L. Schwartz

(Conférence n°3) Applications radonifiantes dans l'espace des séries convergentes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 33, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A36_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

D E U X J O U R N E E S p - R A D O N I F I A N T E S

APPLICATIONS RADONIFIANTES DANS L'ESPACE DES SERIES CONVERGENTES

par L. SCHWARTZ

Conférence N° 3

26 Janvier 1972

Les applications radonifiantes entre espaces de suites l^r, $0 < r \leq +\infty$, ont été maintenant beaucoup étudiées. Par contre, on a fort peu de résultats relatifs à l'espace des séries convergentes ; il s'agit du Banach S des suites $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ converge, muni de la norme $\|c\|_S = \operatorname{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |c_o + c_1 + \dots + c_n|$. Actuellement, deux importants résultats ont été énoncés.

Le premier est le théorème de Menchov[♦] :

<u>Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires orthonormée, si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique telle que $\sum_{n\geq 1} |\alpha_n|^2 \log^2 n < +\infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X_n$ converge presque sûrement.</u>

Nous le généraliserons en disant que l'<u>application diagonale $\alpha : (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^2 dans S est 0-radonifiante.</u>

Le deuxième est le théorème de Kwapien-Pelczynski[♦♦] :

<u>Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable de fonctions de $L^1(\Omega,\mu)$, si $|\alpha_n| \leq \text{const.} (\log n)^{-1-\delta}$, $\delta > 0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X_n$ converge μ-presque partout.</u>

Nous le généraliserons en disant que, <u>si</u> $\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_n}{n} < +\infty$, <u>où</u> $\beta_n = \operatorname{Sup}_{k\geq o} |\alpha_{n+k}|$, <u>l'application diagonale α de l^1 ou même $\sigma(l^1, c^o)$ dans $\sigma(S'', S')$ est 1-radonifiante.</u>

Nous démontrerons ces deux théorèmes par le théorème de dualité. Ces démonstrations paraîtront prochainement dans un article du Journal de la Société Mathématique Japonaise (Schwartz [1]).

♦ Voir J. L. Doob, Stochastic Processes, John Wiley, New-York, 1953, théorème (4.2) du § 4 du chap. IV, page 157.

♦♦ S. Kwapien et A. Pelczynski ; communication privée.

§ 1. LE THEOREME DE MENCHOV

Nous nous placerons d'abord dans le cas fini. Nous appliquerons le théorème de dualité des applications radonifiantes avec les notations de l'exposé XXV, page XXV.2, de Schwartz [2]♦ avec $U = l^2$, $V = S$, mais seulement pour la dimension N (autrement dit, l^2 est l'espace $\mathbb{C}^N$, avec la norme $\|(c_n)_{1\leq n\leq N}\|_{l^2} = (\sum_n |c_n|^2)^{1/2}$, et S est l'espace $\mathbb{C}^N$, avec la norme $\|(c_n)_{1\leq n\leq N}\|_S = \sup_{1\leq n\leq N} |c_1+c_2+\dots+c_n|$) ; $u = v$ est l'application diagonale $\alpha : (c_n)_{1\leq n\leq N} \mapsto (\alpha_n c_n)_{1\leq n\leq N}$; les poids A, B qui interviennent ont le poids $\| \ \|_2$.

Nous prendrons comme probabilité ρ sur $V = \mathbb{C}^N$ celle qui est définie par une suite $(Z_n)_{1\leq n\leq N}$ de variables aléatoires sur $(\mathbb{T}, dt)$, où $\mathbb{T} = [0,1]$, dt est la mesure de Lebesgue, et

(1.1) $$Z_n(t) = f(t)(e^{2i\pi nt} + e^{2i\pi(n+1)t} + \dots + e^{2i\pi Nt}),$$

f devant être déterminée plus tard; actuellement elle doit seulement être mesurable.

