

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. MÉTIVIER

Théorie spectrale d'opérateurs elliptiques sur des ouverts irréguliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 21,
p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973___A22_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEORIE SPECTRALE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES
SUR DES OUVERTS IRREGULIERS

par G. METIVIER

Exposé N° XXI

14 Mars 1973

§ 1. INTRODUCTION

Si Ω est un ouvert de \mathbf{R}^m , on note $H^k(\Omega)$, l'espace de Sobolev habituel d'ordre k sur Ω , et $H_0^k(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert borné "régulier" de \mathbf{R}^m . Soit \mathcal{A} , un opérateur différentiel d'ordre $2k$, uniformément fortement elliptique sur Ω , de partie principale $A'(x,D)$. Si A est un opérateur non borné, de domaine $D(A)$, dans $L^2(\Omega)$, associé à \mathcal{A} , positif autoadjoint, avec $H_0^{2k}(\Omega) \subset D(A) \subset H^{2k}(\Omega)$, alors ([2], [4]) le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda)$, nombre de valeurs propres de A inférieures à λ , est donné par :

$$(1) \quad N(\lambda) \sim \mu(\Omega) \cdot \lambda^{m/2k} \quad (\lambda \rightarrow +\infty).$$

où μ est la mesure de densité $\mu'(x) = (2\pi)^{-m} \cdot \text{mes} \{ \xi / 0 < A'(x, \xi) < 1 \}$.

On utilisera ce résultat, dans la cas où Ω est une variété à bord de classe C^∞ , et où les coefficients de \mathcal{A} sont dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Le problème est d'étudier la fonction $N(\lambda)$, quand l'ouvert Ω est irrégulier ; on généralisera la formule (1) dans certains cas ; on donnera aussi des exemples d'ouverts de \mathbf{R}^2 , tels que pour l'opérateur $-\Delta + 1$ avec des "conditions de Neumann", $N(\lambda)$ se comporte comme λ^β avec $\beta > 1$.

Si l'ouvert Ω est irrégulier, la définition des conditions aux limites pose des problèmes. On se placera donc dans une situation variationnelle, $(V, L^2(\Omega), a)$, V étant un espace de Hilbert inclus et dense dans $L^2(\Omega)$, et a une forme intégrodifférentielle, hermitienne continue et coercive sur V (en abrégé, h.c.c. sur V). D'autre part, si on a pu définir un opérateur A , de domaine $D(A)$, positif autoadjoint, on se ramène à une situation variationnelle en considérant l'opérateur $A^2 + 1$ défini par $(D(A), L^2(\Omega), a)$ avec :

$$a(u, v) = (Au, Av)_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{L^2(\Omega)}.$$

La méthode utilisée consiste à démontrer d'abord, sous des hypothèses assez générales, le théorème de décomposition suivant :

$$N(\lambda) \sim B(\lambda) + \mu(\Omega) \cdot \lambda^{m/2k}$$

en considérant $\mu(\Omega) \cdot \lambda^{m/2k}$ comme un terme du "à l'intérieur" et $B(\lambda)$ un terme du "au bord". On montre ensuite, que sous certaines conditions, $B(\lambda) = o(\lambda^{m/2k})$, d'où l'on déduit la formule (1). On étudie en fait $B(\lambda)$ en établissant des majorations de n -diamètres, sur des voisinages de $\partial\Omega$.

On établit par exemple le résultat suivant :

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^m , de mesure finie [resp un ouvert borné de \mathbf{R}^m , vérifiant une condition (C)], alors pour toute forme a , h.c.c. sur $H_0^k(\Omega)$ [resp $H^k(\Omega)$] :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq k}} a_{\alpha\beta} D^{\alpha} u D^{\beta} \bar{v} \cdot dx$$

telle que $\begin{cases} a_{\alpha\beta} \in C^0(\Omega) & \text{si } |\alpha| + |\beta| = 2k \\ a_{\alpha\beta} \in L_{loc}^{\infty}(\Omega) & \text{si } |\alpha| + |\beta| < 2k. \end{cases}$

on a :

$$N(\lambda) \sim \mu_a(\Omega) \cdot \lambda^{m/2k}$$

où

$$\mu_a(\Omega) = (2\pi)^{-m} \int_{\Omega} \text{mes} \left\{ \xi / \sum_{|\alpha|=|\beta|=k} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} < 1 \right\} \cdot dx.$$

Remarquons que les $a_{\alpha\beta}$ ne sont pas supposés bornés sur Ω . On conclut donc, pour des opérateurs du type $-\Delta + \frac{1}{2} \frac{d}{d}$ avec une condition de Dirichlet, Ω étant un ouvert de mesure finie, d la distance au bord.

