Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

L. Schwartz

Désintégration d'une mesure

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 23, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1971-1972

DESINTEGRATION D'UNE MESURE

par L. SCHWARTZ

Exposé N° XXIII

12 Avril 1972

§ 1. ESPERANCE CONDITIONNELLE D'UNE FONCTION A VALEURS ≥ 0 OU BANACHIQUES.

Soient Ω un ensemble, $\mathcal{O}$ une tribu sur Ω, λ une mesure ≥ 0 σ-finie sur la tribu $\mathcal{O}$ (Ω est réunion d'une suite de parties éléments de $\mathcal{O}$, de λ-mesures finies). Soit $\mathcal{T}$ une sous-tribu de la tribu λ-mesurable $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$; on suppose que la restriction de λ à $\mathcal{T}$ est aussi σ-finie.

Soit alors f une fonction sur Ω, à valeurs dans un Banach F et λ-intégrable, ou à valeurs dans $[0,+\infty]$ et λ-mesurable. On appelle espérance conditionnelle $f^{\mathcal{T},\lambda}$, qu'on notera pour simplifier $f^{\mathcal{T}}$, de la fonction f par rapport à $\mathcal{T},\lambda$, une fonction $\mathcal{T}$-mesurable à valeurs dans le même espace, telle que, pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\int_A f^{\mathcal{T}}\, d\lambda = \int_A f\, d\lambda$.

<u>Proposition 1.1</u> : <u>Il existe des espérances conditionnelles, et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales</u> ♦.

<u>Démonstration</u> : Bornons nous, pour simplifier, au cas $f \geq 0$. Alors $f\lambda$ est une mesure sur $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda$, donc sur $\mathcal{T}$; trivialement toute partie de $\mathcal{T}$ λ-négligeable est $f\lambda$ négligeable; donc il existe une fonction $f^{\mathcal{T}} \geq 0$, $\mathcal{T}$-mesurable définie à un ensemble λ-négligeable près, telle que $f^{\mathcal{T}}\lambda = f\lambda$ sur $\mathcal{T}$ (Lebesgue-Nikodym). <u>cqfd</u>.

<u>Proposition 1.2</u> :

$(f + g)^{\mathcal{T}} = f^{\mathcal{T}} + g^{\mathcal{T}}$;

$(f g)^{\mathcal{T}} = f^{\mathcal{T}} g$, <u>pour des fonctions</u> ≥ 0, <u>si g est $\mathcal{T}$-mesurable</u>;

$(f^{\mathcal{T}})^{\mathcal{S}} = f^{\mathcal{S}}$ si $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$;

$|f^{\mathcal{T}}| \leq (|f|)^{\mathcal{T}}$

(<u>toutes ces égalités ou inégalités ayant lieu λ-presque partout</u>).

Evident.

♦ Donc en réalité $f^{\mathcal{T}}$ est plutôt une λ-classe de fonctions

§ 2. SYSTEME DE PROBABILITES CONDITIONNELLES OU DESINTEGRATION DE λ.

Soit $A \subset \Omega$, λ-mesurable. On appelle probabilité conditionnelle relative à λ, lorsqu'on se donne l'information supplémentaire $\omega \in A$, la probabilité $B \mapsto \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)}$; c'est donc la probabilité $1_A\lambda/\lambda(A)$. Elle n'existe que si $\lambda(A) \neq 0$, et $\lambda(A) \neq +\infty$ (habituellement, en calcul des probabilités, $\lambda(\Omega) = 1$, donc la dernière condition est toujours vérifiée. Mais il n'est nullement nécessaire de supposer que λ soit une probabilité, $1_A\lambda/\lambda(A)$ en est toujours une!). Bien entendu, la probabilité conditionnelle relative à l'information $\omega \in \complement A$ est $1_{\complement A}\lambda/\lambda(\complement A)$.

