Y. Meyer

Étude asymptotique des vibrations des sphères

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 28, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A28_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77

(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DES VIBRATIONS DES SPHERES

par Y. MEYER

Exposé N° XXVIII

17 Mai 1972

§ 1. Soit $n \geq 3$ un entier naturel, $\mathbf{R}^n$ l'espace euclidien n-dimensionel, $\Sigma = S_{n-1}$ la sphère $x_1^2+\ldots+x_n^2 = 1$ et $SO(n)$ le groupe orthogonal spécial. On peut munir Σ d'une structure riemannienne invariante par l'action de $SO(n)$; la distance géodésique entre deux points σ et σ_0 de Σ sera alors notée $d(\sigma,\sigma_0)$ et $\Delta : \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \to \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ désignera l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à cette métrique riemannienne.

Nous allons étudier le comportement asymptotique ($t \to +\infty$) des solutions indéfiniment dérivables $u : \Sigma \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

Soient $H_k \subset \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$, $k \geq 0$, les espaces usuels d'harmoniques sphériques; $\varphi : \Sigma \to \mathbf{R}$ appartient à H_k si φ est la restriction à Σ d'un polynôme homogène de degré k en n variables dont le laplacien ordinaire est nul. Les H_k sont les espaces propres de Δ et les valeurs propres correspondantes sont $-k(k+n-2)$ ([2]).

Toute solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma \times \mathbf{R})$ de (1) peut être écrite sous la forme

$$(2) \quad u(\sigma,t) = a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k(\sigma) \cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t + b_k(\sigma) \sin\sqrt{k(k+n-2)}\, t$$

où a_0 est une constante, a_k et b_k appartiennent à H_k, $k \geq 1$, et où la série (2) ainsi que toutes celles obtenues en appliquant les opérateurs Δ et $\frac{\partial}{\partial t}$ convergent uniformément sur $\Sigma \times \mathbf{R}$.

<u>Théorème 1</u> : <u>En dimension</u> $n \geq 3$, <u>il existe une constante</u> $C_n > 0$ <u>telle que, pour toute solution indéfiniment dérivable</u> u <u>de</u> (1) <u>dont le développement est donné par la formule</u> (2) <u>et pour tout</u> σ <u>de</u> Σ <u>on ait</u>

$$(3) \qquad |a_0| + \sum_{k\geq 1} (|a_k(\sigma)| + |b_k(\sigma)|) \leq C_n \varlimsup_{t\to+\infty} |u(\sigma,t)|.$$

Plus précisément, soit $u : \Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution indéfiniment dérivable de (1) dont la moyenne a_0 est nulle. Alors, pour tout $\sigma \in \Sigma$,

$$(4) \qquad \sum_{k\geq 1} |a_k(\sigma)| + |b_k(\sigma)| \leq C_n \overline{\lim_{t\to+\infty}} \; u(\sigma,t).$$

La meilleure constante possible C_n dans (4) n'est pas nécessairement la même que dans (3). L'inégalité (4) permet de déterminer les points $\sigma \in \Sigma$ où l'oscillation prendra de très grandes valeurs, positives et négatives.

Le théorème 1 montre, en particulier, qu'en deux points antipodiques σ et $-\sigma$ de Σ, $\overline{\lim_{t\to+\infty}} |u(\sigma,t)$ et $\overline{\lim_{t\to+\infty}} |u(-\sigma,t)$ sont du même ordre de grandeur : on peut même ([4]) améliorer ce résultat en montrant qu'il existe une constante δ_n telle que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $|u(\sigma,t_0)| \leq \delta_n \sup_{[t_0 . t_0 +2\pi]} |u(-\sigma,t)|$. Si donc $u(\sigma,t_0)$ est très grand, cette forte vibration se répercutera au point antipodique $-\sigma$ au bout d'un temps ne dépassant pas 2π.

Mais comment cette forte vibration se propage-t-elle de σ en $-\sigma$? Est-ce en donnant de fortes vibrations aux points "intermédiaires" ?