La condition (C) est vérifiée si Ω possède la propriété du cône, et si Ω est une "pointe" de la forme :

$$\Omega = \{x = (x_1, x') \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{m-1} / x_1 \in]0, a[, |x'| < \varphi(x_1)\}$$

où φ est une fonction strictement positive, croissante, sci, quelconque, en particulier, aussi plate que l'on veut à l'origine.

On utilise la notion de n-ième diamètre ([5]).

Définition : Soit E un espace vectoriel, et soit p une semi-norme sur E . Si B est une partie de E , on appelle n-diamètre de B dans E pour la semi-norme p , le nombre :

$$d_n^E(B, p) = \inf_{E_n \in \mathcal{G}_n(E)} \sup_{x \in B} \inf_{y \in E_n} p(x-y)$$

où $\mathcal{G}_n(E)$ désigne l'ensemble des sous espaces de dimension n de E .

Si E est un espace normé, on note : $d_n(B, E) = d_n^E(B, \|\cdot\|_E)$.

On utilisera cette notion, dans le cas où $E = L^2(\Omega)$ et où $p = p_\omega = (\int_\omega |\cdot|^2 dx)^{1/2}$ si $\omega \subset \Omega$. On pose alors :

$$d_n^E(B, p_\omega) = d_n(B, L^2(\omega))$$

Considérons la situation variationnelle (V, H, a) , l'injection de V dans H étant compact, et a une forme h.c.c. sur V . Notons A l'opérateur de domaine $D(A)$ associé à cette situation. Le spectre de A est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j , réelles, positives, tendant vers $+\infty$. On répète ces valeurs propres conformément à leur multiplicité, et on ordonne la suite λ_j de manière qu'elle soit croissante. Il existe une base hilbertienne (φ_j) de H , constituée de vecteurs propres de A , formant un système orthogonal dans V , pour a , telle que :

$$V = \{u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \varphi_j / \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |u_j|^2 = a(u, u) < +\infty\}.$$

Posant $K_a = \{u \in V / a(u, u) \leq 1\}$, on en déduit :

$$(2) \quad d_n(K_a, H) = (\lambda_{n+1})^{-1/2}$$

ce qui n'est autre que la formule de Courant-Fischer([1],[6]).

On introduit donc la notation suivante : si K est une partie bornée, d'un espace de Hilbert H on pose :

$$N(\lambda; K, H) = \sum_{\lambda d_n^2(K, H) \geq 1} 1$$

(On omettra parfois le H).

$N(\lambda, K, H)$ est fini pour tout réel λ , si et seulement si K est relativement compact dans H .

Revenant à la situation variationnelle on voit que $N(\lambda, K_a, H)$ est le nombre de valeurs propres de A , inférieures à λ .

§ 2. DECOMPOSITION DE $N(\lambda)$

Soit Ω , un ouvert quelconque de \mathbf{R}^m . On suppose donné un espace de Hilbert V , inclus et dense dans $L^2(\Omega)$, tel que :

$$H_{\text{comp}}^k(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H_{\text{loc}}^k(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

On note $\mathcal{A}(V)$ l'ensemble des formes integrodifférentielles a , h.c.c. sur V

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq k}} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u D^{\beta} \bar{v} \, dx$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_{\alpha\beta} \in C^0(\Omega) & \text{si } |\alpha| = |\beta| = k \\ a_{\alpha\beta} \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\Omega) & \text{si } |\alpha| + |\beta| < 2k . \end{cases}$$

Si U est un ouvert inclus dans Ω , on définit :

$$V(U) = \{u \in V / u(x) = 0 \text{ pp } x \in \Omega - U\}.$$

Il est clair que $V(U)$ est un sous espace fermé de V , et que si U est régulier et relativement compact dans Ω , $V(U) = H_0^k(U)$.

Pour a dans $\mathcal{A}(V)$ on pose : $K_a(U) = \{u \in V(U) / a(u,u) \leq 1\}$

Pour s réel > 0 , on définit :

$$N_s^+(U, a) = \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-s} N(\lambda, K_a(U), L^2(U)).$$

$$N_s^-(U, a) = \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-s} N(\lambda, K_a(U), L^2(U)).$$

et enfin :

$$B_s^+(a) = \inf_{U \subset \subset \Omega} N_s^+(\Omega - \bar{U}, a).$$

On note μ_a la mesure de densité $\mu_a'(x)$:

$$\mu_a'(x) = (2\pi)^{-m} \text{mes} \left\{ \xi / \sum_{|\alpha| = |\beta| = k} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} < 1 \right\}.$$

Avec ces notations on peut énoncer :

Théorème : i) L'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte, si et seulement si, il existe $\Omega_1 \subset \subset \Omega$, tel que l'injection de $V(\Omega - \bar{\Omega}_1)$ dans $L^2(\Omega)$ soit compacte.

ii) Si l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors :

$$\begin{aligned} N_s^+(\Omega, a) &= +\infty && \text{si } s < m/2k \\ N_s^+(\Omega, a) &= B_s^+(a) + \mu_a(\Omega) && s = m/2k \\ N_s^+(\Omega, a) &= B_s^+(a) && s > m/2k \end{aligned}$$

Remarque : On peut remplacer les fonctions λ^s considérées par des fonctions "ne croissant pas trop vite", $\lambda^s (\text{Log } \lambda)^{s'}$ par exemple.

