Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

S. Alinhac

Une caractérisation des fonctions harmoniques dans un ouvert borné par « certaines propriétés de moyenne »

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 30, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A30_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

UNE CARACTERISATION DES FONCTIONS HARMONIQUES DANS UN OUVERT BORNE PAR "CERTAINES PROPRIETES DE MOYENNE".

par S. ALINHAC

Exposé N° XXX

31 Mai 1972

INTRODUCTION

Cet exposé fait suite à celui de M. Brunel [6]. Il présente quelques résultats sur les propriétés de moyenne des fonctions harmoniques analogues à ceux de [5], que M. Brunel avait expliqués, mais obtenus par des méthodes d'analyse classique et d'équations aux dérivées partielles (un peu dans l'esprit de [1]), très différentes des méthodes de théorie ergodique employées dans [2], [3], [4], [5].

L'essentiel consiste en l'introduction d'une "fonction moyenne" de la fonction f donnée ; cette fonction est solution d'une équation hyperbolique singulière dans un ouvert D de R^{n+1} "au-dessus" de l'ouvert Ω de R^n où f est définie, et ses valeurs sur <u>tout</u> le bord de l'ouvert D sont connues. Une estimation intégrale met en évidence la "surdétermination" du problème et permet de conclure à l'harmonicité de f.

§ I. L'ESTIMATION INTEGRALE

Soient Ω un ouvert borné de R^n, de classe C^1, $r \in C^1(\bar{\Omega})$ une fonction positive sur Ω, nulle sur $\partial\Omega$.

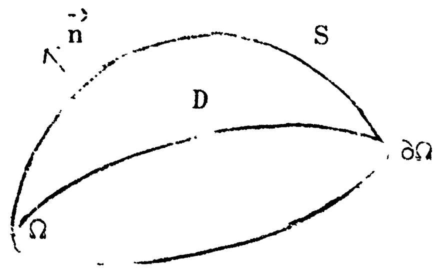
On désigne par D le domaine de R^{n+1}((x,t) sont les coordonnées d'un point de R^{n+1})

$$D = \{(x,t),\ 0 < t < r(x),\ x \in \Omega\}.$$

et par S l'ensemble $\{(x,t),\ x \in \Omega,\ t = r(x)\}$.

On considère une fonction $u \in C^2(\bar{D})$, vérifiant

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}.$$



On pose $\tilde{u}(x) = u(x,r(x)),\ x \in \Omega.$

$$P_\alpha(u) = -\Delta_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{t}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

<u>Proposition 1</u> : Avec les hypothèses et les notations précédentes, on a

$$2\int_D \frac{\partial u}{\partial t} P_\alpha(u)\,dx\,dt = 2\alpha \int_D \frac{1}{t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dt + \int_\Omega \{|\text{grad } \tilde{u}|^2 - |\text{grad } f|^2\}dx +$$

$$+ \int_\Omega (1 - |\text{grad } r|^2)\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,r(x))\right]^2 dx$$

<u>Preuve</u> : en posant $p_i = -2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}$, $q = |\text{grad } u|^2$, on a en effet

$2\frac{\partial u}{\partial t} P_\alpha(u) = 2\frac{\alpha}{t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \text{div}(p_i, q)$, et $\int_D \text{div}(p_i, q)\,dx\,dt = \int_\Omega -q\,dx + \int_S (p_i, q)\,\vec{n}\,d\sigma$

l'intégrale sur S, ramenée à une intégrale sur Ω par la carte

$$\begin{cases} R : \Omega \to S \\ \quad x \mapsto (x, r(x)) \end{cases}$$

vaut

$$\int_\Omega |\text{grad } \tilde{u}|^2\,dx + \int_\Omega (1 - |\text{grad } r|^2)\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,r(x))\right]^2 dx. \text{ qed.}$$

Corollaire 1 : Si $|\text{grad } r| \leq 1$, $\alpha > 0$, u à valeurs réelles, $P_\alpha(u) = 0$ dans D et $\tilde{u}(x) = f(x)$ dans Ω, alors $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ dans D et f est harmonique dans Ω.

