Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Zuily

Sur l'existence de solutions analytiques globales des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants en deux variables indépendantes, d'après E. de Giorgi

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 5, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

SUR L'EXISTENCE DE SOLUTIONS ANALYTIQUES GLOBALES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS EN DEUX VARIABLES INDEPENDANTES D'APRES E. DE GIORGI

par C. ZUILY

Exposé N° V

10 Novembre 1971

§ 1. INTRODUCTION

Le problème de la surjectivité des opérateurs linéaires à coefficients constants dans des espaces de distributions $E(\Omega)$ (Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$) a fait l'objet de nombreux travaux consacrés aux cas $E(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, $E(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega)$ (distributions d'ordre fini), $E(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$, $E(\Omega)$ = classes de Beurling etc... (Malgrange, Ehrenpreis, Hörmander, etc... (cf. [1] chap. 3 et [3] chap. 7).

L'auteur s'intéresse ici au cas $\Omega = \mathbb{R}^2$, $E(\Omega) = \mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ espace des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}^2$, et démontre le résultat suivant :

Théorème 1.1 : Soit f une fonction analytique dans $\mathbb{R}^2$ et soit A un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants (réels ou complexes). Il existe alors au moins une fonction $u(x,y)$ analytique dans $\mathbb{R}^2$ qui satisfait à l'équation

$$A\,u(x,y) = f(x,y) \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 . \tag{1.1}$$

Signalons que T. Kawaï [2] a récemment considéré le cas $E(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ espace des fonctions analytiques sur Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
La démonstration du théorème 1.1 est basée sur deux résultats fondamentaux, les propositions 3.1 et 3.2 (paragraphe 3). Le paragraphe 2 contient des lemmes préliminaires.

§ 2. LEMMES PRELIMINAIRES

Lemme 2.1 : Soient λ, a, γ_h, $h = 0,1,\dots,n-1$ des nombres complexes tels que

$$\lambda^m + \sum_{h=o}^{n-1} \gamma_h\, a^{n-h} \lambda^h = 0 . \tag{2.1}$$

Alors

$$(2.2) \qquad |\lambda| \leqq |a| \{1 + \sum_{h=o}^{n-1} |\gamma_h|\} .$$

<u>Lemme 2.2</u> : Soient $P(z) = (z-\mu_1)\ldots(z-\mu_n)$ et $Q(z)$ deux polynômes d'ordre n en la variable complexe z. Soit λ une racine de l'équation $Q(z) = 0$ et supposons que a, ε sont deux nombres positifs tels que

$$|\mu_k| \leqq a \quad h = 1,\ldots,n \ ; \ \varepsilon \leqq 2^{-n}$$

$$|Q(z) - P(z)| \leqq \{a\,|z|^{n-1} + a^n\}\,\varepsilon \quad \forall\, z .$$

Alors $$\operatorname*{Min}_h |\lambda - \mu_k| \leqq 2\,a\,\varepsilon^{1/n} .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $\eta = \operatorname*{Min}_h |\lambda - \mu_k|$. On a

$$(2.3) \qquad \eta^n \leqq |P(\lambda)| = |P(\lambda) - Q(\lambda)| \leqq \{a(a+\eta)^{n-1} + a^n\}\,\varepsilon .$$

Si $\eta > a$, d'après (2.3) on a

$$\eta^n \leqq a\ \eta^{n-1}\ 2^n\ \varepsilon \qquad \text{i.e. } \eta \leq a .$$

On doit donc avoir $\eta \leqq a$ ce qui, en utilisant (2.3), donne le résultat cherché.

<u>Lemme 2.3</u> : Soit l'équation différentielle à coefficients constants complexes

$$(2.4) \qquad \frac{d^n w}{dy^n} + \sum_{h=o}^{n-1} b_h \frac{d^h w}{dy^h} = q(y) .$$

Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines de son équation caractéristique $\lambda^n + \sum_{h=o}^{n} b_h \lambda^h = 0$. Supposons que r, η sont des nombres réels et s, α des nombres positifs tels que

$$|\lambda_j| \leqq \alpha \ ; \ |\mathrm{Re}\,\lambda_j - r| \leqq s+1 \qquad j=1,\dots,n$$

$$|q(t) \leqq e^{rt} \ e^{-s|t-\eta|} \qquad \forall\ t \in \mathbb{R} \quad .$$

Il existe alors une solution unique w de l'équation (2.4) telle que

$$\text{(2.5)} \qquad \lim_{r\to+\infty} e^{-ry}\, w(y) = \lim_{r\to-\infty} e^{-ry}\, w(y) = 0 \quad .$$