Le point i) est facile. On suppose donc que l'injection de V dans $L^2(\Omega)$ est compacte. Soit Ω_1 un ouvert régulier (variété à bord de classe C^∞) tel que $\Omega_1 \subset \subset \Omega$; soit $\Omega_2 = \Omega - \bar{\Omega}_1$. On déduit facilement ii) du fait que $N_s^+(U, a)$ est une fonction croissante de U , et des relations :

$$(3) \quad N(\lambda, K_a(\Omega_1), L^2(\Omega_1)) \sim \lambda^{m/2k} \mu_a(\Omega_1)$$

$$(4) \quad N_S^\pm(\Omega, a) = N_S^\pm(\Omega_1, a) + N_S^\pm(\Omega_2, a).$$

Soit Ω' tel que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$. En approchant à ε -près la forme a par des formes a_ε de $\mathcal{A}(V)$, à coefficients C^∞ sur Ω' , uniformément sur $K_a(\Omega)$, on se limite à prouver (3) et (4) dans le cas où les coefficients de a sont C^∞ sur Ω' . Dans ce cas (3) est connu, ainsi qu'on l'a signalé dans l'introduction. Pour démontrer (4) on pose :

$$V_0 = V(\Omega_1) \oplus V(\Omega_2); K_0 = \{u \in V_0 / a(u, u) \leq 1\}.$$

V_1 sera l'orthogonal de V_0 dans V , pour a et K_1 la boule unité de V_1 pour a .

Les espaces $V(\Omega_1)$ et $V(\Omega_2)$ étant orthogonaux pour a et pour le produit scalaire $L^2(\Omega)$ on a :

$$N(\lambda, K_0) = N(\lambda, K_a(\Omega_1)) + N(\lambda, K_a(\Omega_2)).$$

Comme d'autre part $K_0 \subset K_a(\Omega_1)$ on a, compte tenu de (3)

$$(5) \quad \begin{cases} N_S^+(\Omega_1, a) + N_S^+(\Omega_2, a) = \limsup \lambda^{-s} N(\lambda, K_0) \leq N_S^+(\Omega, a) \\ N_S^-(\Omega_1, a) + N_S^-(\Omega_2, a) = \liminf \lambda^{-s} N(\lambda, K_0) \leq N_S^-(\Omega, a). \end{cases}$$

Les espaces V_0 et V_1 étant orthogonaux pour a , on montre que :

$$d_{n_0 + n_1}^2(K_a(\Omega), L^2(\Omega)) \leq d_{n_0}^2(K_0, L^2(\Omega)) + d_{n_1}^2(K_1, L^2(\Omega))$$

et par suite :

$$(6) \quad N(\lambda, K_a(\Omega)) \leq N\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \lambda, K_0\right) + N(\gamma \lambda, K_1) \quad (\gamma > 1)$$

On achèvera donc la démonstration si l'on prouve que $N(\lambda, K_1) = o(\lambda^{m/2k})$. En effet on tire de (6) :

$$N_S^+(\lambda, K_a(\Omega)) \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^s \limsup \inf N(\lambda, K_0) \cdot \lambda^{-s}$$

Et en faisant tendre γ vers $+\infty$, on obtient les inégalités inverses de (5).

On achève donc la démonstration en prouvant :

Lemme 1 : Avec les notations précédentes on a : $N(\lambda, K_1) = O(\lambda^{\frac{m-1}{2k}})$.
Soit $\Gamma = \partial\Omega_1$. On définit les espaces X et Y :

$$X = \prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-1/2}(\Gamma), \quad Y = \prod_{j=0}^{k-1} H^{-j-1/2}(\Gamma).$$

Soit γ l'opérateur de trace de $H^k(\Omega_1)$ sur X, ($\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_{k-1}$). Soit γ' l'opérateur de trace de $H^k(\Omega_2 \cap \Omega')$ sur Y ($\gamma' = \gamma'_0 \dots \gamma'_{k-1}$). Pour u dans V on a : $\gamma_j u = (-1)^j \gamma'_j u$.