(1.2) $$\sum_n c_n Z_n(t) = f(t) \sum_n C_n e^{2i\pi nt} ,$$

où $C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$. C'est pour obtenir ces C_n, intervenant dans la norme $\|c\|_S$, qu'on a introduit dans Z_n la somme entre parenthèses. Pour avoir une inégalité de cotype, on doit majorer $\|c\|_S$ à partir de $\|\sum_n c_n Z_n\|_{L^2(\mathbb{T},dt)}$. C'est là qu'intervient une première propriété des polynômes trigonométriques :

(1.3) $$\|c\|_S = \sup_{1\leq n\leq N} |C_n| \leq \|\sum_n C_n e^{2i\pi nt}\|_{L^1(\mathbb{T},dt)} .$$

♦ Schwartz [2] : Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1969-1970 : "applications radonifiantes".

Naturellement, on aurait pu prendre $f=1$ et remplacer ici directement L^1 par L^2. Dans le résultat final, la perte de précision aurait été trop importante. Mais on a (inégalité de Schwarz) :

$$(1.4) \qquad \|\sum_n C_n e^{2i\pi nt}\|_{L^1} \leq \|f \sum_n C_n e^{2i\pi nt}\|_{L^2} \|\frac{1}{f}\|_{L^2} .$$

Nous choisirons $f>0$ de manière que

$$(1.5) \qquad \|\frac{1}{f}\|_{L^2(\mathbb{T},dt)} = 1 .$$

On aura alors

$$(1.6) \qquad \|c\|_S \leq \|\sum_n c_n Z_n\|_{L^2(\mathbb{T},dt)} ,$$

de sorte que ρ est de cotype $(2,S)$ avec

$$(1.7) \qquad {}^*\|\rho\|_{2,S} \leq 1 .$$

On prendra maintenant l'image $\alpha.\rho$; c'est la probabilité sur $\mathbb{C}^N$ définie par la suite de variables aléatoires $(\alpha_n Z_n)_{1\leq n\leq N}$ sur $(\mathbb{T},dt)$,

Nous voulons maintenant une inégalité d'ordre dans l^2, donc nous devons majorer $\left\|\left(\sum_n |\alpha_n|^2 |Z_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^2(\mathbb{T},dt)}$.

Nous utiliserons cette fois la majoration fondamentale des sommes trigonométriques :

$$(1.8) \qquad |e^{2i\pi nt} + \ldots + e^{2i\pi Nt}| \leq \mathrm{Min}\left(\frac{2}{t}, N\right) .$$

Il y aura intérêt à ce que f soit la plus petite possible, mais avec $\|\frac{1}{f}\|_{L^2} = 1$. Elle devra, autant que possible, neutraliser $\frac{1}{t}$ au voisinage de $t=0$; elle devra donc surtout être petite pour t voisin de 0, mais avec $\frac{1}{f} \in L^2$; $f(t) = t^{1/2}$ convient presque, mais $\frac{1}{f} \notin L^2$.

Nous prendrons

$$(1.9) \qquad f(t) = k\begin{cases} t^{1/2} & \text{pour } \frac{1}{N} \le t \le 1 \;; \\ \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} & \text{pour } 0 \le t \le \frac{1}{N} \;; \end{cases}$$

k étant choisi pour que $\|\frac{1}{f}\|_{L^2(\mathbb{T}, dt)} = 1.$

On doit prendre

$$(1.10) \qquad k = (\log N + 1)^{1/2} .$$

On a aussitôt

$$|Z_n(t)|^2 \le k^2 t \cdot \frac{4}{t^2} = \frac{4k^2}{t} \quad \text{dans } \left[\frac{1}{N}, 1\right], \quad \text{donc}$$

$$\int_{\left[\frac{1}{N}, 1\right]} |Z_n(t)|^2 dt \le 4(\log N + 1)\log N$$

$$|Z_n(t)|^2 \le k^2 \frac{1}{N} N^2 = k^2 N \quad \text{dans } \left[0, \frac{1}{N}\right], \quad \text{donc}$$

$$\int_{\left[0, \frac{1}{N}\right]} |Z_n(t)^2| dt \le (\log N + 1) .$$

Finalement :

$$(1.11) \qquad \int_{\mathbb{T}} |Z_n(t)|^2 dt \le (\log N + 1)(4\log N + 1) .$$

On en déduit :

$$(1.12) \qquad \|\sum_n |\alpha_n|^2 \, |Z_n(t)|^2\|_{L^2(\mathbb{T}, dt)} \le (\sum_n |\alpha_n|^2)^{1/2} (\log N + 1)(4\log N + 1) .$$