De plus cette solution vérifie

$$\text{(2.6)} \qquad \left|\frac{d^h w}{dy^h}\right| \leqq e^{ry - s|y-\eta|} \ (\alpha+1)^h \qquad h=0,1,\dots,n \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On considère d'abord le cas $n=1$. La solution de (2.4) s'écrit

$$w(y) = e^{-b_o y} \{\int_0^y e^{b_o t}\, q(t)dt + \mathrm{Cte}\,\} \quad .$$

Il suffit alors de prendre

$$c = -\int_0^\infty e^{b_o t}\ q(t)\ dt \qquad \text{si} \quad \mathrm{Re}\, b_o + r \leqq 0$$

$$c = \int_{-\infty}^0 e^{b_o t}\ q(t)\ dt \qquad \text{si} \quad \mathrm{Re}\, b_o + r \geqq 0 \quad .$$

Pour $n>1$ on considère le système
$$\begin{cases} \dfrac{dw_h}{dy} = \lambda_h\, w_h + w_{h-1} & h=2,\dots,n \\[2ex] \dfrac{dw_1}{dy} = \lambda_1\, w_1 + q(y) \quad . \end{cases}$$

Si $(w_1,\dots,w_n)$ est solution de ce système, w_n est solution de (2.4). Supposons que s, γ sont deux nombres positifs tels que

$$s \geqq |\lambda_h| + 1 \qquad h=1,\dots,n \quad \text{et} \quad |q(y)| \leqq e^{s|y|} \qquad |y| \leqq \gamma \ .$$

Alors la solution de (2.4) qui satisfait aux conditions initiales

$$\frac{d^h w}{dy^h}(0) = 0 \qquad h = 0,1,\dots,n$$

satisfait les estimations

(2.7)
$$\left|\frac{d^h w}{dy^h}\right| \leqq s^h e^{s|y|} \qquad h=0,1,\dots,n \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On raisonne comme au lemme 2.3 en commençant par le cas $n=1$.

<u>Lemme 2.5</u> : Soit $\varphi(s)$ $s \in \mathbb{R}$, une fonction positive décroissante. Il existe alors une fonction $\psi(s)$, C^∞ positive décroissante telle que

$$\psi(s) + \left|\frac{d\psi}{ds}\right| + \left|\frac{d^2\psi}{ds^2}\right| \leqq \varphi(s) \qquad \forall\, s \in \mathbb{R} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Considérons une fonction $\gamma(s)$, C^∞ sur $\mathbb{R}$ nulle pour $|s| \geqq 1$ et telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\gamma(s) + \left|\frac{d\gamma}{ds}\right| + \left|\frac{d^2\gamma}{ds^2}\right|\right) ds < 1 \quad .$$

Il suffit alors de poser

$$\psi(s) = \int_{\mathbb{R}} \gamma(s-t)\,\varphi(t+1)\,dt \quad .$$

<u>Lemme 2.6</u> : Soient $u(x,y)$, $f(x,y)$ deux fonctions C^∞ dans un ouvert B de $\mathbb{R}^2$. Supposons que

(2.8)
$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \sum_{h=o}^{n-1} b_h \frac{\partial^h u}{\partial y^h\, \partial x^{n-h}} + \sum_{o \leq h+k \leq n-1} b_{h,k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial y^h\, \partial x^k} = f(x,y)$$

(2.9)
$$\left|\frac{\partial^{r+s} f}{\partial x^r\, \partial y^s}\right| \leqq (s+r)!\, \alpha^s \beta^r \qquad \text{pour } s,\ r \in \mathbb{N}$$

$$(2.10)\qquad \left|\frac{\partial^{r+s}u}{\partial x^r\,\partial y^s}\right| \leqq (r+s)!\,\alpha^s\,\beta^s \quad \text{pour} \quad r\in\mathbb{N}\ ,\ s=0,1,\dots,n$$

$$(2.11)\qquad \beta>1\ ;\ \alpha>\beta\,\{1+\sum_{h=o}^{n-1}|b_h|+\sum_{h+k=o}^{n-1}|b_{hk}|\,\}$$

Alors (2.10) est vraie $\forall\ s\in\mathbb{N}$.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur s et on dérive l'équation (2.8) par rapport à y.