On peut alors aussitôt généraliser. Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition dénombrable de Ω en parties λ-mesurables. La probabilité conditionnelle relative à l'information supplémentaire $\omega \in \Omega_n$ est $1_{\Omega_n}\lambda/\lambda(\Omega_n)$. Nous dirons aussi que la fonction sur Ω à valeurs probabilités sur $(\Omega,\mathcal{O})$, qui, pour $\omega \in \Omega_n$, prend la valeur $\lambda_\omega^{\mathcal{T}} = 1_{\Omega_n}\lambda/\lambda(\Omega_n)$, est une désintégration de λ ou une famille d'espérances conditionnelles, relative à la sous-tribu $\mathcal{T}$ de la tribu λ-mesurable, engendrée par les Ω_n, $n \in \mathbb{N}$. Cette désintégration n'existe que si tous les Ω_n sont de λ-mesure finie, c'est-à-dire si la restriction de λ à $\mathcal{T}$ est σ-finie; $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ n'est pas déterminée si $\omega \in \Omega_n$ avec $\lambda(\Omega_n) = 0$, autrement dit $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ est définie pour λ-presque toutes les valeurs de ω. On remarquera alors que la fonction à valeurs probabilités $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ a la propriété suivante :
si f est une fonction ≥ 0, $\mathcal{O}$-mesurable, $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(f)$ est une espérance conditionnelle de f pour la tribu $\mathcal{T} \subset \hat{\mathcal{O}}_\lambda$. En effet, sur chaque Ω_n, cette fonction vaut $\int_{\Omega_n} f\,d\lambda/\lambda(\Omega_n)$, valeur moyenne de f sur Ω_n; elle est donc constante sur chaque Ω_n donc est $\mathcal{T}$-mesurable, et son intégrale sur chaque Ω_n, donc sur chaque $A \in \mathcal{T}$, est la même que celle de f. On est donc amené à poser la définition suivante, lorsque $\mathcal{T}$ est une sous-tribu <u>arbitraire</u> de la tribu λ-mesurable telle que la restriction de λ à $\mathcal{T}$ soit σ-finie :

Définition 2.1 : On appelle désintégration de λ relative à la sous-tribu $\mathcal{T}$ de la tribu λ-mesurable, une fonction sur Ω à valeurs mesures sur $(\Omega,\mathcal{O})$, $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$, telle que, pour toute fonction $f \geq 0$, $\mathcal{O}$-mesurable, $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(f) = \int_\Omega f(\omega')d\lambda_\omega^{\mathcal{T}}(\omega')$, soit une espérance conditionnelle de f relative à $\mathcal{T}$.

Remarque : La fonction 1 admet l'espérance conditionnelle 1; donc $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(1)$ est λ-presque partout égale à 1, donc, pour λ-presque tout ω, $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ est une probabilité (sans aucune hypothèse analogue sur λ, qui est peut-être de masse infinie). On dit aussi que les $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ sont une famille de probabilités conditionnelles relatives à $\mathcal{T}$.

Théorème de Jirina 2.2 : Si Ω est un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, λ une mesure portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de Ω, de λ-mesures finies, il existe des désintégrations, et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales.

La démonstration sera donnée au théorème 3.2. La condition relative à λ est vérifiée toutes les fois que c'est une mesure de Radon σ-finie sur un espace Ω souslinien ou métrisable; elle est vérifiée dans tous les cas pratiques du calcul des probabilités.