Donc $\alpha \circ \rho$ est bien d'ordre $(2, 1^2)$, avec

$$(1.13) \qquad \|\alpha \circ \rho\|_{2,1^2} \le \text{const.} (\sum_n |\alpha_n|^2)^{1/2} (\log N + 1) .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer directement le théorème de dualité (nous sommes en dimension finie, aucune difficulté de bidual ou d'approximation) : α est 2-radonifiante de $(l^2)' = l^2$ dans S, avec

$$(1.14)\qquad \pi_2(\alpha) \leq \text{const.} \left(\sum_n |\alpha_n|^2\right)^{1/2} (\log N + 1) .$$

C'est, en termes d'applications radonifiantes, l'inégalité de Menchov, classique dans la démonstration du théorème de Menchov : <u>si $(X_n)_{1\leq n\leq M}$ est une suite de variables aléatoires sur</u> (Ω, μ), <u>de type</u> $(2, l^2)$, <u>avec</u>

$$(1.15)\qquad \|X\|^*_{2,l^2} = \sup_{\|c\|_{l^2}\leq 1} \left\|\sum_n c_n X_n\right\|_{L^2(\Omega,\mu)}$$

<u>(avec</u> $\|X\|^*_{2,l^2} = 1$ <u>si c'est une suite orthonormée !), alors on a la majoration</u>

$$(1.16)\qquad \left\| \sup_{1\leq n\leq N} |\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n| \right\|_{L^2(\Omega,\mu)}$$

$$= \|\alpha \circ X\|_{2,S} \leq \text{Const.} \left(\sum_n |\alpha_n|^2\right)^{1/2} (\log N+1) \|X\|^*_{2,l^2} .$$

Nous devons maintenant passer à la dimension infinie. La démonstration habituelle du théorème de Menchov découpe la suite des entiers ≥ 1 en tranches, la r-ième tranche étant $2^r \leq n < 2^{r+1}$, $r \in \mathbb{N}$. Nous devrons nous placer dans les conditions générales du théorème de dualité, exposé XXV, § 3, de Schwartz [2]. C'est dans de tels cas que cette situation générale semble la plus indispensable. En reprenant la figure de la page XXV.4, nous prendrons $E = G =$ espace des suites "finies", c-à-d. à nombre fini de termes non nuls, ou somme directe $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$, $\mathbb{N}' = \{1, 2, \ldots\}$[♦] ; $\mathcal{E} = \mathcal{G} =$ espace de toutes les suites ou produit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$; $v =$ multiplication diagonale α ; $U = l^2$. Alors $\mathcal{E}' = \mathcal{G}' = \mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$, $E' = G' = \mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, $u = \alpha$. L'espace V sera précisé plus loin, ce ne sera pas l'espace S des séries convergentes mais un sous-espace avec une topologie plus fine.

♦ Il est techniquement plus commode de prendre ici $n \geq 1$ et non $n \geq 0$.

Nous devons d'abord introduire la probabilité cylindrique ρ, de cotype $(2,V)$. Elle sera définie par une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de "variables aléatoires" sur un espace mesuré $(\overline{\mathbb{T}},\overline{dt})$. Mais ici, au lieu de prendre une probabilité, nous prendrons pour $\overline{dt}$ une mesure de masse $+\infty$; comme seul l'espace $L^2(\overline{\mathbb{T}}.\overline{dt})$ interviendra, c'est sans importance, et une multiplication par une fonction convenable ramènerait aussitôt à une probabilité.

L'espace $\overline{\mathbb{T}}$ sera la somme topologique d'une suite d'espaces $\mathbb{T}_r=[0,1]$, $r\in\mathbb{N}$, d'un espace $\mathbb{T}=[0,1]$. La mesure $\overline{dt}$ sera celle de Lebesgue sur chacun de ces intervalles. Et on posera, pour $2^r\leq n<2^{r+1}$:

$$(1.17)\qquad \begin{cases} Z_n(\bar t) = f_r(\bar t)(e^{2i\pi n\bar t}+\ldots+e^{2i\pi(2^{r+1}-1)\bar t}) \\ \qquad \text{pour } \bar t\in\mathbb{T}_r \ ; \\ \quad = 0 \quad \text{pour } \bar t\in\mathbb{T}_s\,,\ s\neq r\ ; \\ \quad = (r+1)e^{2i\pi 2^r\bar t} \quad \text{pour } \bar t\in\mathbb{T}\ . \end{cases}$$