Soit w une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^6$, un point de $\mathbb{R}^6$ sera noté (x,y,t) $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $t=(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathbb{R}^4$. On notera

$$|\text{grad } w| = \left(\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|^2+\sum_{j=1}^{4}\left|\frac{\partial w}{\partial t_j}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2 w}{\partial t_j^2}\quad .$$

Lemme 2.7 : Supposons qu'il existe une constante positive σ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^4}\{|w(x,y,t)|+|\text{grad } w(x,y,t)|+|\Delta w(x,y,t)|\}dt \leqq \sigma\quad .$$

Alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a

$$(2.12)\qquad w(x,y,0,0,0,0) = -\frac{1}{4\omega_6}\int_{\mathbb{R}^6}\frac{\Delta w(\xi,\eta,z)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+|z|^2]^2}\,d\xi\,d\eta\,dz$$

où ω_6 est la mesure de la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^6$.

Démonstration : Il résulte de l'hypothèse que

$$(2.13)\qquad \int_{x^2+y^2+|z^2|\leqq\rho^2}\{|w|+|\text{grad } w|+|\Delta w|\}dx\,dy\,dz \leqq \pi\,\sigma\,\rho^2\quad \forall\ \rho>0\ .$$

Soit une fonction $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\begin{cases}\gamma(s)=1 & s\leqq 0\\ \gamma(s)=0 & s\geqq 1\end{cases}$.

P... tout $\rho > 0$ considérons la fonction

$$\beta(x,y,t) = w(x,y,t)\gamma[\sqrt{x^2+y^2+|t^2|} - \rho]$$

alors β est à support compact et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^6$. On a donc en utilisant la solution élémentaire du laplacien dans $\mathbb{R}^6$:

$$\beta(x,y,t) = C^{te} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\Delta\beta(\xi,\eta,z)\,d\xi\,d\eta\,dz}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+|z-t|^2]^2}$$

d'où

$$\beta(x,y,0,0,0,0) = C^{te} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\Delta\beta(\xi,\eta,z)\,d\xi\,d\eta\,dz}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+|z|^2]^2} \quad .$$

En faisant tendre ρ vers $+\infty$ et en utilisant les théorèmes classiques de convergence des intégrales on déduit (2.12).

§ 3. PROPOSITIONS FONDAMENTALES

Proposition 3.1 : Soit $f(x,y)$ une fonction (réelle ou complexe) analytique dans $\mathbb{R}^2$ et soit φ une fonction positive décroissante définie sur $\mathbb{R}$.

Il existe une fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^3$ et une fonction ϕ décroissante positive C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$(3.1) \qquad f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\xi,\eta,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\tau}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\tau^2]^2} \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} 0 < \phi(s) \le \varphi(s) \\ \operatorname{supp} g \subset \{(\xi,\eta,\tau) \ : \ \phi(\xi^2+\eta^2) \leqq \tau \leqq 2\,\phi(\xi^2+\eta^2)\} \\ \phi(\xi^2+\eta^2) \geqq \int_0^{+\infty} |g(\xi,\eta,\tau)|\,d\tau \qquad \forall\ (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \quad . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : Nous noterons (x,y,t) $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^4$, les points de $\mathbb{R}^6$. D'après le théorème de Cauchy-Kovalewska il existe un ouvert $A \subset \mathbb{R}^6$ contenant l'hyperplan $t_4 = 0$ et une fonction $u(x,y,t)$ tel que

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{dans } A \\ u(x,y,t_1,t_2,t_3,0) = f(x,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial t_4} u(x,y,t_1,t_2,t_3,0) = 0 \quad . \end{cases}$$

D'autre part il existe une fonction $\alpha(s)$ positive décroissante continue telle que pour tout $s \geqq 0$:

$$A(s) = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^6 \; : \quad x^2 + y^2 \leq s \qquad |t| \leq \alpha(x^2+y^2)\} \subset A \quad .$$

Posons alors

$$\beta(s) = \text{Max}\,\{|u| + |\text{grad}\, u| \; : \; (x,y,t) \in A(s)\} \quad , \quad s \geqq 0 \; .$$

Soit p un nombre réel $\geqq 1$. D'après le lemme 2.5 il existe une fonction ϕ, C^∞ décroissante, telle que, pour tout $s \geqq 0$

$$(3.4) \qquad \begin{cases} 0 < \psi(s) \leq \varphi(s) \\ 2\ \psi(s) \leq \alpha(s) \\ \psi(s) + |\psi'(s)| + |\psi''(s)| \leqq \dfrac{1}{[p+s+\beta(s)]^2} \end{cases} .$$

