SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. HOGBE-NLEND

Sur la propriété d' approximation dans les espaces localement convexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 13, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 2 - 1 9 7 3

SUR LA PROPRIETE D'APPROXIMATION DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par H. HOGBE-NLEND

Exposé N° XIII   10 Janvier 1973

§ 0. POSITION DES PROBLEMES ET BUT DE L'EXPOSE

Per Enflo [7] a construit récemment un espace de Banach (réflexif et séparable) ne possédant pas la propriété d'approximation. Partant de son travail, d'autres constructions ont été fournies par Kwapien, Figiel et Pelchinski (voir [6]).Toutes ces constructions, faites dans le cadre des espaces de Banach ne fournissent pas de manière évidente des renseignements sur la propriété d'approximation dans les espaces localement convexes ayant des bornés compacts ou étroitement liés (en un sens à préciser) à des espaces de ce type. Partant du fait que les espaces nucléaires possèdent la propriété d'approximation nous considérons les trois problèmes suivants :

Problème 1 : Le dual fort d'un espace nucléaire complet possède-t-il la propriété d'approximation ?

Problème 2 : Un espace de Fréchet-Schwartz ou un dual fort de Fréchet-Schwartz possède-t-il la propriété d'approximation ?

Problème 3 : Existence de topologies d'approximation universelle non-triviales:soientE un espace localement convexe séparé, $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E et $E' \otimes E$ l'espace des endomorphismes continus de rang fini de E. Nous appelons topologie d'approximation pour E toute topologie localement convexe séparée sur $\mathcal{L}(E)$ assurant la densité de $E' \otimes E$ dans $\mathcal{L}(E)$ (voir aussi [1]).

Suivant cette terminologie, un espace localement convexe séparé E possède la propriété d'approximation si et seulement si la topologie sur $\mathcal{L}(E)$ de la convergence uniforme sur tous les disques compacts (voir Schwartz [8]) est une topologie d'approximation pour E. Il existe toujours sur $\mathcal{L}(E)$ une topologie d'approximation, quel que soit l'espace E : c'est la topologie de la convergence simple. Mais cette topologie est peu intéressante car est trop faible, presque jamais complète et peu usuelle ; c'est la topologie d'approximation triviale. En présence d'un espace dont la topologie de la convergence compacte n'est pas d'approximation, le problème naturel qui se pose en vue d'obtenir des résultats d'approximation effectifs, est la recherche de topologies d'approximation les plus fines possibles, universelles c'est-a-dire de construction valable pour tout espace E et aussi proches que possible de la topologie de la convergence compacte. C'est ce que nous appelons des topologies d'approximation universelles non triviales.

Le but du présent exposé est de résoudre les trois problèmes ci-dessus en donnant des méthodes effectives de construction des duals forts d'espaces nucléaires complets, de construction d'espaces de Fréchet-Schwartz et de duals forts d'espace de Fréchet-Schwartz ne possèdant pas la propriété d'approximation. Nous utiliserons le résultat d'Enflo mais non sa construction ou celle d'autres auteurs. Nous donnerons aussi des méthodes de construction effectives de topologies d'approximation universelle non triviales permettant d'obtenir divers résultats généraux d'approximation.

§ 1. BORNOLOGIES D'APPROXIMATION

Usuellement, les topologies localement convexes séparées sur $\mathcal{L}(E)$, espace des endomorphismes continus d'un espace localement convexe séparé E sont des $\mathcal{B}$-topologies où $\mathcal{B}$ est une bornologie convexe sur E. On dira alors tout naturellement qu'une bornologie convexe $\mathcal{B}$ sur E est une bornologie d'approximation sur E si la $\mathcal{B}$-topologie sur $\mathcal{L}(E)$ (topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{B}$) est une topologie d'approximation. Un espace localement convexe séparé E possède la propriété d'approximation si et seulement si sa bornologie compacte convexe est une bornologie d'approximation. Le problème n° 3 énoncé ci-dessus se ramène donc à la recherche sur E de bornologies d'approximation, plus fines que la bornologie de tous les disques compactes mais aussi proches que possible de cette dernière. Pour cette raison on ne s'intéressera qu'aux bornologies d'approximation formées de disques,compacts d'où la définition :

Définition 1.1 : Soit E un espace localement convexe séparé. On dira qu'une bornologie convexe sur E est une bornologie d'approximation si elle est formée de disques compacts et si l'identité de E est limite pour la $\mathcal{B}$-topologie (topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathcal{B}$) d'opérateurs linéaires continus de rang fini de E.