Cherchons l'inégalité de cotype. <u>On peut se contenter de prendre une suite finie</u> $c\in\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$; et c'est bien nécessaire, car on sera dans des conditions où la série de Fourier, autrement, ne convergerait pas !

$$(1.18)\qquad \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}'} c_n Z_n(\bar t) = f_r(\bar t)(\sum_n C_n e^{2i\pi n\bar t})\,, \\ C_n = c_{2^r}+\ldots+c_n\,,\ \text{pour } \bar t\in\mathbb{T}_r\ ; \\ \qquad\qquad = \sum_{r\in\mathbb{N}}(r+1)\,C_{2^{r+1}-1}\,e^{2i\pi 2^r\bar t} \quad \text{pour } \bar t\in\mathbb{T}\ . \end{cases}$$

Sur $\mathbb{T}_r$, nous choisirons f_r comme à (1.9) . Alors la même majoration qu'à (1.6) donnera, en posant $C_n=c_{2^r}+\ldots+c_n$, $M_r(c)=\operatorname{Sup}_n|C_n| = \operatorname{Sup}_{2^r\leq n<2^{r+1}}|c_{2^r}+\ldots+c_n|$:

$$(1.19)\qquad M_r(c)\leq \|\Sigma c_n Z_n\|_{L^2(\mathbb{T}_r,dt_r)}\ .$$

Il faut ajouter une majoration sur Ω. Là, $\sum_n c_n Z_n$ est une série trigonométrique (lacunaire) ; si nous posons
$S_r(c) = |c_{2^r} + \dots + c_{2^{r+1}-1}| = |C_{2^{r+1}-1}|$, nous aurons, par Parseval :

(1,20) $$\sum_{r\geq o} (r+1)^2 S_r^2(c) = \| c_n Z_n\|^2_{L^2(\mathbb{T}, dt)} .$$

En intégrant maintenant pour $\overline{\mathbb{T}}$, $\overline{dt}$:

(1,21) $$\sum_{r\geq o} (M_r^2(c) + (r+1)^2 S_r^2(c)) \leq \|\sum_n c_n Z_n\|^2_{L^2(\overline{\mathbb{T}}, \overline{dt})} .$$

C'est bien une inégalité de cotype. Introduisons l'espace V des suites $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$ telles que $\sum_{r\geq o} (M_r^2(c) + (r+1)^2 S_r^2(c)) < +\infty$, avec la norme

(1,22) $$\|c\|_V = (\sum_{r\geq o} (M_r^2(c) + (r+1)^2 S_r^2(c)))^{1/2} .$$

On peut dire que V est l'espace $l^2((V_r)_{r\in\mathbb{N}})$, où V_r est l'espace $\mathbb{C}^{\{2^r, \dots, 2^{r+1}-1\}}$, muni de la norme $(M_r^2 + (r+1)^2 S_r^2)^{1/2}$; $l^2((V_r)_{r\in\mathbb{N}})$ est l'espace des suites $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$; $x_r \in V_r$, telles que $\sum_{r\geq o} \|x_r\|^2_{V_r} < +\infty$, avec $\|(x_r)_{r\in\mathbb{N}}\|_{l^2((V_r)_{r\in\mathbb{N}})} = (\sum_{r\in\mathbb{N}} \|x_r\|^2_{V_r})^{1/2}$. Cet espace V n'est pas hilbertien, parce que la norme M_r est de type l^∞ ; mais, V_r étant de dimension finie, $V' = l^2((V'_r)_{r\in\mathbb{N}})$ et $V'' = V$, V est réflexif, de sorte que $\sigma(V'', V')$ n'interviendra pas, ce sera V lui-même.