Soit $\gamma(s)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(s) = 0 \quad \text{pour} \quad s \geqq 4 \quad ; \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 1 \quad s \in \mathbb{R} \\ \gamma(s) = 1 \quad \text{pour} \quad s \leqq 1 \quad ; \quad |\gamma'| \leq 1 \ ; \ |\gamma''| \leq 1 \quad s \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

Posons alors

$$w(x,y,t) = \begin{cases} u(x,y,t) \cdot \gamma \left[\dfrac{|t|^2}{\{\psi(x^2+y^2)\}^2} \right] , & (x,y,t) \in A \\ 0 & (x,y,t) \notin A . \end{cases}$$

On a alors : $\Delta w = 0$ pour $|t| \leq \psi(x^2+y^2)$, $w = \Delta w = 0$ pour $|t| \geq 2\,\psi(x^2+y^2)$ et $f(x,y) = w(x,y,0,0,0,0)$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part il est facile de voir que w vérifie les hypothèses du lemme 2.7. On a donc

$$(3.5) \qquad w(x,y,0,0,0,0) = C^{te} \int_{\mathbb{R}^6} \frac{\Delta w(\xi,\eta,z)\, d\xi\, d\eta\, dz}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+|z|^2]^2} .$$

Il suffit alors de poser

$$\begin{cases} g(\xi,\eta,\tau) = C^{te} \displaystyle\int_{|z|=\tau} \Delta w(\xi,\eta,z) dz , & \tau > 0 \\ g(\xi,\eta,\tau) = 0 & \tau < 0 . \end{cases}$$

On aura alors en vertu de (3.5)

$$f(x,y) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\xi,\eta,\tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\tau^2]} \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

<u>Proposition 3.2</u> : Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(3.6)\quad \frac{\partial^n v}{\partial y^n} + \sum_{h=o}^{n-1} b_h \frac{\partial^h v}{\partial y^h \partial x^{n-h}} + \sum_{h+k=o}^{n-1} b_{h,k} \frac{\partial^{h+k} v}{\partial y^h\, \partial x^k} = \frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\tau^2]^2}$$

où ξ, η, τ sont des nombres réels, $\eta \geqq 4$, $\tau > 0$.
Soient $\mu_1,\dots,\mu_n$ les racines de l'équation $\mu^n + \sum_{h=o}^{n-1} b_h\, i^{n-h}\, \mu^h = 0$.

Posons $m = 2 + \sum_{h=o}^{n-1} |b_h| + \sum_{h+k=o}^{n-1} |b_{h,k}|$.

Soit δ un nombre réel tel que

$$(3.7)\qquad 0 < \delta < 1/4$$

$$(3.8)\qquad \delta \le \frac{1}{2}\, |\mathrm{Re}\ \mu_k| \qquad \forall\ h : \mathrm{Re}\ \mu_h \neq 0 .$$

Il existe alors une solution v de l'équation (3.6) telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tout $s \in \mathbb{N}$, $r = 0,1,\dots,n$

$$\left|\frac{\partial^{r+s} v}{\partial x^s \partial y^r}\right| \leqq c_1 (s+r)!\, \alpha_1^s\, \beta_1^r \qquad \text{si } |y| \le \eta/4m$$

$$\left|\frac{\partial^{r+s} v}{\partial x^r dy^r}\right| \leqq c_2 (s+r)!\, \alpha_2^s\, \beta_2^r \qquad \text{si } |y| \ge \eta/4m$$

où c_1, α_1, β_1 dépendent continûment de m, δ, y mais sont indépendants de τ tandis que c_2, α_2, β_2 dépendent continûment de m, δ, y, τ et décroissent par rapport à τ.