L'intérêt de considérer les disques compacts au lieu de disques précompacts apparaîtra dans les questions de dualité

1.2 Proposition : Soient E un espace localement convexe séparé et $\mathcal{B}$ une bornologie convexe sur E plus fine que la bornologie des disques compacts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{B}$ est une bornologie d'approximation ;

(ii) Tout endomorphisme continu de E est limite pour la $\mathcal{B}$-topologie d'endomorphismes continus de rang fini autrement dit $E'\otimes E$ est dense dans $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E)$;

(iii) Toute application linéaire continue de E dans un espace localement convexe séparé F est limite pour la $\mathcal{B}$ -topologie d'application linéaires continues de E dans F de rang fini autrement dit $E'\otimes F$ est dense $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E,F)$.

La démonstration est classique et immédiate.

La notion de bornologie d'approximation permet de donner une caractérisation duale de la propriété d'approximation :

1.3 Proposition : Soient E un espace localement convexe séparé ; E'_c son dual muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts de E.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E possède la propriété d'approximation ;

(ii) La bornologie équicontinue de E' est une bornologie d'approximation dans E'_c .

Démonstration : La transposition $u \to {}^t u$ applique l'identité de E sur l'identité de E'_c et les endomorphismes continus de rang fini de E sur ceux de E'_c. Pour tout disque compact K de E et pour tout voisinage disqué de zéro V de E, les relations $u(K) \subset V$ et ${}^t u(V^o) \subset K^o$ sont équivalentes d'où la proposition.

1.4 Corollaire : Soit E un espace infra-tonnelé. Pour que E possède la propriété d'approximation il faut et il suffit que E'_c la possède.

Nous allons établir une propriété générale de stabilité des bornologies d'approximation dont l'importance fondamentale apparaîtra plus loin.

1.5 Théorème : Soit I un ensemble d'indices non vide ; $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces localement convexes indexée par I ; E un espace vectoriel tel que pour tout $i \in I$ il existe $\pi_i : E_i \to E$ une injection linéaire. Soit $\mathcal{C}$ une topologie localement convexe séparée sur E rendant continues les π_i. Pour tout $i \in I$ soit $\mathcal{B}_i$ une bornologie d'approximation sur E_i. Soit $\mathcal{B}$ une bornologie convexe sur E possédant la propriété suivante : pour tout $K \in \mathcal{B}$ il existe un indice $i \in I$ et $B_i \in \mathcal{B}_i$ tel que $K \subset \pi_i(B_i)$. Alors $\mathcal{B}$ est une bornologie d'approximation pour $(E, \mathcal{C})$.

Démonstration : Chaque $\pi_i(B_i)$ est contenu dans un disque compact de $(E, \mathcal{C})$ puisque π_i est continue. Il suffit donc de montrer que pour tout $K \in \mathcal{B}$ et pour tout V voisinage de zéro de $(E, \mathcal{C})$ il existe un endomorphisme linéaire continu de rang fini de E tel que $ux - x \in V$ pour tout $x \in K$. Soit $i \in I$ un indice tel que $K \in \pi_i(B_i)$ où $B_i \in \mathcal{B}_i$. Soit π_i' la transposée de l'injection $\pi_i : E_i \to E$. Elle a une image $\pi_i'(E')$ dense dans E_i' pour la topologie faible $\sigma(E_i', E_i)$ donc dense pour la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts de E_i a fortiori dense pour la $\mathcal{B}_i$-topologie sur E_i. Par conséquent $\pi_i'(E') \otimes E_i$ est dense dans $E_i' \otimes E_i$ pour la $\mathcal{B}_i$-topologie. Comme $\pi_i^{-1}(V)$ est un voisinage de zéro de E_i et que $\mathcal{B}_i$ est une bornologie d'approximation dans E_i, il existe, d'après ce qui précède, $v \in \pi_i'(E') \otimes E_i$ tel que $vx - x \in \pi_i^{-1}(V)$ pour tout $x \in B_i$. L'opérateur v peut s'écrire

