont notées (t, y_1, y_2). Soit $a(t) \in C^\infty(R^1)$ une fonction $a : R^1 \to R^1$. On considère l'opérateur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + a(t)\frac{\partial}{\partial y_2}\right)$$

Par "une solution de $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^3$" nous entendons une fonction $u \in C^\infty(R^3)$, à valeurs complexes. Nous utilisons la terminologie suivante : L a la propriété de Liouville si toute solution u bornée de $Lu = 0$ dans R^3 est constante. L a la propriété de quasi-analyticité si toute solution de $Lu = 0$, qui s'annule sur un ouvert non vide, est identiquement nulle. L satisfait au principe du maximum si toute solution de $Lu = 0$ dont le module a, en un point, un maximum relatif faible dans R^3, est constante.

Dans la suite, on pose $\psi(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$, Γ = graphe de ψ. L'enveloppe convexe d'un ensemble A de R^2 est notée ch A. Le théorème est le suivant :

Théorème : (a) L a la propriété de Liouville $\Leftrightarrow$ ch $\Gamma = R^2$.

(b) L a la propriété de quasi-analyticité $\Leftrightarrow$ $a(t)$ n'est pas constante.

(c) L satisfait au principe du maximum $\Leftrightarrow$ $\Gamma \subset$ intérieur de ch

Dans les paragraphes 2), 3) et 4), on ne détaillera que la preuve de b). Celles de a) et de c) s'obtiennent pour l'essentiel de la même façon, en utilisant toutefois un résultat de [4].

§ 2. LE PLONGEMENT ζ

Soit $z = x + iy$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ les coordonnées usuelles dans C^2. On identifie $t = x_1$ et $R^2 = \operatorname{Re} C^2$, en sorte que $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2,\ x_2 = \psi(x_1)\}$. Pour tout ensemble $B \subset R^2$, $\tau B = \{z \in C^2, x \in B\}$ désigne le tube de C^2 de base B.

Les fonctions $z_1 = t + iy_1$, $z_2 = \psi(t) + iy_2$ forment un système maximal de coordonnées caractéristiques complexes fonctionnellement indépendantes, i.e.

$Lz_1 = 0$, $Lz_2 = 0$, dz_1 et dz_2 linéairement indépendantes.

Elles fournissent un plongement $\zeta : R^3 \to C^2$ donné par $(t, y_1, y_2) \mapsto (z_1, z_2)$ dont l'image est $\tau\,\Gamma = M$. De plus, $(\zeta_* L)(f)(z_1, z_2) = 2\,\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} + 2a(t)\,\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2}$.

D'une manière plus générale, il est expliqué en [2] comment on peut, s'il existe suffisamment de coordonnées caractéristiques complexes fonctionnellement indépendantes, plonger R^m dans C^n en sorte que le système

$$i = 1, \ldots, l\{ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \qquad .$$

à coefficients complexes sur R^m se transforme en le système

$$\begin{cases} \bar\partial_N \tilde{u} = 0 \\ d_{R^{l-r}} \tilde{u} = 0 \end{cases}$$

N étant une sous-variété convenable telle qu'un voisinage d'un point de R^m soit difféomorphe à un ouvert de $N \times R^{l-r}$.

§ 3. UNE SOLUTION GLOBALE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR $\bar\partial$

Envisageons d'une façon plus générale qu'avec $M = \tau\Gamma$ et C^2, la situation d'une variété C^∞ réelle orientée S de dim 2n-1, à deux côtés $\oplus$ et $\ominus$ dans un ouvert connexe $\mathfrak{U}$ d'une variété analytique complexe V de dim n. Il existe alors une fonction $\rho \in C^\infty(\mathfrak{U})$, réelle, telle que si $\mathfrak{U}^+$ et $\mathfrak{U}^-$ désignent les parties de $\mathfrak{U}$ du côté $\oplus$ et du côté $\ominus$ de S respectivement, on ait