Théorème 2 : Soient σ_0 un point de Σ, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ deux nombres positifs arbitrairement petits et $T > 0$ un nombre arbitrairement grand. On peut alors trouver une solution indéfiniment dérivable u de (1) telle que

(5) $|u(\sigma,t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ dès que $d(\sigma,\sigma_0) \geq \eta$ et $d(\sigma,-\sigma_0) \geq \eta$

(6) $|u(\sigma,t)| \leq \varepsilon$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ lorsque $|t| \leq T$

(7) $\overline{\lim_{t\to+\infty}} |u(\sigma_0,t)| \geq 1$ et $\overline{\lim_{t\to+\infty}} (u(-\sigma_0,t)| \geq 1.$

Le théorème 2 signifie qu'une vibration qui était restée négligeable "pendant des siècles" peut dans un voisinage arbitrairement petit du "pôle nord" et du "pôle sud" devenir très grande tout en restant toujours négligeable sur le reste de la sphère.

Les solutions indéfiniment dérivables de (1) sont presque périodiques; c'est-à-dire que ce sont des fonctions presque périodiques du temps uniformément par rapport à $\sigma \in \Sigma$ ([3] ch.II). Nous allons caractériser l'espace de toutes les fonctions continues $u : \Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solutions "généralisées" de (1) – c'est-à-dire solutions au sens des distributions – qui sont presque périodiques – c'est-à-dire telle que $u(\sigma,t)$ soit presque périodique en t uniformément en σ.

Théorème 3 : Les solutions presque périodiques u de (1) sont données par les séries (infinies)

$$(8) \qquad u(\sigma,t) = a_0 + \sum_{k\geq 1} a_k(\sigma) \cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t + b_k(\sigma) \sin\sqrt{k(k+n-2)}\, t$$

telles que a_0 soit une constante, a_k et b_k des harmoniques sphériques de degré k et que la série

$$(9) \qquad |a_0| + \sum_{k\geq 1} a_k(\sigma)| + |b_k(\sigma)|$$

converge uniformément sur Σ.

Evidemment la convergence uniforme de (9) sur Σ entraîne la convergence uniforme de la série (8) sur $\Sigma \times \mathbb{R}$ et la somme u de (8) est donc presque périodique; il est moins évident que toute solution presque-périodique de (1) admette une telle représentation.

Théorème 4 : Il existe une solution généralisée $u : \Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (1) qui est continue et bornée mais qui n'est pas presque-périodique.

Malgré son aspect technique, le résultat essentiel est le théorème 1. Sa démonstration est donnée au paragraphe 2. Le théorème 3 s'obtient alors sans difficulté. En utilisant les propriétés des fonctions zonales nous en déduirons le théorème 2 (§ 3) dont le théorème 4 sera un corollaire facile.

§ 2. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Nous allons d'abordl'énoncer sous une forme un peu allégée (mais équivalente).

Proposition 1 : Si $n \geq 3$, il existe une constante C_n telle que, pour toute somme finie $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$(10) \qquad s(t) = \sum_{k\geq 1} a_k \cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t + b_k \sin\sqrt{k(k+n-2)}\, t$$

on ait

$$(11) \qquad \sum_{k\geq 1} |a_k| + |b_k| \leq C_n \overline{\lim_{t\to+\infty}}\ s(t).$$

Admettons la proposition 1 et démontrons le théorème 1. Pour tout σ fixé a_o est la moyenne temporelle de la fonction presque-périodique $t \to u(\sigma,t)$. On a donc $|a_o| \leq \lim_{t\to+\infty} |u(\sigma,t)|$. Cette inégalité, jointe à (11) donne (3) — les meilleures constantes possibles dans (3) et (11) ne sont peut-être pas les mêmes.

La démonstration de la proposition 1 se fait à l'aide des lemmes suivants.