$$v = \sum_\nu \pi_i'(x'_\nu) \otimes a'_\nu$$

somme finie où $x'_\nu \in E'$ et $a'_\nu \in E_i$. Posons :

$$v_1 = \sum_\nu x'_\nu \otimes a'_\nu$$

C'est un élément de $E' \otimes E_i$, opérateur continu de rang fini de E dans E_i. Posons $u = \pi_i v_1 \in E' \otimes E$. Pour tout $y = \pi_i(x) \in K$, $x \in B_i$, on a :

$$u(y) - y = \pi_i\left(\sum_\nu < \pi_i\ x, x'_\nu > a_\nu - x\right) = \pi_i(v(x) - x) \in V.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, si l'on suppose I filtrant supérieurement, on obtient le résultat suivant de stabilité par limite inductive :

1.6 Théorème : Soient (E_i, π_{ji}) un système inductif d'espaces localement convexes séparés, indexé par un ensemble filtrant d'indices I ; E l'espace vectoriel limite inductive (algébrique) des E_i et $\pi_i : E_i \to E$ l'application canonique qu'on suppose injective. Soit $\mathcal{C}$ une topologie localement convexe séparée arbitraire sur E rendant continues les applications π_i. Pour tout $i \in I$ soit $\mathcal{B}_i$ une bornologie d'approximation sur E_i telle que pour $i \leq j$ on ait $\pi_{ji}(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{B}_j$. Alors la bornologie sur E limite inductive des $\mathcal{B}_i$ est une bornologie d'approximation dans $(E, \mathcal{C})$.

Démonstration : En effet par définition de la limite inductive bornologique, $\mathcal{B}$ a pour base les ensembles $\pi_i(B_i)$ où $B_i \in \mathcal{B}_i$, $i \in I$ d'où le théorème 1.6 en vertu du théorème 1.5.

1.7 Remarque : Le théorème ci-dessus assure l'existence de bornologies d'approximation maximales pour l'inclusion, donc l'existence de topologies d'approximation universelles, maximales pour la finesse parmi celles qui sont moins fines que la topologie de la convergence compacte.

§ 2. LE DUAL FORT D'UN ESPACE NUCLEAIRE COMPLET ET LA PROPRIETE D'APPROXIMATION

Le problème d'approximation dans le dual fort d'un espace nucléaire complet est résolu par le théorème suivant, cas particulier d'un résultat beaucoup plus général (cf. H. Hogbe-Nlend [3], ou C. R. Acad. Sc.,t. 273 (1971), p. 1130-1131).

2.1 Théorème : Tout espace de Banach est le dual fort d'un espace nucléaire complet.

Démonstration : La démonstration de ce théorème se fera en plusieurs étapes.

1) Soit E un espace de Banach. Une suite (x_n) de E est dite à décroissance rapide si pour tout entier $k \geq 0$ la suite $(n^k x_n)$ est bornée. Une telle suite converge vers zéro. Soit $\overline{\Gamma}((x_n))$ son enveloppe disquée fermée qui est compact. $\overline{\Gamma}((x_n))$ peut se caractériser comme l'ensemble $\hat{\Gamma}((x_n))$ des sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ convergentes dans E avec (λ_n) suite de

scalaires telle que $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| \leq 1$.

2) Soit E'_S le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les suites à décroissance rapide de E. Cet espace est complet : tout filtre de Cauchy dans E'_S converge faiblement et la limite est bornée sur les suites à décroissance rapide. Elle est donc bornée sur tout borné de E (vérification immédiate par l'absurde).