Alors (1,21) donne l'inégalité de cotype :

(1,23) $${}^*\|\rho\|_{2,V} \leq 1 .$$

Cherchons une inégalité d'ordre 2 dans $U = l^2$. On a, par le calcul fait pour (1,13) :

(1.24) $$\int_{\mathbb{T}_r} \sum_n |\alpha_n Z_n(t_r)|^2 \, dt_r \le \text{const.} \Big(\sum_{2^r \le n < 2^{r+1}} |\alpha_n|^2 \Big) (\log 2^r + 1)^2$$

$$\le \text{const.} \sum_{2^r \le n < 2^{r+1}} |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \; .$$

Ensuite, sur $\mathbb{T}$:

$$|Z_n(t)|^2 = (r+1)^2 \quad \text{pour } 2^r \le n < 2^{r+1} \; ,$$

donc

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_n |\alpha_n Z_n(t)|^2 \Big) dt = \sum_{r \in \mathbb{N}} (r+1)^2 \Big(\sum_{2^r \le n < 2^{r+1}} |\alpha_n|^2 \Big)$$

$$\le \text{const.} \sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \; .$$

Finalement :

(1.25) $$\int_{\bar{\mathbb{T}}} \Big(\sum |\alpha_n Z_n(\bar{t})|^2 \Big) d\bar{t} \le \text{const.} \sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \; ,$$

d'où l'inégalité d'ordre suivante : $\alpha \circ \rho$ est de Radon sur l^2, et

(1.26) $$\|\alpha \circ \rho\|_{2, l^2} \le \text{const.} \Big(\sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \Big)^{1/2} \; .$$

Le théorème de dualité (XXV.3;1) de Schwartz [2], compte-tenu de (XXV.4;1) qui élimine trivialement la condition d'approximation pour l^2, donne alors ceci : α est 2-radonifiante de l^2 dans V, et

(1.27) $$\pi_2(\alpha) \le \text{const.} \Big(\sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2 \Big)^{1/2} \; .$$

Comme l^2 est hilbertien, α est même 0-radonifiante (théorème (XXV.1;1) de Schwartz [1]).

Le passage de V à l'espace S des séries convergentes est maintenant immédiat : $V \subset S$, avec une injection continue. En effet, soit $c \in V$. Pour $2^r \le n < 2^{r+1}$: $c_1 + c_2 + \dots + c_n = C_1 + C_3 + \dots + C_{2^r - 1} + C_n$; avec les notations de (1.19) ; la série $\sum_{r \in \mathbb{N}} C_{2^{r+1}-1}$ converge et même converge absolument, car

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} |C_{2^{r+1}-1}| = \sum_{r\in\mathbb{N}} S_r(c) \leq \Big(\sum_{r\in\mathbb{N}} (r+1)^2 S_r^2(c)\Big)^{1/2} \Big(\sum_{r\in\mathbb{N}} \big(\frac{1}{r+1}\big)^2\Big)^{1/2} ,$$

et C_n tend vers 0 pour $n \to \infty$, car $|C_n| \leq M_r(c)$ pour $2^r \leq n < 2^{r+1}$, et $\sum_r M_r^2(c) < +\infty$. Donc, pour $c \in V$, $\sum_n c_n$ converge, c-à-d. $c \in S$, et les majorations ci-dessus montrent que $V \hookrightarrow S$ est continue. Donc α est 0-radonifiante de l^2 dans S, d'où le théorème de Menchov. On peut résumer tout ce paragraphe dans l'énoncé suivant :

Théorème 1 : L'application $\alpha : (c_n)_{n\in\mathbb{N}'} \to (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est 0-radonifiante de l^2 dans V donc dans S, si $\sum_n |\alpha_n|^2 \log^2 n < +\infty$. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires sur (Ω,μ), de type (p, l^2), [si $c \in l^2$, $\sum_n c_n X_n$ converge en probabilité pour $p = 0$, en moyenne d'ordre p pour $p > 0$; $\|X\|^*_{p,l^2} = \sup_{\|c\|_{l^2}\leq 1} \|\Sigma\, c_n X_n\|_{L^p(\Omega,\mu)}$ pour $p > 0$; si la suite est orthonormée, elle est de type $(2, l^2)$, avec $\|X\|^*_{2,l^2} = 1$], et si $\sum_n |\alpha_n|^2 \log^2 n < +\infty$, la série $\sum_n \alpha_n X_n$ converge presque sûrement. En outre, pour $p > 0$:

$$(1.28) \qquad \|\alpha \circ X\|_{p,S} = \Big\| \sup_{n\geq 1} |\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n| \Big\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

$$\leq \|\alpha \circ X\|_{p,V} \leq \underline{\text{const.}} \Big(\sum_n |\alpha_n|^2 (\log n + 1)^2\Big)^{1/2} \|X\|^*_{p,l^2} .$$