On démontre le lemme en construisant un opérateur de relèvement de trace R, de X sur V_1 , et de Y dans $L^2(\Omega)$, et en utilisant les résultats d'El Kolli, qui montrent que :

$$d_n(X, Y) = O(n^{-\frac{m-1}{2k}}). \quad ([3])$$

Soit \mathcal{A} l'opérateur différentiel, à coefficients C^∞ sur Ω :

$$\mathcal{A} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq k}} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha\beta} D^\alpha. \quad \text{On note encore :}$$

$$a_1(u, v) = \int_{\Omega_1} \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta \bar{v} \, dx$$

$$a_2(u, v) = \int_{\Omega_2} \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta \bar{v} \, dx$$

On sait qu'il existe des opérateurs B_j , et B'_j , d'ordre inférieur à $2k - j - 1$ tels qu'on ait :

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \quad a_1(u, v) - (\mathcal{A}u, v)_{L^2(\Omega_1)} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma} B_j u \gamma_j \bar{v} \, d\sigma$$

$$\forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), v \in \mathcal{D}(\Omega') \quad a_2(u, v) - (\mathcal{A}u, v)_{L^2(\Omega_2)} = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\Gamma} B'_j u \gamma'_j \bar{v} \, d\sigma$$

Soit $(A_0, D(A_0))$ l'opérateur associé à la situation variationnelle $(V_0, L^2(\Omega), a)$. A_0 est un isomorphisme de $D(A_0)$ sur $L^2(\Omega)$. On a de manière évidente : pour u dans $D(A_0)$, $A_0 u = \mathcal{A}u$ sur $\Omega' - \Gamma$. Les théorèmes de régularité montrent que si u est dans $D(A_0)$, $u \in H^{2k} \cap H_0^k(\Omega_1)$, $u \in H^{2k}(\Omega'' \cap \Omega_2)$, si $\Omega_1 \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega'$. On note τ_j l'opérateur $\gamma_0 \cdot B_j$ et on remarque que τ_j est continu de $D(A_0)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$. De même $\tau_j' = \gamma_0 \cdot B_j'$ est continu de $D(A_0)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$.

On en déduit les formules de Green :

$$u \in D(A_0), v \in V : a_1(u, v) - (A_0 u, v)_{L^2(\Omega_1)} = \sum_{j=1}^{k-1} (\tau_j u, \gamma_j v)_{L^2(\Gamma)}$$

$$u \in D(A_0), v \in H_0^k(\Omega'') : a_2(u, v) - (A_0 u, v)_{L^2(\Omega_2)} = \sum_{j=1}^{k-1} (\tau_j' u, \gamma_j' v)_{L^2(\Gamma)}$$

Soit maintenant $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, une partition de l'unité telle que $\varphi_1 = 1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega_1}$

$$\varphi_2 = 1 \text{ sur } \Omega - \Omega''.$$

Pour v dans V , on a $v = \varphi_1 v + \varphi_2 v$, avec $\varphi_1 v \in H_0^k(\Omega'')$, et $\varphi_2 v \in V(\Omega_2) \subset V_0$. Pour u dans $D(A_0)$ on a donc :

$$a(u, \varphi_2 v) = (A_0 u, \varphi_2 v)$$

Et par suite pour v dans V :

$$a_2(u, v) - (A_0 u, v)_{L^2(\Omega_2)} = \sum_{j=1}^{k-1} (\tau_j' u, \gamma_j' v)_{L^2(\Gamma)}$$

Posant $T_j = \tau_j + (-1)^j \tau_j'$, on établit donc, la formule de Green

$$\forall u \in D(A_0), \forall v \in V : a(u, v) - (A_0 u, v) = \sum_{j=1}^{k-1} (T_j u, \gamma_j v)_{L^2(\Gamma)}$$

T_j étant continu de $D(A_0)$ dans $H^{j+1/2}(\Gamma)$.

Soit $g \in Y$, $g = (g_0, \dots, g_{k-1})$. On définit Rg par :

$$\forall u \in D(A_0) \quad (A_0 u, Rg)_{L^2(\Omega)} = - \sum_{j=1}^{k-1} \langle T_j u, g_j \rangle_{H^{j+1/2}(\Gamma) \times H^{-j-1/2}(\Gamma)}$$

A_0 étant un isomorphisme de $D(A_0)$ sur $L^2(\Omega)$, il est clair que Rg est bien défini, et que R est linéaire continu de Y dans $L^2(\Omega)$. On a : $Rg = {}^t A_0^{-1} Lg$ où Lg est l'élément du dual de $D(A_0)$ défini par

$$Lg(u) = - \sum_{j=1}^{k-1} \langle T_j u, g_j \rangle.$$

Soit d'autre part, un relèvement de trace S , quelconque de X dans $H_0^k(\Omega') \subset V$. Soit P la projection de V sur V_1 , orthogonale pour a . Il est clair que $P \circ S$ est un isomorphisme de X sur V_1 .