<u>Démonstration</u> : Par translation on peut se ramener au cas où $\xi = 0$ dans le membre de droite de (3.6). Transformons (3.6) par Fourier par

r· port à x. Il vient

$$(3.9) \qquad \frac{d^n}{dy^n} w(p,y,\eta,\tau) + \sum_{h=o}^{n-1} b_h(ip)^{n-h} \frac{d^h}{dy^h} w(p,y,\eta,\tau) +$$

$$+ \sum_{h+k=o}^{n-1} b_{h,k}(ip)^k \frac{d^h}{dy^h} w(p,y,\eta,\tau) = q(p,y,\eta,\tau) \quad ; \quad p \in \mathbb{R}$$

où $q(p,y,\eta,\tau) = \mathfrak{F}_x[q[x^2+(y-\eta)^2+\tau^2]^{-2}] = \frac{\pi}{2} e^{-|p|[(y-\eta)^2+\tau^2]^{1/2}} \times$

$$\times \{[y-\eta)^2+\tau^2]^{-3/2} + |p| [(y-\eta)^2+\tau^2]^{-1}\}.$$

Soient $\lambda_1(p),\dots,\lambda_n(p)$ les racines de l'équation caractéristique de (3.9)

$$\lambda^n + \sum_{h=o}^{n-1} b_h(ip)^{n-h} \lambda^h + \sum_{h+k=o}^{n-1} b_{h,k}(ip)^k \lambda^h = 0 \quad .$$

D'après le lemme 2.1 on a

$$|\mu_h| \leqq m-1 \qquad h=1,\dots,n \quad .$$

En appliquant la proposition 2.2 il vient

$$\operatorname*{Min}_h |p^{-1} \lambda_j(p) - \mu_h| \leq 2(m-1)|p|^{-1/n} \qquad j=1,\dots,n$$

pour $|p| \geqq 2^n$.

Posons $p_o = p_o(m,\delta) = (\frac{4m}{\delta})^n$ et $p_1 = p_1(\tau) = \mathrm{Max}\,\{0,\ 12\,\tau^{-1}(1-\mathrm{Log}\,\tau)\}$.

D'après la dernière inégalité, de (3.7), (3.8) il vient :

$$(3.10) \qquad |\mathrm{Re}\,\lambda_j(p) - \delta|p|\,| \geqq \delta|p| - 2m\,|p|^{1-1/n} + 1 \geqq \frac{1}{2}\,\delta\,|p| + 1$$

pour $|p| \geqq p_o$.

D'autre part si $|p| \geqq p_1$ on a :

$$(3.11) \qquad 0 < q(p,y,\eta,\tau) \leqq e^{-\frac{|p|}{4}\cdot\tau}\, e^{-\frac{|p|}{2}|y-\eta|} \quad .$$

En vertu de (3.10), (3.11) on peut appliquer le lemme 2.3 à l'équation (3.9) avec $|p| \geqq p_o + p_1$. Pour un tel p il existe donc une solution unique de (3.9) qui satisfait à

$$\lim_{y \to +\infty} e^{-\delta|p|y} w_1 = \lim_{y \to -\infty} e^{-\delta|p|y} w_1 = 0 .$$

Soit maintenant w_2 la solution de (3.9) qui satisfait à

$$\frac{d^h w_2}{dy^h}(0) = 0 \qquad h = 0,\dots,n-1 .$$

Posons

$$w(p,y,\eta,\tau) = \begin{cases} w_1(p,y,\eta,\tau) & |p| \geqq p_o + p_1 \\ w_2(p,y,\eta,\tau) & |p| < p_o + p_1 . \end{cases}$$

Nous allons estimer les dérivées en y de w jusqu'à l'ordre n. Tout d'abord en vertu du lemme 2.1 on a

$$(3.12) \qquad |\lambda_j(p)| \leqq (m-1)(1+|p|) \qquad j = 1,\dots,n \quad \forall\, p \in \mathbb{R} .$$

Supposons $|y| \leqq \eta/4m$. Si $|p| \geqq p_o + p_1$ d'après (3.10), (3.11) et le fait que $\eta \geqq 4$, le lemme 2.3 appliqué à l'équation (3.9) avec $r = \delta|p|$ et $s = \frac{\delta|p|}{2}$ donne

$$(3.13) \qquad \left|\frac{d^h w(p,y,\eta,\tau)}{dy^h}\right| \leqq e^{-\frac{9}{2}\delta|p|}\, m^h(1+|p|)^h \qquad h = 0,1,\dots,n .$$

D'autre part si $|p| < p_o + p_1$ en vertu de (3.12), de l'inégalité

$$q(p,y,\eta,\tau) \leqq e^{-\frac{|p|}{2}|y-\eta|}$$

et du lemme 2.4 appliqué à l'équation (3.9) il vient

$$(3.14) \qquad \left|\frac{d^h w(p,y,\eta,\tau)}{dy^h}\right| \leqq e^{-\frac{3}{4}|p|}\, e^{m|y|}\, m^h(1+|p|)^h \qquad h = 0,1,\dots,n .$$

Utilisant (3.13), (3.14) et $\delta < 1/4$, il vient

$$(3.15) \quad \left| \frac{d^h w(p,y,\eta,\tau)}{dy^h} \right| \leqq e^{-3\delta|p|}\, e^{m|y|}\, m^h\, (1+|p|)^h$$

$k = 0,1,\dots,n$; $|y| \leq \frac{\eta}{4m}$.