3) L'espace E'_S est nucléaire. En effet : la topologie de E'_S a pour base les polaires dans E' des enveloppes disquées fermées A des suites à décroissance rapide de E ; le dual de E'_S est donc E (théorème de Mackey-Arens) et les disques équicontinus de ce dual coïncident avec les enveloppes disquées fermées des suites à décroissance rapide de E (théorème des bipolaires). Il suffit donc de montrer que pour tout A, enveloppe disquée fermée d'une suite à décroissance rapide de E, il existe B du même type absorbant A telle que l'injection canonique $E_A \to E_B$ soit nucléaire ; où E_D est l'espace de Banach engendré par le disque D et normé par la jauge de D. Pour établir ceci explicitons d'abord la structure de E_A lorsque A est l'enveloppe disquée fermée d'une suite tendant vers zéro dans E.

4) Soit $A = \overline{\Gamma}((x_n))$, (x_n) suite tendant vers zéro dans E. L'espace de Banach E_A est isométrique à un quotient de l^1, la surjection canonique étant :

$$(\lambda_n) \in l^1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in E_A.$$

En effet : pour tout $x \in E_A$ soit $\|x\|_A$ la norme de x dans E_A. On a :

$$(1) \qquad \|x\|_A = \inf \{\alpha>0 \ ; \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \quad \text{avec} \ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq \alpha\}$$

L'application

$$(\lambda_n) \in l^1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in E_A$$

est définie , évidemment surjective par définition de A, continue et de norme ≤ 1. Il suffit donc de montrer que si $x \in E_A$,

$$(2) \qquad \|x\|_A = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \ ; \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n\},$$ norme quotient de la

norme de l^1, ce qui se vérifie par un calcul immédiat.

5) Soit alors $A = \bar{\Gamma}((x_n))$ où (x_n) est à décroissance rapide dans E. Nous devons trouver (y_n) à décroissance rapide dans E telle que si $B = \bar{\Gamma}((y_n))$, B absorbe A et l'injection $E_A \to E_B$ soit nucléaire. Posons $y_n = n^4 x_n$ et $B = \bar{\Gamma}((y_n))$. La suite (y_n) est à décroissance rapide dans E et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
l^1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & l^1 \arrow[d, "\varphi_B"] \\
E_A \arrow[r, "\pi_{BA}"'] & E_B
\end{tikzcd}$$

avec :

α : l'application $(\lambda_n) \to (n^{-4}\lambda_n)$ de multiplication par n^{-4}

φ_A : la surjection canonique $(\lambda_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$

φ_B : " " $(\mu_n) \to \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n y_n$

π_{BA} : l'injection canonique de E_A dans E_B.

Pour montrer que π_{BA} est nucléaire il suffit alors de montrer que α est polynucléaire (cf. Schwartz [8]), ce qui est clair.

6) E est le dual fort de E'_S : en effet E est bien le dual de E'_S (Mackey-Arens). Il suffit donc de montrer que les bornées forts de E'_S sont les parties équicontinues de E'. Toute partie équicontinue de E'_S est évidemment bornée dans E'_S . La réciproque est assurée par le fait que E est tonnelé.

Le théorème 2.1 est complètement démontré. On en tire :

2.2 Théorème : Il existe un espace nucléaire complet E dont les parties compactes sont métrisables et dont le dual fort ne possède pas la propriété d'approximation.

Démonstration : Prendre F n'importe quel espace de Banach séparable ne possèdant pas la propriété d'approximation et prendre $E = F'_S$ dual de F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les suites à décroissance rapide de F (voir H. Hogbe-Nlend [1] ou C. R. Acad. Sc., t. 273, (1971), p.986-988).

2.3 Remarque : Soit E un espace nucléaire complet. Si E a la topologie de Mackey, a fortiori si E est tonnelé, son dual fort possède la propriété d'approximation comme il résulte du corollaire (1.5). Il serait intéressant de connaître les conditions nécessaires et suffisantes sur un espace nucléaire complet pour que son dual possède la propriété d'approximation.