Si $g \in X$, soit $u_1 = P \circ S g$. On a donc $\gamma u_1 = g$. La formule de Green montre qu'alors :

$$(A_0 u, Rg) = (A_0 u, u_1) = - \sum_{j=1}^{k-1} (T_j u, g_j)_{L^2(\Gamma)}$$

puisque $a(u, u_1) = 0$ pour $u \in D(A_0) \subset V_0$ et $u_1 \in V_1$.

D'où $Rg = P \circ S g$.

On a donc construit le relèvement de traces désiré. On a en fait transposé l'opérateur A_0 , et résolu un problème du type :

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = 0 & \text{sur } \Omega - \Gamma \\ \gamma u = g \in Y \\ \text{Conditions de trace sur } \partial\Omega \end{cases} \quad ([7]).$$

§ 3. UN LEMME

Il nous sera utile d'introduire la notation suivante : Si E est un espace normé, on note SE , sa boule unité.

On va maintenant chercher des conditions suffisantes pour que $B_{m/2k}^+(a) = 0$. On remarque d'abord que cette égalité est une propriété

de l'espace V : pour que $B_{m/2k}^+(a)$ soit nul, pour toute forme a de $\mathcal{A}(V)$, il faut et il suffit qu'il le soit pour une forme a de $\mathcal{A}(V)$ et ceci est équivalent à la propriété suivante :

$$(7) \quad \inf_{\Omega_1 \subset\subset \Omega} \left\{ \limsup_{1 \rightarrow +\infty} \lambda^{-m/2k} N(\lambda, SV(\Omega - \overline{\Omega}_1)) \right\} = 0$$

Pour montrer (7), on va donner des majorations des n -diamètres de $SV(\Omega - K)$ dans $L^2(\Omega)$; et pour $V = H_0^k(\Omega)$ ou $H^k(\Omega)$ on se limitera à trouver ces majorations pour le cas $k = 1$ grâce à ce qui suit.

Soit X un espace de Hilbert, et soient $(A_j, D(A_j))$ ($j = 1, \dots, m$) des opérateurs non bornés, fermés dans X . Soit X^1 un sous-espace fermé de $\bigcap_{j=1}^m D(A_j)$, muni de la norme :

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_X^2 + \sum_{j=1}^m \|A_j u\|_X^2$$

On a défini par récurrence pour $k \geq 2$

$$X^k = \{u \in X^{k-1} / A_j u \in X^{k-1}\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_k^2 = \|u\|_{k-1}^2 + \sum_{j=1}^m \|A_j u\|_{k-1}^2$$

On a :

Proposition 1 : Avec ces notations si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha d_n(SX^1, X) \leq C$, alors

pour $k < 1$, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha(1-k)} d_n(SX^1, X^k) \leq C^{1-k} \gamma$$

où γ est une constante ne dépendant que de k , 1 , m et α .

Démonstration : Soit T l'opérateur de X^1 dans $(X)^{m+1}$: $Tu = (u, A_1 u, \dots, A_m u)$. T est une isométrie de X^k sur TX^k , sous espace fermé de $(X^{k-1})^{m+1} = Y^k$.
D'où : $d_n(SX^1, X^k) = d_n(STX^1, TX^k)$.

En considérant la projection orthogonale de Y^k sur TX^k , on voit que :

$$d_n(STX^l, TX^h) = d_n(STX^l, Y^k) \leq d_n(SY^l, Y^k)$$

Il est facile de voir, en approchant sur chaque composante par un espace de dimension n , que :

$$d_{n(m+1)}(SY^l, Y^k) \leq d_n(SX^{l-1}, X^{k-1}).$$

Utilisant le fait que, pour $h < k < l$, on a

$$d_{n_1+n_2}(SX^l, X^h) \leq d_{n_1}(SX^l, X^k) \times d_{n_2}(SX^k, X^h)$$

on montre par récurrence sur $(l-k)$, l'existence d'un entier $\nu_{k,l}$ tel que :

$$d_{n \cdot \nu_{k,l}}(SX^l, X^k) \leq [dn(SX^l, X)]^{l-k}$$

et on en déduit facilement la proposition.