Considérons maintenant le cas $|y| \geqq \frac{\eta}{4m}$. Si $|p| \geqq p_o + p_1$, d'après (3.10), (3.11) on peut appliquer la proposition (2.3) à l'équation (3.9) avec

$$r = \delta|p| \;,\quad s = \delta|p| - 2m|p|^{1-1/n} \qquad \alpha = (m-1)(1+|p|) \quad \text{d'où}$$

$$(3.16) \quad \left| \frac{d^h w(p,y,\eta,\tau)}{dy^h} \right| \leqq e^{-|p|\{\tau/4 - 2m(4m+1)|y|.|p|^{-1/n}\}} \times m^h (1+|p|)^h \;;$$

$h = 0,1,\dots,n$.

Enfin, de (3.12) et du fait que

$$q(p,y,\eta,\tau) \leqq \frac{\pi}{2}\, \{\tau^{-3} + |p|\,\tau^{-1}\}$$

appliquant à nouveau le lemme 2.4 à l'équation (3.9), nous obtenons pour $|p| < p_o + p_1$:

$$(3.17) \quad \left| \frac{d^h w(p,y,\eta,\tau)}{dy^h} \right| \leqq \frac{\pi}{2}\, (\tau^{-3} + |p|\,\tau^{-1})\, e^{m(1+|p|)|y|} \times m^h (1+|p|)^h \;;$$

$h = 0,1,\dots,n$.

Posons maintenant

$$v(x,y,\eta,\tau) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixp}\, w(p,y,\eta,\tau)\,dp \;.$$

Les estimations (3.13), (3.14), (3.16) et (3.17) nous permettent de conclure que v possède les propriétés énoncées dans la proposition 3.2.

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1

Tout d'abord nous nous plaçons dans le cas particulier suivant. L'opérateur A est de la forme (2.8) et f est représentée par (3.1) où g est telle que :

$$g(\xi,\eta,\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \eta \leqq 4$$

$$g(\xi,\eta,\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad |\xi| \geqq \eta \,.$$

D'autre part nous supposerons que φ est telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi^2+\eta^2)\, d\xi\, d\eta < +\infty \,. \tag{4.1}$$

Dans ce cas la fonction

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi\, d\eta \int_0^{+\infty} g(\xi,\eta,\tau)\, v(x,y,\xi,\eta,\tau)\, d\tau \,,$$

où v est la solution de (3.6) considérée à la proposition 3.2, est solution de $Au = f$ dans $\mathbb{R}^2$.

Dans le cas général on recouvre $\mathbb{R}^2$ par des ouverts $A_0,\ldots,A_7$ tels que A_0 est borné et si (x,y) et (x',y') sont dans le même A_h, $h>0$

$$xx'+yy' > \frac{1}{2}\{\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2}\} \,.$$

La fonction g peut être alors écrite comme somme de huit fonctions g_h avec supp $g_h \subset A_h$, $h = 0,\ldots,7$.

On pose alors $\displaystyle f_h = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_h(\xi,\eta,\tau)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\tau^2]^2}\, d\xi\, d\eta\, d\tau$

et on est ramené au cas précédent.

Remarque : L'auteur pense que le théorème 1.1 a de grandes chances d'être faux si le nombre de variables excède 2. Il doute de l'existence dans $\mathbb{R}^3$ d'une solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,t)$$

où $f(x,y,t) = \sum_{h,k=1}^{+\infty} \exp [\varphi(h,k)(ix + ih^2 t - (y-h)^2 - 1]$

$\varphi(h,k) = [([p(h)]^k!]!$ où $p(h)$ = le $(k+1)$-ième nombre premier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag, 1963.

[2] T. Kawaï : On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations
I - Proceedings of Japan Academy, Vol. 47 N° 6 (1971), 537.
II- Publications of the R.I.M.S. Kyoto Univeristy (1971).

[3] F. Trèves : Locally convex spaces and P.D.E., Springer Verlag.