Lemme 1 : Soient $p_1,\dots,p_n$ et p $n+1$ nombres premiers distincts. Alors $\sqrt{p}$ n'appartient pas au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_n})$.

Pour tout nombre premier l désignons par $\mathbb{Q}_l$ le corps l-adique correspondant. En utilisant la loi de réciprocité quadratique et le théorème de Dirichlet ([7]) p.16 et p.103) on peut trouver un nombre premier l tel que, dans $\mathbb{Q}_l$, $p_1,\dots,p_n$ deviennent des carrés mais que p n'en soit pas un. Le lemme 1 est donc prouvé.

Lemme 2 : Soit D l'ensemble des entiers $q \geq 1$ sans diviseurs carrés (on convient ici que $1 \in D$). Alors les nombres $\sqrt{q}$ sont $\mathbb{Z}$- linéairement indépendants.

C'est une conséquence immédiate du lemme 1.

Lemme 3 : Soit $m \geq 1$ un entier, $\omega_1,\dots,\omega_m$ m nombres réels $\mathbb{Z}$ - linéairement indépendants et $s_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, m fonctions continues et 2π périodiques. Alors

$$(12)\qquad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\ s_1(\omega_1 t) + \dots + s_m(\omega_m t) = \sup_{\mathbb{R}} s_1(t) + \dots + \sup_{\mathbb{R}} s_m(t).$$

C'est une conséquence immédiate du théorème de Kronecker ([4] p.175)

Lemme 4 : Soit $\theta > 1$ un nombre réel et $N \geq 1$ un entier. Soit Λ la réunion de N suites croissantes Λ_j d'entiers, $1 \leq j \leq N$. Supposons que chaque Λ_j puisse être écrite $\Lambda_j = \{n(i,j), i\geq 1\}$ où $1 \leq n(1,j)$ et $\theta n(i,j) \leq n(i+1,j)$ pour tout $i \geq 1$ et $1 \leq j \leq N$.

Alors il existe une constante $C(\theta,N)$, ne dépendant que de θ et de N telle que, pour toute somme finie $s(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \cos\lambda t + b_\lambda \sin\lambda t$, on ait

$$(13)\qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| + |b_\lambda| \leq C(\theta,N) \sup_{[0,2\pi]} s(t).$$

Cela résulte essentiellement de la démonstration du théorème 5.7.5 de [6] p.124.

Lemme 5 : Soit $q \geq 2$ un entier sans diviseurs carrés, $a \geq 1$ un entier et $\theta_q > 1$ l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Il existe un ensemble fini A de solutions $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a$ $(x \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z})$ tel que $\operatorname{Card} A \leq a^2$ et tel que toute solution $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a$ s'écrive $z = \alpha\theta_q^j$ où $j \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in A$.

Ceci est démontré dans [1] p.90, theorem 5.

Lemme 6 : L'unité fondamentale $\theta_q > 1$ d'un corps quadratique réel vérifie l'inégalité $\theta_q \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La démonstration de la proposition 1 est maintenant aisée. On appelle E l'ensemble des couples (j,q), $j \geq 1$, $q \in D$ tels que, pour un certain $k \geq 1$, on ait $k(k+n-2) = j^2 q$. On pose alors

$$a_k = \alpha(j,q) \text{ et } b_k = \beta(j,q),\ k \geq 1,\ (j,q) \in E.$$

La somme finie $s(t) = \sum_{k\geq 1} a_k \cos\sqrt{k(k+n-2)}\,t + b_k \sin\sqrt{k(k+n-2)}\,t$ devient $\sum_{(j,q)\in E} \alpha(j,q)\cos j\sqrt{q}\,t + \beta(j,q)\sin j\sqrt{q}\,t$. Pour tout $q \in D$ fixé, posons $s_q(t) = \sum_{(j,q)\in E} \alpha(j,q)\cos jt + \beta(j,q)\sin jt$ de sorte que

$$s(t) = \sum_{q\in D} s_q(\sqrt{q}\,t). \tag{14}$$

Le lemme 3 donne

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, s(t) = \sum_{q\in D} \sup_{\mathbb{R}} s_q(t) \tag{15}$$

et il reste, pour tout $q \in D$ à calculer $\sup_{\mathbb{R}} s_q$.