Remarque : Si l'on tient compte de tout ce qui est écrit ici, et des antécédents que cela suppose, cette démonstration est plus compliquée que la démonstration "combinatoire" classique de Menchov. Mais elle a un caractère plus général puisqu'elle s'appuie sur le théorème de dualité, donc elle est susceptible de donner bien d'autres résultats analogues (c'est ce que montrera le § 2) ; en outre, le résultat obtenu est plus fort (puisque 0-radonifiant est plus fort que 2-radonifiant).

§ 2. LE THEOREME DE PELCZYNSKI-KWAPIEN

On raisonne ici d'un coup en dimension infinie. Ce qui, en effet, amena inévitablement le partage en tranches au § 1, c'est, dans (1.13), l'intervention de $\log N$; on partage en tranches dans chacune desquelles $\log N$ est à peu près égal à $\log n$ (pour $2^r \leq n < 2^{r+1}$, $r \log 2 \leq \log n < (r+1) \log 2$), donc, pour $N = 2^r$, $\log N \sim \log n$) ; et à son tour ce $\log N$ venait de la fonction f de (1.8), faisant intervenir le nombre N de termes. Si on prend p quelconque au lieu de $p = 2$, c'est $\|\frac{1}{f}\|_{L^{p'}} = 1$ qui remplacera $\|\frac{1}{f}\|_{L^2} = 1$; pour $p = 1$, comme nous allons le faire ici, on peut prendre $f = 1$, ce qui évite un partage en tranches. Nous prendrons ici $U = l^{\infty}$, $V = S$, $p = 1$.

Nous prendrons donc la probabilité cylindrique ρ définie sur $(\mathbb{T}, dt)$, $\mathbb{T} = [0,1]$, par la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de variables aléatoires

(2.1) $$Z_n(t) = e^{2i\pi t} + \ldots + e^{2i\pi nt} .$$

(Ce ne sont pas tout-à-fait les mêmes qu'au § 1, on ne pourrait pas prendre $e^{2i\pi nt} + e^{2i\pi(n+1)t} + \ldots$, non convergente quand on prend une infinité de termes !).

Pour toute suite finie $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$, on aura :

(2.2) $$\sum_n c_n Z_n(t) = \sum_n C_n e^{2i\pi nt} ,$$

où $C_n = c_n + c_{n+1} + \ldots$, n'est pas non plus le même qu'au § 1 (rappelons qu'il s'agit d'une suite finie !).

La majoration pour le cotype est alors triviale : si nous prenons pour l'espace S une norme différente de celle du § 1, mais équivalente :

(2.3) $$\|c\|_S = \sup_{n \geq 1} |(c_n + c_{n+1} + \ldots)| ,$$

on aura

(2.4) $$\|c\|_S = \operatorname{Sup}_n |C_n| \le \|\Sigma_n c_n Z_n\|_{L^1(\mathbb{T},dt)}$$

ou

(2.5) $$^*\|\rho\|_{1,S} \le 1 \,^\blacklozenge \quad .$$

Cherchons maintenant une majoration d'ordre $(1,l^\infty)$.
On a toujours $|Z_n(t)| \le \operatorname{Min}(\frac{2}{t}, n)$. Alors

$$\operatorname{Sup}_n |\alpha_n Z_n(t)| = \operatorname{Sup}_n (|\alpha_n|(\operatorname{Min}\frac{2}{t}, n)) \quad .$$

Nous écrirons

$$\int_{[0,1]} \operatorname{Sup}_n |\alpha_n Z_n(t)|dt = \sum_{N\ge 1} \int_{[\frac{1}{N+1},\frac{1}{N}]}$$

$$\le \sum_{N\ge 1} (\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) \operatorname{Sup}_n (|\alpha_n| \operatorname{Min}(2(N+1),n)) \quad .$$