$$S = \{z \in \mathfrak{U},\ \rho(z) = 0\},\quad \mathfrak{U}^+ = \{z \in \mathfrak{U},\ \rho(z) \geq 0\},$$

$$\mathfrak{U}^- = \{z \in \mathfrak{U}, \rho(z) \leq 0\}.$$

a) L'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel

L'opérateur $\bar\partial$ (cf.[5]) est celui qui assigne à la (p,q) forme u dans $\mathfrak{U}$ $(u \in C^\infty_{(p,q)}(\mathfrak{U}))$, s'écrivant localement

$$u = \sum\nolimits'_{|I|=p,\,|J|=q} u_{I,J}\, dz^I \wedge \overline{dz^J}\ ,$$

(où Σ' indique la sommation sur les multi indices strictement croissants) la (p,q+1) forme dans $\mathfrak{U}$

$$\bar\partial u = \sum_k \sum\nolimits'_{|I|=p,\,|J|=q} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar z_k}\, d\bar z_k \wedge dz^I \wedge \overline{dz^J}\ .$$

Définissons $\bar\partial_S$: si $J_{p,q}$ désigne le sous-module des (p,q)-formes sur $\mathfrak{U}$ s'annulant sur S, l'espace des (p,q)-formes sur S s'identifie à $C^\infty_{p,q}(\mathfrak{U})/J_{p,q}$

Malheureusement, $\bar\partial J_{p,q} \not\subset J_{p,q+1}$, en sorte qu'on ne peut "passer $\bar\partial$ au quotient" pour définir ∂_S.

On introduit donc $\mathfrak{J}_{p,q}(\mathfrak{U}) = \{u \in C^\infty_{p,q}(\mathfrak{U}),\ \exists\ \alpha \in C^\infty_{p,q}(\mathfrak{U}),\ \exists\ \beta \in C^\infty_{p,q-1}(\mathfrak{U})$, tels que $u = \rho\,\alpha + \bar\partial\rho \wedge \beta\}$; $\mathfrak{J}_{p,q}(\mathfrak{U})$ est appelé "idéal engendré par ρ et $\bar\partial\rho$, et $\bar\partial\,\mathfrak{J}_{p,q} \subset \mathfrak{J}_{p,q+1}$, en sorte qu'en posant $Q_{p,q}(\mathfrak{U}) = C^\infty_{p,q}(\mathfrak{U})/\mathfrak{J}_{p,q}(\mathfrak{U})$, on peut définir $\bar\partial_S$ comme l'opérateur qui rend commutatif le diagramme D_1

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathfrak{J}_{p,0}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "\bar\partial"] \arrow[d, "i"] & \mathfrak{J}_{p,1}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "\bar\partial"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^{p,0}(\mathfrak{U}) \arrow[r] & C^\infty_{p,0}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "\bar\partial"] \arrow[d] & C^\infty_{p,1}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "\bar\partial"] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^{p,0}(S) \arrow[r] & Q_{p,0}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "\bar\partial_S"] \arrow[d] & Q_{p,1}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "\bar\partial_S"] \arrow[d] & \cdots \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Par exemple, pour $f \in C^\infty_{0,0}(S) = C^\infty(S)$, $\bar\partial_S f = 0$ signifie que, pour une extension $\tilde f \in C^\infty(\mathfrak{U})$ quelconque de f, $\bar\partial \tilde f \in \mathfrak{J}_{0,1}(\mathfrak{U})$, etc...

b) <u>Les groupes de cohomologie</u>

On désigne par $H^{p,q}(\mathfrak{U},\mathfrak{J})$ les groupes de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \mathfrak{J}_{p,0}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\bar\partial} \mathfrak{J}_{p,1}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\bar\partial} \mathfrak{J}_{p,2}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \cdots$$

par $H^{p,q}(\mathfrak{U})$ ceux du complexe

$$0 \longrightarrow C^\infty_{p,0}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty_{p,1}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty_{p,2}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \cdots$$