Deux cas se présentent.

Si $q = 1$, $k(k+n-2) = j^2$ implique $(2k+n-2)^2 - 4j^2 = (n-2)^2$ et $2k+n-2 \pm 2j$ sont des diviseurs de $(n-2)^2$. Il y a, au plus, un nombre fini de valeurs de j possibles et l'on a

$$(16) \qquad \sum_{(j,1)\in E} |\alpha(j,1)| + |\beta(j,1)| \le C_n \sup_{\mathbb{R}} s_1(t).$$

Si $q \ge 2$, on a $(2k+n-2)^2 - 4j^2q = (n-2)^2$. Posons $z = 2k+n-2+2j\sqrt{q}$; on a $z = \alpha\theta_q^s$ où $\alpha > 0$ parcourt un ensemble fini $A(q,n)$ d'au plus $(n-2)^4$ éléments, $s \in \mathbb{Z}$ est un entier et $\theta_q \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si $z \to \bar{z}$ est l'automorphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$, on en déduit $\bar{z} = \bar{\alpha}\theta_q^{-s}$, $4j\sqrt{q} = \alpha\theta_q^s - \bar{\alpha}\theta_q^{-s}$ et donc, pour chaque $\alpha \in A(q,n)$, $j \in \Lambda(\alpha)$ qui peut être ordonné en une suite j_s, $s \ge s_0$, vérifiant $j_s \ge 1$ et $j_{s+1} \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2} j_s$ ($\bar{\alpha} > 0$ car $\alpha\bar{\alpha} = (n-2)^2$). Le lemme 4 peut être appliqué et donne, pour tout $q \ge 2$ appartenant à D,

$$(17) \qquad \sum_{(j,q)\in E} |\alpha(j,q)| + |\beta(j,q)| \le C_n \sup_{\mathbb{R}} s_q(t).$$

Les relations (15), (16) et (17) réunies donnent (10).

§ 3. PREUVE DU THEOREME 2

Soit σ_0 le point $(0,\dots,0,1)$ de Σ, G le sous-groupe de $SO(n)$ laissant σ_0 invariant et $\varphi : \Sigma \to \mathbb{C}$ la fonction $\varphi(x_1,\dots,x_n) = (x_n + ix_1)^k$; il est clair que φ appartient à H_k. Posons

$$(18) \qquad Z_k(\sigma) = \int_G \varphi(g\sigma)\, dg$$

ou $g\sigma$ est le résultat de l'action de g sur σ et dg la mesure de Haar de G. On a $Z_k(\sigma_0) = 1$, $Z_k(-\sigma_0) = (-1)^k$ tandis que sur tout compact K de Σ ne contenant pas σ_0 et $-\sigma_0$, Z_k tend uniformément vers 0([2]).

Il existe d'autre part une suite ε_k, $k \ge 0$, de nombres +1 ou -1 telle que, pour tout t réel et tout $N \ge 1$,

$$(19) \qquad \left|\sum_1^N \varepsilon_k e^{ikt}\right| \le 16\sqrt{N} \qquad \text{(lemme 2, p. 134 [4]).}$$

Considérons $u(\sigma,t) = \frac{1}{N}\sum_1^N \varepsilon_k Z_k(\sigma) \cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t$. On a

$\sqrt{k(k+n-2)}\,t = k + \frac{n-2}{2} + O(\frac{1}{k})$ ce qui entraîne

$|\cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t - \cos(k+\frac{n-2}{2})\, t| \le \frac{C|t|}{k}$ et

$|u(\sigma,t) - \frac{1}{N}\sum_1^N \varepsilon_k Z_k(\sigma)\cos(k+\frac{n-2}{2})t| = O(|t|\,\frac{\log N}{N})$; (19) donne alors