§ 3. ESPERANCE CONDITIONNELLE D'UNE FONCTION A VALEURS MESURES ≥ 0

Au § 1, on cherchait l'espérance conditionnelle d'une fonction f sur Ω, à valeurs banachiques ou réelles ≥ 0. Supposons maintenant que Y soit un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{Y}$, et considérons, au lieu de f, une fonction sur Ω à valeurs mesures ≥ 0 sur $(Y,\mathcal{Y})$, $\omega \mapsto \nu_\omega$; et essayons de définir son espérance conditionnelle relative à λ, $\mathcal{T}$. Remarquons que, si Y est réduite à un point y, une mesure sur $(Y,\mathcal{Y})$ est de la forme $a\,\delta_{(y)}$ et on retrouve le cas d'une fonction réelle ≥ 0, $\omega \mapsto \nu_\omega = f(\omega)\delta_{(y)}$. Tout d'abord $\omega \mapsto \nu_\omega$ doit être λ-mesurable; on entend par là que, pour toute partie $B \in \mathcal{Y}$, $\omega \mapsto \nu_\omega(B)$ est λ-mesurable (c'est une "mesurabilité scalaire"). On en déduit aussitôt que, pour toute fonction $\varphi \geq 0$ $\mathcal{Y}$-mesurable sur Y, $\omega \mapsto \nu_\omega(\varphi)$ est λ-mesurable. On définit alors une intégrale $J = \int_\Omega \nu_\omega \, d\lambda(\omega)$, qui est elle-même une mesure ≥ 0 sur $(Y,\mathcal{Y})$; pour tout $B \in \mathcal{Y}$, on a $J(B) = \int_\Omega \nu_\omega(B) \, d\lambda(\omega)$, et, pour toute $\varphi \geq 0$ $\mathcal{Y}$-mesurable sur Y, $J(\varphi) = \int_\Omega \nu_\omega(\varphi) \, d\lambda(\omega)$.

On cherche alors une fonction sur Ω à valeurs mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$, $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}}$, ayant les deux propriétés suivantes : elle est $\mathcal{T}$-mesurable (i.e. $\forall\, B \in \mathcal{Y}$, $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}}(B)$ est $\mathcal{T}$-mesurable); pour toute partie $A \in \mathcal{T}$, $\int_A \nu_\omega^{\mathcal{T}} d\lambda(\omega) = \int_A \nu_\omega \, d\lambda(\omega)$ (i.e. $\forall\, B \in \mathcal{Y}$, $\int_A \nu_\omega^{\mathcal{T}}(B) d\lambda(\omega) = \int_A \nu_\omega(B) d\lambda(\omega)$).

Cela veut exactement dire que, pour toute fonction $\varphi \geq 0$ $\mathcal{Y}$-mesurable sur Y, la fonction $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}}(\varphi)$ est une espérance conditionnelle de la fonction réelle ≥ 0 $\omega \mapsto \nu_\omega(\varphi)$ relativement à λ, $\mathcal{T}$.

On suppose toujours que $J = \int_\Omega \nu_\omega \, d\lambda(\omega)$ est σ-finie, et que $\mathcal{Y}$ est J-dénombrablement engendrée, c'est-à-dire qu'il existe $Y' \in \mathcal{Y}$ portant J, telle que la tribu intersection de $\mathcal{Y}$ avec Y' soit dénombrablement engendrée.

Il existe alors une relation remarquable entre désintégrations et espérances conditionnelles de fonctions à valeurs mesures :

Théorème 3.1 : 1) Une espérance conditionnelle de la fonction à valeurs mesures sur $(Y,\mathcal{Y}) = (\Omega,\mathcal{O})$, $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$ (mesure de Dirac du point ω), est une désintégration de λ, et réciproquement;

2) Si $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ est une désintégration de λ, et si $\omega \mapsto \nu_\omega$ est une fonction à valeurs mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$, $\mathcal{O}$-mesurable, elle admet pour espérance conditionnelle relativement à λ, $\mathcal{T}$, la fonction à valeurs mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$: $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}} = \int_\Omega \nu_{\omega'} \, d\lambda_\omega^{\mathcal{T}}(\omega')$.

<u>Démonstration</u> : 1) Dire que $\omega \mapsto \delta_\omega^{\mathcal{T}}$ est une espérance conditionnelle de $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}$, c'est-à-dire que, pour toute fonction $\varphi \geq 0$ $\mathcal{Y}$-mesurable sur Y, $\omega \mapsto \delta_\omega^{\mathcal{T}}(\varphi)$ est une espérance conditionnelle de $\omega \mapsto \delta_{(\omega)}\varphi = \varphi(\omega)$, c'est-à-dire de φ; c'est exactement dire que $\omega \mapsto \delta_\omega^{\mathcal{T}}$ est une désintégration de λ.