§ 4. PROBLEMES UNIFORMEMENT ELLIPTIQUES

On garde les notations précédemment introduites. On énonce :

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^m , de mesure finie. On suppose que V est un espace de Hilbert vérifiant :

$$H_{\text{comp}}^k(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H_0^k(\Omega).$$

Alors pour toute forme a de $\mathcal{A}(V)$ on a :

$$N(\lambda, K_a(\Omega)) \sim \lambda^{m/2k} \cdot \mu_a(\Omega).$$

Soit $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Avec les notations de la proposition 1 prenant $X = L^2(\Omega - \bar{\Omega}_1)$, $X^1 = H_0^1(\Omega - \bar{\Omega}_1)$, $H_0^k(\Omega - \bar{\Omega}_1)$ est un sous-espace fermé de X^k , et $V(\Omega - \bar{\Omega}_1) \hookrightarrow H_0^k(\Omega - \bar{\Omega}_1)$. Donc, compte tenu de la proposition 1 et de (7), le théorème résulte de :

Proposition 2 : Il existe une constante $C(m)$, telle que pour tout ouvert Ω de \mathbf{R}^m , de mesure finie on a :

$$\limsup n^{1/m} d_n(SH_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \leq C(m) (\text{mes } \Omega)^{1/m}$$

On obtient d'abord la majoration suivante :

Lemme 2 : Soit C un convexe de \mathbf{R}^m . Soient ω_1 et ω_2 deux ensembles mesurables inclus dans C . Notant $\delta(C)$ le diamètre de C , on a pour toute fonction f de $H^1(C)$:

$$\int_{\omega_1 \times \omega_2} |f(x) - f(y)|^2 dx dy \leq 2^{m-1} \{\delta(C)\}^2 \{\text{mes } \omega_1 + \text{mes } \omega_2\} \int_C |Df(z)|^2$$

On démontre ce lemme, en écrivant que pour f dans $C^1(C)$ on a :

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \langle Df(tx + (1-t)y), x-y \rangle_{\mathbf{R}^m} dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère un pavage de \mathbf{R}^m par des cubes $J_\alpha (\alpha \in \mathbf{Z}^m)$ de cote ε : $J_\alpha = \{x / |x_j - \varepsilon \alpha_j| < \varepsilon \quad j=1, \dots, m\}$.

Soit $A(\varepsilon)$ l'ensemble des α tels que $J_\alpha \cap \Omega \neq \emptyset$; soit $A'(\varepsilon)$ l'ensemble des α tels que : $\text{mes}(J_\alpha \cap \Omega) \geq \frac{1}{2} \text{mes } J_\alpha$.

On note $n(\varepsilon) = \text{card } A'(\varepsilon)$. On a donc :

$$(8) \quad \varepsilon^m \cdot n(\varepsilon) \leq 2 \text{mes } \Omega.$$

Soit $E_{n(\varepsilon)}$ l'espace de dimension $n(\varepsilon)$ engendré par les fonctions caractéristiques $1_{J_\alpha} (\alpha \in A'(\varepsilon))$.

Pour f dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et α dans $A'(\varepsilon)$ on pose :

$$\bar{f}_\alpha = \frac{1}{\text{mes } J_\alpha} \int_{J_\alpha} f(y) \cdot dy.$$

On déduit du lemme 2 :

$$|f - \bar{f}_\alpha|_{L^2(J_\alpha)}^2 \leq 2^m \cdot \varepsilon^2 \|f\|_{H^1(J_\alpha)}^2 \quad \alpha \in A'(\varepsilon)$$

Si $\alpha \in A(\varepsilon) - A'(\varepsilon)$ en prenant dans le lemme 2, $\omega_1 = \Omega \setminus J_\alpha$, $\omega_2 = \Omega \cap J_\alpha$, compte tenu de la définition de $A'(\varepsilon)$, on a :

$$\|f\|_{L^2(J_\alpha)}^2 \leq 2^m \cdot \varepsilon^2 \|f\|_{H^1(J_\alpha)}^2 .$$

D'où l'on déduit : $d_{n(\varepsilon)}(SH_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \leq 2^{m/2} \cdot \varepsilon < 2^m \varepsilon$.
On a alors : $N(\lambda, SH_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \leq n(2^{-m} \lambda^{-1/2}) \leq 4 \text{ mes } \Omega \cdot \lambda^{m/2}$ d'après (8)

On en déduit alors , la proposition.

Exemple : Soit Ω , un ouvert de mesure finie. Soit $d(x)$ la distance au bord.
Soit a :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Du \cdot Dv + \int_{\Omega} d(x)^{-\alpha} u \bar{v} \quad (\alpha \in \mathbf{R}_+)$$

Soit V l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour a . On a bien :
 $V \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$. L'opérateur différentiel est ici : $-\Delta + d(x)^{-\alpha}$

Nous allons maintenant expliciter la condition (C) annoncée dans l'introduction.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^m , possédant la propriété du segment suivante :

Il existe un recouvrement O_j ($j = 1, \dots, N$) de $\partial\Omega$, des vecteurs h_j , tels que pour tout x de $O_j \cap \Omega$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on ait $x + t h_j \in \Omega$.