$|u(\sigma,t)| \le \frac{16}{\sqrt{N}} + O(|t|\,\frac{\log N}{N})$. Par ailleurs $|u(\sigma,t)| \le \frac{1}{N}\sum_1^N (Z_k(\sigma)|$;

quitte à choisir N assez grand, on peut assurer que $|u(\sigma,t)| \le \varepsilon$ si, soit $|t| \le T$, soit $d(\sigma,\sigma_0) \ge \eta$ et $d(\sigma,-\sigma_0) \ge \eta$. Cependant $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, u(\sigma_0,t) \ge 1/C_n$ et de même $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, u(-\sigma_0,t) \ge 1/C_n$. Le théorème 2 est donc démontré.

Soit maintenant σ_k, $k \ge 1$, une suite de points deux à deux distincts de Σ et $\eta_k > 0$ des nombres positifs assez petits pour que les disques de centres σ_k et $-\sigma_k$ et de rayon η_k soient deux a deux disjoints. Par abus de langage, appelons $Z_{j,k}$ la zonale d'ordre j (c'est-a-dire appartenant a H^j) mais construite en remplaçant le pôle nord par σ_k. Il est possible de choisir une suite d'entiers N_k, $k \ge 1$, tendant assez vite vers l'infini pour que N_{k+1}/N_k tende vers l'infini et que

$$(20) \qquad u_k(\sigma,t) = \frac{1}{N_k}\sum_{N_{k-1}}^{N_k} \varepsilon_j Z_{j,k}(\sigma) \cos\sqrt{j(j+n-2)}\,t$$

verifie $|u_k(\sigma,t)| \le 2^{-k}$ si $d(\sigma,\sigma_k) > \eta_k$ et $d(\sigma,-\sigma_k) > \eta_k$ ou si $|t| \le k$.

Posons

$$(21) \qquad u(\sigma,t) = \sum_{k\ge1} u_k(\sigma,t);$$

la convergence est uniforme sur tout compact de $\Sigma\times\mathbb{R}$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, le développement en harmoniques sphériques de la fonction $\sigma \to u(\sigma,t)$, définie sur Σ, est donné par le second membre de (21) — il faut remarquer que pour deux valeurs distinctes de k les degrés des harmoniques sphériques rentrant dans la composition des $u_k(\sigma,t)$ correspondants sont toujours différents.

Supposons $u(\sigma,t)$ presque périodique; alors $u(\sigma,t)$ est donnée par la formule (8). Faisant $t = t_0$ et remarquant que le développement en harmoniques sphériques d'une fonction de $L^2(\Sigma)$ est unique, on obtient que les séries (8) et (21) sont identiques pour $u(\sigma,t)$. Si $u(\sigma,t)$ est presque-périodique, la série (21) doit être uniformément convergente sur $\Sigma \times \mathbb{R}$ en vertu du théorème 3. Cela entraîne $\sup_{\Sigma \times \mathbb{R}} |u_k(\sigma,t)| \to 0$; mais ce sup. dépasse C_n^{-1} grâce au théorème 1. Donc $u(\sigma,t)$ n'est pas presque-périodique. Il est clair que $|u(\sigma,t)| \leq 2$ (les disques de centres σ_k ou $-\sigma_k$ et de rayon η_k sont deux à deux disjoints). Le théorème 4 est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich : Number theory, Academic Press 1966.

[2] R. Coifman, G. Weiss : Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 242.

[3] C. Corduneanu : Almost periodic functions, Interscience Publishers 22, 1968.

[4] J. P. Kahane : Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann Paris, 1963.

[5] Y. Meyer : Etude asymptotique des vibrations des sphères (à paraître).

[6] W. Rudin : Fourier analysis on groups, Interscience Publishers, 12 1967.

[7] J. P. Serre : Cours d'arithmétique, P. U. F., "le Mathématicien" 1970.