§ 3. LES ESPACES DE FRECHET-SCHWARTZ ET LA PROPRIETE D'APPROXIMATION

Dans la classification actuelle des espaces localement convexes la classe d'espaces de Schwartz apparaît, à divers titres, comme la classe d'espaces la plus proche de celle des espaces nucléaires. Il semble donc naturel de s'interroger sur la position de cette classe d'espaces par rapport à la propriété d'approximation . On a :

3.1 Théorème : [4] Il existe des espaces de Fréchet-Schwartz qui ne possèdent pas la propriété d'approximation.

Démonstration : La construction d'un tel espace se fera en trois points
1 - Soit E un espace de Fréchet. Tout disque compact A de E est absorbé par un autre disque compact B tel que l'injection canonique $E_A \to E_B$ soit compacte (autrement dit la bornologie compacte d'un espace de Fréchet est une bornologie de Schwartz). C'est un résultat connu dont on trouvera une démonstration dans [4] par exemple.

2 - Soit alors E un espace de Banach ne possédant pas la propriété d'approximation. Soit K un disque compact de E_o. Posons $K_1 = K$. D'après le point 1) ci-dessus, il existe K_2 disque compact de E contenant K_1 tel que l'injection $E_{K_1} \to E_{K_2}$ soit compacte. De même il existe K_3 tel que $E_{K_2} \to E_{K_3}$ soit compacte. De proche en proche on construit une suite croissante de disques compacts (K_n) de E telle que les injections canoniques $E_{K_n} \to E_{K_{n+1}}$ soient compactes. Soit F lalimite inductive localement convexe des espaces E_{K_n} ; F est un espace réflexif dont le dual fort G

est un Fréchet-Schwartz. Comme G est tonnelé, et a des bornés compacts, il vérifie la propriété d'approximation si et seulement si son dual fort, qui est F, vérifie la propriété d'approximation (corollaire 1.4). Nous allons précisément montrer qu'il n'en est pas ainsi pour au moins un compact K de E.

3 - Notons F(K) l'espace F construit au point 2, à partir du compact K. Soit $(K_i)_{i \in I}$, la bornologie compacte de E et pour tout $i \in I$. $F(K_i)$ l'espace F(K) associé de la même manière au compact $K = K_i$. Soit, pour tout $i \in I$, $\pi_i : F(K_i) \to E$ l'injection canonique de $F(K_i)$ dans E. Si tous les espaces $F(K_i)$ vérifiaient la propriété d'approximation, E la vérifierait en vertu du théorème 1.6 appliqué à $\mathcal{B} = (K_i)_{i \in I}$ $E_i = F(K_i)$ et $\mathcal{B}_i$ la bornologie compacte de $F(K_i)$, d'où l'un au moins de $F(K_i)$ ne vérifie pas la propriété d'approximation. Son dual fort est un Fréchet-Schwartz qui ne la vérifie pas, d'où le théorème.

§ 4. TOPOLOGIES D'APPROXIMATIONS UNIVERSELLES ET THEOREMES D'APPROXIMATION

Soit E un espace localement convexe séparé. On dit qu'un disque borné B de E est <u>approximant</u> si l'espace vectoriel E_B, normé par la jauge de B possède la propriété d'approximation. On dit alors que E_B est un sous espace approximant de E. Par exemple tout sous-espace hilbertien de E est approximant. Il en est de même de tout sous-espace E_B isomorphe à un espace C(K), L^p,...etc..

La notion de sous-espace approximant nous permet de donner une méthode générale de construction de bornologies d'approximation non triviales, donc de topologies d'approximation, non triviales, constructions valables pour tout espace localement convexe séparé.

4.1 <u>Proposition</u> : <u>Soit</u> E <u>un espace localement convexe séparé arbitraire. Toute bornologie sur</u> E <u>ayant une base formée de disques compacts dans des sous-espaces approximants de E est une bornologie d'approximation sur E.</u>

<u>Démonstration</u> : appliquer le théorème 1.6 avec $(E_i)_{i \in I}$ la famille des sous-espaces approximants de E et $\pi_i : E_i \to E$ les injections canoniques.