Pour $|x-y|$ assez petit, x et y dans $O_j \cap \Omega$, il existe un réel s tel que le segment $[x + s h_j, y + s h_j]$ soit inclus dans Ω . Soit $S_{x,y}$ l'ensemble des tels s . On pose :

$$\rho(x, y) = \inf_{s \in S_{xy}} (2s |h_j| + |x-y|).$$

$2s |h_j| + |x-y|$ étant la longueur du chemin joignant x à y dans Ω , union des segments $[x, x + s h_j]$, $[x + s h_j, y + s h_j]$ et $[y + s h_j, y]$.

Théorème 3 : On suppose qu'il existe une constante K telle que

$$\rho(x, y) \leq K|x-y|.$$

Alors si V est un espace de Hilbert tel que :

$$H_{\text{comp}}^k(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^k(\Omega)$$

pour toute forme a de $\mathcal{L}(V)$, on a :

$$N(\lambda, K_a(\Omega)) \sim \lambda^{m/2k} \cdot \mu_a(\Omega).$$

Notons $\Omega_\delta = \{x \in \Omega / d(x, \partial\Omega) < \delta\}$.

Comme pour le théorème 2, cela résultera de l'estimation :
il existe une constante C telle que pour δ assez petit, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/m} d_n(\text{SH}^1(\Omega), L^2(\Omega_\delta)) \leq C(\text{mes } \Omega_\delta)^{1/m}$$

La démonstration est semblable à celle de la proposition 2. L'équivalent du lemme 2 est ici.

Lemme 3 : Il existe des constantes ε_0 , K' et C telles que si $\omega \subset \Omega_j$,
et $\delta(\omega) < \varepsilon_0$, on a pour toute fonction f de $H^1(\Omega)$:

$$\int_{\omega \times \omega} |f(x) - f(y)|^2 dx dy \leq C \cdot \text{mes } \omega (\delta(\omega))^2 \|f\|_{H^1(\Gamma(\omega))}^2.$$

où $\Gamma(\omega)$ est l'ensemble des points z de Ω tels que $d(z, \omega) \leq K' \cdot \delta(\omega)$.

On montre que pour f dans $C^1(\Omega)$, $f(x) - f(y)$ est l'intégrale de Df sur un chemin joignant x à y . En fait si $\delta(\omega)$ est assez petit, il existe s réel, tel que s soit dans S_{xy} pour tous les (x, y) de $\omega \times \omega$. On prend le chemin associé. On remarque que de plus on peut prendre $s \leq K \cdot \delta(\omega)$

On considère une partition de \mathbb{R}^m par des cubes de côtés ε , (J_α) . Le nombre des cubes coupant Ω_δ est $n(\varepsilon)$. Sur chacun on approche f

par sa valeur moyenne, et grâce au lemme 3, si ε est assez petit, en remarquant qu'un point z ne peut appartenir qu'à un nombre borné de $\Gamma(\Omega_\delta \cap J_\alpha)$, on montre que :

$$d_{n(\varepsilon)}(\text{SH}^1(\Omega), L^2(\Omega\delta)) \leq C.\varepsilon$$

On remarque $\varepsilon^m n(\varepsilon) \sim \text{mes } \overline{\Omega_\delta}$ et puisque l'hypothèse implique que $\partial\Omega$ est de mesure nulle, on conclut comme pour la proposition 2.

Le théorème est encore vrai, si Ω est localement difféomorphe, à un ouvert satisfaisant les hypothèses du théorème.

§ 5. UN EXEMPLE DE COMPORTEMENT IRREGULIER

Si Ω est un ouvert, possédant une infinité de composantes connexes, l'injection de $H^1(\Omega)$ ($1 > k$) n'est jamais compacte. On va étudier quelques ouverts pour lesquels (1) est fausse.

Soit I_0 l'intervalle $]0,1[$. On considère une suite d'intervalles I_n ($n = 1, \dots$), disjoints, de longueur ε_n , inclus dans I_0 . Pour $\beta \geq 0$, on définit :

$$\Omega_\beta = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x \in I_0, 0 < y < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \cdot 1_{I_n}(x)\}$$

On note $f(\lambda) \approx g(\lambda)$, pour dire qu'il existe deux constantes $0 < c \leq C < +\infty$, telles que $cg(\lambda) \leq f(\lambda) \leq Cg(\lambda)$. On a :

Théorème 4 : Soit a le produit scalaire usuel de $H^1(\Omega_\beta)$. Alors :

i) $\beta = 0$ l'injection de $H^1(\Omega_\beta)$ dans $L^2(\Omega_\beta)$ n'est pas compacte .

ii) $0 < \beta < 1/2$ $N(\lambda, K_a(\Omega_\beta)) \approx \lambda^{1/2\beta}$.

iii) $\beta = 1/2$ $N(\lambda, K_a(\Omega_\beta)) \approx \lambda$ mais

$$N_1^-(\Omega_\beta, a) > \mu_a(\Omega_\beta) \text{ et } B_1^-(a) > 0$$

iv) $\beta > 1/2$ $N(\lambda, K_a(\Omega_\beta)) \sim \lambda \mu_a(\Omega_\beta)$.