Proposition 2 : Si r est supposée seulement lipschitzienne de rapport inférieur ou égal à un, l'estimation de la proposition 1 et son corollaire restent valables.

Preuve : Soit $\tilde{r}$ le prolongement de r par 0 hors de $\bar{\Omega}$; on "régularise" $\tilde{r}$ en posant

$$r_\varepsilon = \tilde{r} * \varphi_\varepsilon$$

(où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi\, dx = 1$, $\varphi \in D(R^n)$, et $\varphi = 1$ pour $|x| \leq 1$).

On vérifie aisément que $r_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$, $|\text{grad } r_\varepsilon| \leq 1$, r_ε converge uniformément vers $\tilde{r}$, et si $\tilde{r}$ est différentiable en x (ce qui a lieu pour presque tout x), $(\text{grad } r_\varepsilon)(x) \underset{\substack{\varepsilon \to 0 \\ > 0}}{\longrightarrow} (\text{grad } \tilde{r})(x)$.

On réalise alors une intégration par parties comme dans la proposition 1, mais cette fois dans le domaine D_ε.

$$D_\varepsilon = \{(x,t),\ 0 < t < r_\varepsilon(x),\ x \in \Omega\},$$

limité par Ω,

$$S_\varepsilon = \{(x,t),\ t = r_\varepsilon(x),\ x \in \Omega\}$$

et une bande latérale

$$L_\varepsilon = \{(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ 0 \leq t \leq r_\varepsilon(x)\}.$$

En passant à la limite dans les intégrales lorsque $\varepsilon \underset{>}{\to} 0$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient l'estimation voulue.

§ LES MOYENNES A POIDS

La fonction $u(x,t)$, "moyenne en volume" de f, définie par $t > 0$,

$$u(x,t) = \underset{B(x,t)}{\text{moy}}\, f,$$

peut s'écrire aussi

$$u(x,t) = \frac{1}{\omega_n t^n} \int_{B(0,t)} f(x-y)\, dy = (f * N_t)(x),$$

où $N_t = \dfrac{1}{\omega_n t^n} \chi_{B(0,t)}$ est un "noyau", distribution de R^n à support compact (ω_n = volume de la boule unité de R^n).

On sait que N_t, en tant que distribution dépendant du paramètre $t > 0$, vérifie $P_{n+1}(N_t) = 0$, avec les conditions de bord

$$\begin{cases} N_t \underset{t\to 0}{\to} \delta \\ \dfrac{\partial N_t}{\partial t} \underset{t\to 0}{\to} 0 \end{cases}$$

D'une façon plus générale, en cherchant des "noyaux de moyenne" possédant des propriétés analogues, on est conduit à poser

$$N_{t,\beta} = \frac{1}{\sigma_n C_{n,\beta}} \frac{1}{t^n} \begin{cases} (1 - \frac{r^2}{t^2})^\beta & \text{si } r = |x| < t \\ 0 & \text{si } r \geq t. \end{cases}$$

On définit ainsi, pour $\mathrm{Re}\beta > -1$, une distribution intégrable sur R^n, dépendant du paramètre $t > 0$ (σ_n = aire de la sphère unité dans R^n, $C_{n,\beta} = \int_0^1 r^{n-1}(1-r^2)^\beta\, dr$).

1) Pour $\mathrm{Re}\,\beta > +1$, on vérifie, par des calculs élémentaires, que

$$\begin{cases} -\Delta_x N_{t,\beta} + \dfrac{\partial^2 N_{t,\beta}}{\partial t^2} + \dfrac{2\beta+n+1}{t}\dfrac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} = 0 \\ N_{t,\beta} \to \delta \quad \text{quand } t \underset{>}{\to} 0 \\ \dfrac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} \to 0 \quad \text{quand } t \underset{>}{\to} 0. \end{cases}$$

L'égalité et les convergences écrites prises au sens de $D'(R^n)$.