Appelons $(\beta_n')_{n\in\mathbb{N}'}$ la plus petite suite décroissante majorant $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}'}$,
$\beta_n = \operatorname{Sup}_{k\ge o} |\alpha_{n+k}|$.
Alors, pour $n \ge N$, $\operatorname{Min}(2(N+1),n) \le 2(N+1)$, et $|\alpha_n| \le \beta_n$, donc
$\operatorname{Sup}_{n\ge N}(|\alpha_n|\operatorname{Min}(2(N+1),n)) \le 2\beta_N(N+1)$, et $(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) \operatorname{Sup}_{n\ge N} (|\alpha_n| \operatorname{Min}(2(N+1),n))$
$\le \frac{2\beta_N}{N}$.
Ensuite, pour $[\sqrt{N}] \le n \le N$, $\operatorname{Min}(2(N+1),n) = n \le N$, $|\alpha_n| \le \beta_{[\sqrt{N}]}$, donc

$$(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) \operatorname{Sup}_{[\sqrt{N}]\le n\le N} (|\alpha_n| \operatorname{Min}(2(N+1),n)) \le \frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} \quad .$$

♦ Bien noter que ρ est une probabilité cylindrique sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, non sur $\sigma(S',S)$, car, pour $c \in S$, $\Sigma c_n Z_n$ ne converge pas en probabilité ! On est bien obligé de se placer dans la configuration compliquée de la figure de XXV.4.

Enfin, pour $n \leq [\sqrt{N}]$, $\mathrm{Min}(2(N+1),n) = n \leq \sqrt{N}$, $|\alpha_n| \leq \beta_1$, donc $(\frac{1}{N} - \frac{1}{n+1}) \sup_{n \leq [\sqrt{N}]} (|\alpha_n| \mathrm{Min}(2(N+1),n)) \leq \frac{\beta_1}{N^{3/2}}$. Finalement :

En résumant :

$$\|\sup_n |\alpha_n Z_n|\|_{L^1(\mathbb{T},dt)} \leq \text{const.} \sum_{N\geq 1} \left(\frac{\beta_1}{N^{3/2}} + \frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} + \frac{\beta_N}{N} \right) . \tag{2.6}$$

Mais la 1ère somme est $\leq$ const. $\beta_1 \leq$ const. $\sum_{N\geq 1} \frac{\beta_N}{N}$, la 3ème aussi. Et la 2ème aussi, car pour $m^2 \leq N < (m+1)^2$, $\frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} \leq \frac{\beta_m}{m^2}$, et cette tranche contient $2m+1$ termes. donc

$$\sum_{N\geq 1} \frac{\beta_{[\sqrt{N}]}}{N} \leq \sum_{m\geq 1} \beta_m \frac{2m+1}{m^2} \leq \text{const.} \sum_{m\geq 1} \frac{\beta_m}{m} .$$

Finalement

$$\|\alpha \circ \rho\|_{1,l^\infty} \leq \text{const.} \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_n}{n} . \tag{2.7}$$

Ici $U = l^\infty$. Pour obtenir une application rédonifiante avec le théorème de dualité, nous devons prendre l'adhérence de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$ dans l^∞, qui est c^o, et prendre comme premier espace son dual $\sigma(l^1,c^o)$; la propriété d'approximation voulue est vérifiée. L'espace $V = S$ n'est pas réflexif, donc le 2ème espace sera seulement $\sigma(S'',S')$. On aura toutefois une autre manière de voir les choses. Le dual S' est l'espace des suites à variation bornée ; $c \in S'$ si $\|c\|_{S'} = |c_1| + \sum_{n=2}^{\infty} |c_n - c_{n-1}| < \infty$; ce n'est pas un espace de suites normal, autrement dit $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$ n'est pas dense dans S', de sorte que S'' ne peut pas être identifié à un espace de suites. Remplaçons alors l'espace $V = S$ par l'espace $V = \Sigma$ des suites à sommes partielles bornées, on le munira de la topologie induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, et de la fonction $\beta = \| \ \|_V$; $c \in \Sigma$ si $\|c\|_\Sigma = \sup_n |c_1+c_2+\ldots+c_n| < +\infty$; l'adhérence de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$ dans Σ est S, avec une norme induite qui est celle du § 1, équivalente à (2.3).