et par $H^{p,q}(\mathfrak{A})$ ceux du complexe

$$0 \longrightarrow Q_{p,0}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\bar{\partial}_S} Q_{p,1}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\bar{\partial}_S} Q_{p,2}(\mathfrak{A}) \longrightarrow \cdots$$

en sorte que $H^{p,q}(\mathfrak{A})$ est la cohomologie usuelle (cf. [6]) relative à la résolution du faisceau $\mathcal{O}^p$ (des germes de p-formes holomorphes dans $\mathfrak{A}$) par les faisceaux $C^\infty_{p,q}$: $H^{p,q}(\mathfrak{A}) = H^q(\mathfrak{A},\mathcal{O}^p)$. Il découle du diagramme D_1 et du lemme de cohomologie dit "du serpent" que la suite

$$0 \longrightarrow H^{p,0}(\mathfrak{A}^-) \xrightarrow{r_o} H^{p,0}(S) \xrightarrow{\bar{\partial}_o} H^{p,1}(\mathfrak{A}^-,\mathfrak{J}) \xrightarrow{i_1} H^{p,1}(\mathfrak{A}^-) \xrightarrow{r_1} \cdots$$

$$\longrightarrow H^{p,q}(\mathfrak{A}^-,\mathfrak{J}) \xrightarrow{i_q} H^{p,q}(\mathfrak{A}^-) \xrightarrow{r_q} H^{p,q}(S) \xrightarrow{\bar{\partial}_q} H^{p,q+1}(\mathfrak{A}^-,\mathfrak{J}) \longrightarrow \cdots$$

est exacte.

Ici, i_q est induite par l'injection de $\mathfrak{J}_{p,q}(\mathfrak{A}^-)$ dans $C^\infty_{p,q}(\mathfrak{A}^-)$, r_q par la restriction de $C^\infty_{p,q}(\mathfrak{A}^-)$ à $C^\infty_{p,q}(S)$, et $\bar{\partial}_q$ est l'application qui à $u \in H^{p,q}(S)$, de représentant $\tilde{u} \in C^\infty_{p,q}(\mathfrak{A}^-)$, fait correspondre la classe dans $H^{p,q+1}(\mathfrak{A}^-, \mathfrak{J})$ de $\bar{\partial}\tilde{u}$ (c'est le morphisme usuel "de cobord").

Dans le paragraphe suivant, on montre l'exactitude d'une suite analogue à celle-là, mais faisant jouer cette fois le comportement de $\mathfrak{A}^+$ par rapport à $\mathfrak{A}$. Pour construire cette suite, un lemme sur les structures de $H^{p,q}(S)$ et $H^{p,q}(\mathfrak{A},\mathfrak{J})$ est nécessaire :

<u>Définition</u> : Un élément $\check{\tilde{u}} \in C^\infty_{p,q}(\mathfrak{A})$, tel que $\bar{\partial}u \in \mathfrak{J}_{p,q+1}(\mathfrak{A})$ est dit "représentant distingué" d'un élément $u \in H^{p,q}(S)$ si

$$\bar{\partial}\check{\tilde{u}}|_S = 0^\infty \qquad \text{(on note } v|_S = 0^\infty \text{ le fait que v}$$

a ses coefficients plats sur S).

Un élément $\check{\tilde{u}} \in \mathfrak{J}_{p,q}(\mathfrak{A})$, tel que $\bar{\partial}\check{\tilde{u}} = 0$, est dit "représentant distingué" d'un élément $u \in H^{p,q}(\mathfrak{A},\mathfrak{J})$, si

$$\tilde{u}|_S = 0^\infty.$$

<u>Lemme</u> : (cf. [3], § 2.) : De tels représentants existent toujours. Cette propriété repose sur le fait qu'on peut construire une forme $f \in C^{\infty}_{p,q}(\mathfrak{U})$ telle que $\frac{\partial f}{\partial \rho^{k}}\Big|_{S} = h^{(k)}$, les $h^{(h)}$ formant une suite donnée quelconque de (p,q)-formes sur S.

c) <u>Un diagramme relatif au problème de Cauchy de S dans $\mathfrak{U}^{-}$</u>.