Le point iv) se démontre par une adaptation de la démonstration du théorème 3.

On note $J_0 = I_0 \times I_0$; $J_n = I_n \times]1, 1 + n^{-\beta}[$.

Soit $V(J_n) = \{u \in H^1(J_n) / u(., 1) = 0 \text{ dans } H^{1/2}(I_n)\}$ pour $n = 0, 1, \dots$. On identifie $V(J_n)$ à l'espace des u de $H^1(\Omega_\beta)$ nuls sur $\Omega_\beta - J_n$. Soit V l'ensemble des u de $H^1(\Omega_\beta)$ tels que $u(., 1) = 0$ dans $H^{1/2}(I_0)$. On a : $V = \bigoplus_0 V(J_n)$, la somme étant orthogonale dans $H^1(\Omega_\beta)$ et dans $L^2(\Omega_\beta)$.

On en déduit :

$$N(\lambda, SV) = \sum_0^\infty N(\lambda, SV(J_n)).$$

D'autre part, il existe un opérateur de relèvement de trace R , de $H^{1/2}(I_0)$ dans $H^1(\Omega_\beta)$ et de $H^{-1/2}(I_0)$ dans $L^2(\Omega_\beta)$. Soit $W = RH^{1/2}(I_0)$. On a donc : $H^1(\Omega_\beta) = V \oplus W$.

Utilisant les résultats d'El Kolli ([3]) on montre que :

$$(9) \quad d_n(SW, L^2(\Omega_\beta)) \leq C d_n(SH^{1/2}(I_0), H^{-1/2}(I_0)) \leq C n^{-1}.$$

Connaissant les fonctions propres du problème aux limites défini par : $(V(J_p), L^2(J_p), (.,.)_{H^1(J_p)})$ on montre que pour $p \geq 1$.

$$(10) \quad \begin{cases} N(\lambda, SV(J_p)) \leq \frac{\lambda}{4\pi} \varepsilon_p \cdot p^{-\beta} + [\sqrt{\lambda} \frac{p^{-\beta}}{\pi} + 1/2] + \frac{\sqrt{\lambda} \varepsilon_p}{2\pi} \\ M(\lambda, SV(J_p)) \geq \frac{\lambda}{4\pi} \varepsilon_p \cdot p^\beta - \frac{\sqrt{\lambda} \varepsilon_p}{2\pi} - 1/2 \\ N(\lambda, SV(J_p)) \geq [\sqrt{\lambda} \frac{p^{-\beta}}{\pi} + 1/2] \end{cases}$$

Posons $M_\nu(\mu) = \sum_{p=\nu+1}^\infty [\mu p^{-\beta} + 1/2]$. On montre que :

$$\text{si } \beta < 1, \forall \nu \quad M_\nu(\mu) \sim \mu^{1/\beta} \int_0^{1/2} [t^{-\beta} + 1/2] dt.$$

On en déduit, utilisant (10) et l'estimation

$$M(\lambda, SV(J_0)) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \text{mes } J_0$$

$$\begin{aligned} \text{si } \beta = 0 & \quad N(\lambda, SV) = +\infty & \quad \lambda > 4\pi^2 \\ 0 < \beta < 1/2 & \quad N(\lambda, SV) \sim \lambda^{1/2\beta} \cdot \frac{1}{\pi^{1/\beta}} \cdot \int_0^{1/2} [t^{-\beta} + 1/2] dt \\ \beta = 1/2 & \quad N(\lambda, SV) \sim \lambda \left[\frac{\text{mes } \Omega \beta}{4\pi} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 [t^{-1/2} + 1/2] dt \right] \end{aligned}$$

Ces estimations jointes à (9) démontrent le théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Boutet de Monvel - Grisvard : Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur . C. R. Acad. Sc. t.272 n 1, 1971, p.23.
 - [2] Browder : Le problème des vibrations pour un opérateur aux dérivées partielles self adjoint, et du type elliptique, à coefficients variables, C. R. Acad. Sc., t.236, 1953, p. 2140.
 - [3] El Kolli : n-ièmes épaisseurs dans les espaces de Sobolev ; C. R. Acad. Sc. Paris, t.272, p.537, 1971.
 - [4] Gårding : The asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators ; Math. Scand. 1953, p.237.
 - [5] Lorentz : Approximation of functions ; Holt, Rinehart and Winston.
 - [6] Triebel : Erzeugung nuklearer lokalkonvexer Räume durch singuläre Differential operatoren zweiter Ordnung, Math. Ann. 174, 1967, 163-176.
 - [7] Lions Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et applications ; Dunod, 1968-1969.
-