2) Pour $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, on obtient, en intégrant par parties,

$$(2\beta + n)\, C_{n,\beta} = 2\beta\, C_{n,\beta-1}.$$

Au cours des calculs qui permettent d'établir 1), on remarque que pour $\mathrm{Re}\,\beta > 0$,

$$2\beta\, \chi_{t,\beta-1} = 2\beta\, \chi_{t,\beta} - \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_{t,\beta}$$

(on note $\chi_{t,\beta} = \sigma_n C_{n,\beta} N_{t,\beta}$).

Cette relation, jointe à celle sur les $C_{n,\beta}$, fournit

$$(2\beta + n)\, N_{t,\beta-1} = 2\beta\, N_{t,\beta} - \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} N_{t,\beta}.$$

$N_{t,\beta}$ se prolonge donc, pour $t > 0$ fixé, en une distribution méromorphe de β, ayant des pôles simples aux points

$$\beta = -\,{}^{n}/2 - 1 - q, \ q \text{ entier } \geq 0.$$

De plus, si β n'est pas un pôle, $N_{t,\beta}$ est deux fois continuement dérivable en t et ses dérivées prolongent celles calculées en 1).

On a ainsi prouvé le

Théorème 1 : pour $\beta \in C$, $\beta \neq -\,{}^{n}/2 - 1 - q$, q entier ≥ 0, la distribution $N_{t,\beta}$ vérifie

$$\left.\begin{array}{l} P_{2\beta+n+1}(N_{t,\beta}) = 0 \\ N_{t,\beta} \underset{t \underset{>}{\to} 0}{\to} \delta \\ \dfrac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} \underset{t \underset{>}{\to} 0}{\to} 0 \end{array}\right\} \text{ dans } D'(R^n).$$

Remarques : 1) $\beta = 0$ correspond au noyau de la moyenne en volume (noté N_t au début du paragraphe).

$\beta = -1$ à celui de la moyenne en surface. Les noyaux correspondant à $\beta = -p$, p entier ≥ 1, s'ils existent, sont des distributions portées par la sphère de rayon t.

2) Si β est réel, $N_{t,\beta}$ l'est.

3) Si β est un pôle, $\beta = -\,{}^{n}/2 - 1 - q$, $2\beta + n + 1$, coefficient de $\frac{1}{t}$ dans l'équation $P_{2\beta+n+1}(u) = 0$, est un entier impair négatif.

En intégrant la distribution $N_{t,\beta}$ le long d'un petit contour fermé simple entourant le pôle, on obtient pour les distributions $R_{t,q} = \text{rés}_{-n/2-1-q} N_{t,\beta}$ la propriété

$$\left.\begin{aligned} P_{-2q-1}(R_{t,q}) &= 0 \\ R_{t,q} &\xrightarrow[t\to 0]{} 0 \\ \frac{\partial R_{t,q}}{\partial t} &\xrightarrow[t\to 0]{} 0 \end{aligned}\right\} \quad q \text{ entier } \geq 0.$$

§ III. APPLICATION AU PROBLEME POSE: RESULTATS

Les notations sont celles de I; les hypothèses sur r celles du corollaire 1.

f étant donné dans Ω, déjà assez régulière, et $\tilde{f}$ en étant un prolongement régulier, on pose

$$u_t = \tilde{f} * N_{t,\beta} \quad , \ \beta \text{ n'étant pas un pôle.}$$

On définit ainsi une distribution de R^n dépendant continuement de t, $t > 0$. Si la distribution de $R^n \times R_+$ qu'elle définit, notée u, a une trace sur S, on dira que f a la propriété de β-moyenne sur les boules de rayons r si

$$u_{|S} \circ R = f, \text{ ou } R \text{ est la carte de } \Omega \text{ sur } R$$

définie en I.

<u>Théorème 2</u> : Si $\beta > -1$, $f \in H^2(\Omega)$, la définition de "f a la propriété de β-moyenne sur les boules de rayons r" a un sens, et si f a cette proriété, f est harmonique dans Ω.