Si dans le diagramme D_1, on remplace l'idéal $\mathfrak{J}_{p,q}(\mathfrak{U})$ par l'idéal des $u \in C^{\infty}_{p,q}(\mathfrak{U})$, $u \equiv 0$ sur $\mathfrak{U}^{+}$, on obtient ensuite (heuristiquement en procédant comme en b) la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{p,0}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{r_o} H^{p,0}(\mathfrak{U}^{+}) \xrightarrow{\bar{\partial}'_o} H^{p,1}(\mathfrak{U}^{-},\mathfrak{J}) \xrightarrow{i'_1} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^{p,q}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{r_q} H^{p,q}(\mathfrak{U}^{+}) \xrightarrow{\bar{\partial}'_q} H^{p,q+1}(\mathfrak{U}^{-},\mathfrak{J}) \xrightarrow{i'_{q+1}} H^{p,q+1}(\mathfrak{U}) \longrightarrow \cdots$$

Les flèches sont définies comme suit :

r_q est induite par la restriction de $\mathfrak{U}$ à $\mathfrak{U}^{+}$.

i'_q est définie en prolongeant par 0 dans $\mathfrak{U}^{+}$ un représentant distingué d'un $u \in H^{p,q}(\mathfrak{U}^{-},\mathfrak{J})$.

$\bar{\partial}'_q$ est induite par l'application qui, à l'extension $\tilde{u} \in C^{\infty}_{q,p}(\mathfrak{U})$ d'un $u \in C^{\infty}_{p,q}(\mathfrak{U}^{+})$ tel que $\bar{\partial}u = 0$, , fait correspondre $\bar{\partial}\tilde{u}$.

L'exactitude de la suite se vérifie "à la main" sans difficulté. Enfin, il est immédiat que le diagramme D_2

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{p,0}(\mathfrak{U}) \arrow[r] \arrow[d, "r_o"] & H^{p,0}(\mathfrak{U}^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "r_o"] & H^{p,1}(\mathfrak{U}^{-},\mathfrak{J}) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \cdots \arrow[r] & H^{p,q}(\mathfrak{U}) \arrow[r] \arrow[d, "r_o"] & H^{p,q}(\mathfrak{U}^{+}) \arrow[r] \arrow[d, "r_o"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^{p,0}(\mathfrak{U}^{-}) \arrow[r] & H^{p,0}(S) \arrow[r] & H^{p,1}(\mathfrak{U}^{-},\mathfrak{J}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & H^{p,q}(\mathfrak{U}^{-}) \arrow[r] & H^{p,q}(S) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

obtenu en superposant les deux suites exactes à l'aide des flèches évidentes de restriction ou d'identité, est commutatif. On dira qu'on a existence (resp. unicité) pour le problème de Cauchy pour $\bar{\partial}$ de S dans $\mathfrak{U}^{-}$ si r_q est surjectif (resp. injectif). On montre aisément que dans cette formulation du problème de Cauchy en termes de classes, rien n'est perdu par rapport à la formulation en termes de (p,q)-formes, si ce n'est que l'unicité doit s'entendre à un bord près. Le diagramme D_2 permet de ramener les questions de surjectivité ou d'injectivité de r_q à des questions de nullité ou de non nullité de certains groupes de cohomologie.

Citons ici les résultats de [3] concernant le cas où $\mathfrak{U}$ est de Stein (i.e. $H^{p,q}(\mathfrak{U}) = 0$ pour $q > 1$) et $n > 1$:

(i) Si $q = 0$, on a existence et unicité si et seulement si

$$H^{p,0}(\mathfrak{U}^+)/H^{p,0}(\mathfrak{U}) = 0$$

(ii) si $q \geq 1$, on a existence et unicité si et seulement si

$$H^{p,q}(\mathfrak{U}^+) = 0$$

Notons enfin que la possibilité de résoudre le problème de Cauchy pour $\mathfrak{U}$ équivaut à celles de le résoudre séparément pour $\mathfrak{U}^+$ et $\mathfrak{U}^-$.

d) Dans le cas particulier de $M = \tau\Gamma$ et de C^2, supposons $\alpha(t)$ non constante. Cela implique que Γ contient au moins trois points non colinéaires, donc que $\mathfrak{U}_o$ = intérieur de ch Γ est un ouvert (convexe) non vide. Notons V^+ et V^- les fermés de R^2 définis par $V^+ = \{(x_1,x_2), x_2 \geq \psi(x_1)\}$ et $V^- = \{(x_1,x_2), x_2 \leq \psi(x_1)\}$.