4.2 <u>Remarque</u> : La proposition 4.1 établit un rapport entre la propriété d'approximation dans E et la propriété d'approximation dans ses sous-espaces E_B. Ce résultat suggère le problème suivant : un espace localement convexe séparé dont tous les sous-espaces E_B vérifient la propriété d'approximation la vérifie t-elle ? La réponse est affirmative si E est un Fréchet, un (LF) ou un espace co-Schwartz en vertu de la proposition 4.1.

Voici des exemples pratiques d'application de la proposition 4.1. Pour cela rappelons qu'une bornologie $\mathcal{B}$ sur un espace vectoriel E est dite nucléaire si elle possède une base formée de disques complétants et tout $A \in \mathcal{B}$ est contenu dans un $B \in \mathcal{B}$ complétant, tel que l'injection canonique $E_A \to E_B$ soit nucléaire. On démontre alors classiquement que tout $K \in \mathcal{B}$ est absorbé par un disque hilbertien $B \in \mathcal{B}$ tel que K soit relativement compact dans E_B (voir [5], page 71). On peut alors enoncer :

4.3 Proposition : Soit E un espace localement convexe séparé. Toute bornologie nucléaire sur E formée de disques bornés de E est une bornologie d'approximation.

Il convient d'énoncer ce résultat sous une forme équivalente, plus "constructive", précisant la méthode d'obtention des bornologies nucléaires. Soient E un espace localement convexe séparé et E_o l'espace E muni de la topologie convexe ayant pour base les disques bornés complétants de E. La bornologie à décroissance rapide de E est par définition la bornologie à décroissance rapide de E_o au sens défini par H. Hogbe-Nlend ([5], page 84). Cette bornologie étant nucléaire ([5], page 85) on peut énoncer :

4.4 Proposition : Soit E un espace localement convexe séparé. La bornologie à décroissance rapide de E est une bornologie d'approximation.

4.5 Remarque : En vertu du théorème de Kōmura-bornologique ([5], page 86) les propriétés (4.3) et (4.4) sont équivalentes.

On en déduit aussitôt (cf. [5] et [9])

4.5 Corollaire : Tout espace localement convexe séparé conucléaire possède la propriété d'approximation.

Dans un tel espace, tout borné est en effet à décroissance rapide. Dans le cas des espaces de Banach, la proposition 4.4 fournit le théorème général d'approximation suivant :

4.6 Théorème : Soit E un espace de Banach. L'identité de E est limite uniforme sur tout compact à décroissance rapide d'opérateurs linéaires continusde rang fini.

Ce résultat suggère naturellement la question suivante : quelle "distance" sépare la topologie de la convergence uniforme sur les compacts à décroissance rapide et la topologie de la convergence simple d'une part, de la convergence compacte d'autre part ? On peut démontrer :

4.7 Proposition : Soient E un espace de Banach. Sur $\mathcal{L}(E)$, espace des endomorphismes continus de E, on considère les trois topologies suivantes :

- la topologie de la convergence simple ;
- la topologie de la convergence uniforme sur tout compact à décroissante rapide ;
- la topologie de la convergence compacte. Si deux quelconques de ces topologies sont identiques, E est de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W. Brace, P. J. Richetta : The approximation of linear operators. Transactions A. M. S. 157 (1971) 1-21.

[2] A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mém. A. M. S. N° 16 (1966).

[3] H. Hogbe-Nlend : Topologies et bornologies nucléaires associées. Applications. Ann. Inst. Fourier, 23, 4 (à paraître).

[4] H. Hogbe-Nlend : Les espaces de Fréchet-Schwartz et la propriété d'approximation, C. R. Acad. Sc. t. 275 (1972) p. 1073.

[5] H. Hogbe-Nlend : Théorie des bornologies et applications, Springer Verlag, Lecture Notes 213 (1971).

[6] S. Kwapien : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-73, exposés N° 8 et 9

[7] Per Enflo : A counterample to the approximation problem (à paraître).

[8] L. Schwartz : Séminaire 1953-1954, Produits tensoriels topologiques I. H. P. Paris.

[9] T. Terzioglu : Approximation property of conuclear spaces. Math. Ann. 1971, 35-37 (1971).