Alors ${}^{*}\|\rho\|_{1,\Sigma}$ n'est autre que ${}^{*}\|\rho|_{1,S}$ (avec la norme du δ 1 dans S), puisqu'on la calcule uniquement avec des suites finies $c \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}')}$.
D'autre part β est compacte, autrement dit, la boule unité de Σ est compacte dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$.
On peut donc appliquer la proposition (XXV,3;1) Si λ est une probabilité cylindrique de type 1 sur $\sigma(l^1, c^o)$, et si $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est une suite telle que l'on ait $\sum_n \frac{\beta_n}{n} < +\infty$, $\beta_n = \operatorname{Sup}_k |\alpha_n + \dots + \alpha_{n+k}|$, alors $\alpha \cdot \lambda$ est une probabilité de Radon sur Σ muni de la topologie induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$, d'ordre 1 pour la norme de Σ. On aura un énoncé correspondant en termes de suites de variables aléatoires.
Si maintenant on peut écrire $\alpha_n = \varepsilon_n \alpha'_n$, avec $\beta'_n = \operatorname{Sup}_{k\geq 0} |\alpha'_n + \dots + \alpha'_{n+k}|$, et $\sum_n \frac{\beta'_n}{n} < +\infty$, alors on aura une factorisation $\alpha = \varepsilon \circ \alpha'$; et si $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est ≥ 0, décroissante♦ et tend vers 0, ε est compacte de S dans S (théoreme d'Abel), et α sera 1-radonifiante de $\sigma(l^1, c^o)$ dans S lui-même.
On aura finalement les résultats suivants :

Théorème 2 : L'application $\alpha : (c_n)_{n\in\mathbb{N}'} \to (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est 1-radonifiante de $\sigma(l^1, c^o)$ dans $\sigma(S'', S')$, ou dans Σ muni de la topologie induite par $\mathbb{C}^{\mathbb{N}'}$ et de sa norme pour le calcul de l'ordre d'une probabilité de Radon, si $\sum_n \frac{\beta_n}{n} < +\infty$, où $\beta_n = \operatorname{Sup}_{k\geq 0} |\alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+k}|$; si $\alpha_n = \varepsilon_n \alpha'_n$, où ε_n tend vers 0, $\beta'_n = \operatorname{Sup}_{k\geq 0} |\alpha'_n + \dots + \alpha'_{n+k}|$, $\sum_n \frac{\beta'_n}{n} < +\infty$ (ces conditions seront vérifiées si $|\alpha_n| \leq (\log n)^{-1-\delta}$, $\delta > 0$), elle est 1-radonifiante de l^1 dans S.

Si $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est une suite de variables aléatoires sur (Ω, μ), de type (p, c^o), $p \geq 1$, [c-à-d. si, pour toute suite $c \in c^o$, $\sum_n c_n X_n$ converge en moyenne d'ordre p, cela veut exactement dire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de $L^p(\Omega, \mu)$ est scalairement l^1 ; et alors :

♦ Au lieu de la factorisation $\varepsilon \circ \alpha'$, on peut prendre $\alpha' = \varepsilon$, et faire opérer ε comme opérateur compact $l^1 \to l^1$, un raisonnement analogue à celui de Schwartz [2], prop.(XII,2;12) peut alors être utilisé ; et alors il n'est plus nécessaire de supposer décroissante.

$$\|X\|^*_{p,c^o} = \sup_{\|c\|_{c^o}\leq 1} \|\sum_n c_n X_n\|_{L^p(\Omega,\mu)} \quad] ,$$

et si α vérifie les conditions ci-dessus, alors $\sum_n \alpha_n X_n$ a presque sûrement des sommes partielles bornées (et converge presque sûrement dans le cas de la factorisation $\alpha = \varepsilon \circ \alpha'$). Et

$$\|\sup_n |\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n| \|_{L^p(\Omega,\mu)} \leq \text{const.} \left(\sum_n \frac{\beta_n}{n}\right) \|X\|^*_{p,c^o} .$$

BIBLIOGRAPHIE

Schwartz [1] : "Probabilités cylindriques et applications radonifiantes", à paraître dans le Journal de la Société Mathétique Japonaise.

Schwartz [2] : "Application radonifiantes", Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1969-1970.