En appliquant un argument du type indiqué en c) avec, selon les situations, $\mathfrak{U} = C^2$, $\mathfrak{U}^+ = \tau V^+$, $\mathfrak{U}^- = \tau V^-$ ou $\mathfrak{U} = \tau\mathfrak{U}_o$, $\mathfrak{U}^+ = \tau(\mathfrak{U}_o \cap V^+)$, $\mathfrak{U}^- = \tau(\mathfrak{U}_o \cap V^-)$ (la condition i) du théorème cité en c) étant satisfaite, pour $p = 0$, de chaque côté $\oplus$ et $\ominus$ grâce au théorème des tubes de Bochner), on prouve que toute fonction u donnée sur $M = \tau\Gamma$ vérifiant $\bar{\partial}_M u = 0$ peut s'étendre en une fonction holomorphe $\tilde{u}$ dans $\tau\mathfrak{U}_o$.

§ 4. Soit u une solution de $Lu = 0$ dans R^3. $v = u \circ \zeta^{-1}$ est alors une fonction régulière sur M vérifiant

$$\bar{\partial}_M v = 0, \quad \text{d'après 2).}$$

On peut étendre, d'après 3) d), en une fonction holomorphe $\tilde{v}$ dans $\tau\mathfrak{U}_o$. Si u s'annule dans un ouvert de R^3, v s'annule dans un ouvert de M, et $\tilde{v}$ s'annule dans un ouvert de $\tau\mathfrak{U}_o$, donc dans tout $\tau\mathfrak{U}_o$ qui est connexe à cause de la propriété de "quasi-analyticité" des fonctions holomorphes. D'où finalement $v \equiv 0$ et $u \equiv 0$.

<u>Remarque importante</u> : La possibilité offerte par le théorème cité en 3) c) de résoudre globalement dans $\mathfrak{U}^-$ le problème de Cauchy avec données sur S, est essentielle dans la preuve. En effet, la forme de Lévi $\mathcal{L}(\rho)$ en un point de base $(x_1, \psi(x_1))$ de M vaut sur un vecteur $w = (w_1, w_2)$, $\mathcal{L}(\rho) = -\frac{1}{4} a'(x_1)|w_1|^2$. Si par exemple a, sans être globalement constante l'était sur $[0,1]$, la forme de Lévi serait identiquement nulle sur la portion (plane) de M correspondant (par ζ) à la bande $0 < t < 1$ de $\mathbb{R}^3$. L'utilisation du théorème usuel local pour $\bar{\partial}$ (cf.[5]) ne permettrait pas alors d'exploiter l'annulation de u dans un ouvert de R^3 si cet ouvert était contenu dans la bande $0 < t < 1$.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] C. D. Hill : A partial differential operator in R^3 with strange behaviour, Indiana Univ. Math. J., Vol. 22, N°5, 1972.

[2] A. Andreotti, C. D. Hill : Complex characteristic coordinates and tangential Cauchy-Riemann equations, Ann. Scuola Normal. Sup. Pisa 26 (1972).

[3] A. Andreotti, C. D. Hill : "E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem, Part I : reduction to vanishing theorems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26 (1972).

[4] J. Carlson, C. D. Hill : On the maximum modulus principle for the tangential Cauchy-Riemann equations (to appear).

[5] L. Hörmander : An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[6] Kodaira, Morrow : Complex Manifolds, Holt, Rinehart, Winston, Inc.