<u>Preuve</u> : $N_{t,\beta}$ est intégrable, et $\|N_{t,\beta}\|_{L^1(R^n)} = 1$. De plus

$$\frac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} = -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \, N_{t,\beta} \, ,$$

$$\frac{\partial^2 N_{t,\beta}}{\partial t^2} = \frac{1}{t^2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} x_i \, x_j \, N_{t,\beta}$$

et les normes L^1 de $\frac{1}{t} x_i N_{t,\beta}$ et $\frac{1}{t^2} x_i x_j N_{t,\beta}$ sont bornées indépendamment de $t > 0$.

La distribution u, définie par

$\langle u,\varphi\rangle = \int_{R_+} dt \, \langle u_t, \varphi(\cdot,t)\rangle$, se trouve donc dans $L^2(R^n \times R_+)$, car

$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq \int dt \, \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^2(R^n)} \, \|u_t\|_{L^2(R^n)}$$

et
$$\|u_t\|_{L^2(R^n)} \leq \|\tilde{f}\|_{L^2(R^n)} \, \|N_{t,\beta}\|_{L^1(R^n)} \, .$$

On voit semblablement que u'_t définit dans $R^n \times R_+$ une distribution qui coïncide avec $\frac{\partial u}{\partial t}$ (dérivée de u par rapport à t au sens des distributions) et appartient à $L^2(R^n \times R_+)$; de même pour u''_t .

La régularité "tangentielle" de u suit immédiatement de celle de f; on en conclut que $u \in H^2(R^n \times R_+)$.

Soit alors une suite (f_n) de fonctions de $D(R^n)$,

$$f_n \to \tilde{f} \quad \text{dans } H^2(R^n),$$

et posons $u_p(x,t) = (f_p * N_{t,\beta})(x)$. La formule

$$u_p(x,t) = \frac{1}{\sigma_n C_{n,\beta}} \int_{B(0,1)} f_p(x-tu)(1-|u|^2)^\beta du$$

montre que

$$u_p \in C^\infty(R^n \times \bar{R}_+), \text{ avec}$$

$$\begin{cases} u_p(x,0) = f_p(x) \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Grâce à ce qui a été dit précédemment sur u, on voit que $u_p \to u$ dans $H^2(R^n \times R_+)$.

Appliquons alors à u_p l'estimation de I :

$$2(2\beta + n + 1) \int_D \frac{1}{t} \left(\frac{\partial u_p}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leq \int_\Omega \{|\text{grad } f_p|^2 - |\text{grad } \tilde{u}_p|^2\} dx$$

où $\tilde{u}_p(x) = u_p(x, r(x))$.

Par hypothèse de moyenne, $\tilde{u}_p \underset{p\to+\infty}{\to} f$ dans $H^{3/2}(\Omega)$; en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$2(2\beta + n + 1) \int_D \frac{1}{t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt \leq 0. \qquad \text{qed.}$$

On peut prouver d'une manière analogue un théorème un peu plus général, en "répartissant" la régularité entre f et $N_{t,\beta}$:

<u>Theorème 3</u> : Si $-p < \beta \leq -p+1$, $p \in Z$, et $f \in H^{p+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, et si f a la propriété de β-moyenne, $\beta > -\frac{n+1}{2}$, alors f est harmonique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Delsarte, J. L. Lions : Moyennes généralisées. Commentarii Math. Helvetici 1959.

[2] M. A. Ackoglu, R. W. Sharpe : Ergodic theorems and boundaries, Amer. Math. Soc. Vol. 132, 1968.

[3] J. R. Baxter : Restricted mean values and harmonic functions, à paraître.

[4] Heath : Functions possessing restricted mean value properties, à paraître.

[5] Heath, Orey : Travail à paraître.

[6] Brunel : Exposé au séminaire de l'Ecole Polytechnique (1972)

[7] H. Rhee : A characteristic initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation in a quadrant of R^n; Journal of the London Math. Soc. Vol. 4, avril 1972.