2) La formule qui termine l'énoncé du théorème est exactement celle de la définition 2.1, quand on remplace f par $\omega \mapsto \nu_\omega$. Supposons les $\nu_\omega^{\mathcal{T}}$ <u>définies par cette formule</u>. Pour toute $\varphi \geq 0$ $\mathcal{Y}$-mesurable sur Y, appelons g la fonction sur Ω; $\omega \mapsto \nu_\omega(\varphi)$; elle est $\mathcal{O}$-mesurable. D'après la définition meme de la désintégration, $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(g)$ est une espérance conditionnelle de g : $\omega \mapsto g(\omega)$, par rapport à λ, $\mathcal{T}$; autrement dit, $\omega \mapsto \int_\Omega g(\omega')d\lambda_\omega^{\mathcal{T}}(\omega') = \int_\Omega \nu_{\omega'}(\varphi)d\lambda_\omega^{\mathcal{T}}(\omega') = (\int_\Omega \nu_{\omega'} d\lambda_\omega^{\mathcal{T}}(\omega'))(\varphi) = \nu_\omega^{\mathcal{T}}(\varphi)$ est une espérance conditionnelle de $\omega \mapsto \nu_\omega(\varphi)$; ce qui veut exactement dire que $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}}$ est une espérance conditionnelle de $\omega \mapsto \nu_\omega$, <u>cqfd</u>

Il résulte de cela que la recherche des espérances conditionnelles des fonctions à valeurs mesures est identique à celle des désintégrations.

<u>Théorème de Jirina généralisé 3.2</u> . <u>Faisons sur $(\Omega, \mathcal{O}, \lambda, \mathcal{T})$ les hypothèses du § 1. Soit $\omega \mapsto \nu_\omega$ une fonction à valeurs mesures ≥ 0 sur $(Y, \mathcal{Y})$, λ-mesurable; on suppose $\mathcal{Y}$ J-dénombrablement engendrée, où $J = \int_\Omega \nu_\omega d\lambda(\omega)$.</u>

<u>Alors il existe des espérances conditionnelles, et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales, dans l'une quelconque des deux hypothèses suivantes :</u>

<u>1) Y est un espace topologique, $\mathcal{Y}$ est sa tribu borélienne, J est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de J-mesures finies;</u>

<u>2) Ω est un espace topologique, $\mathcal{O}$ sa tribu borélienne, λ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables de λ-mesures finies</u>

Démonstration : Il suffit de le démontrer dans l'hypothèse 1). Cela prouvera le théorème de Jirina 2.2, en prenant $(Y,\mathcal{Y}) = (\Omega,\mathcal{O})$, $\nu_\omega = \delta_{(\omega)}$ d'après la partie 1) du théorème 3.1. Et alors le cas de l'hypothèse 2) résultera de la partie 2) du théorème 3.1.

On se ramène immédiatement au cas où Y est compact métrisable de J-mesure finie. Les mesures sur $(Y,\mathcal{Y})$ sont alors des mesures de Radon sur Y, formes linéaires continues sur l'espace $C(Y)$ des fonctions continues sur Y. La fonction $\omega \mapsto \nu_\omega(1)$ est λ-intégrable, d'intégrale $J(1)$. Elle a donc une espérance conditionnelle pour λ, $\mathcal{T}$, que nous appellerons θ, fonction ≥ 0 λ-intégrable sur Ω, de même intégrale $J(1)$. Cette fonction θ peut donc être choisie partout finie ≥ 0; elle est nulle sur un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{T}$, et comme $\int_{\Omega_0} \nu_\omega(1)d\lambda(\omega) = \int_{\Omega_0} \theta d\lambda$, ν_ω est nulle pour λ-presque tout $\omega \in \Omega_0$.

Soit $\varphi \in C(Y)$. Alors $\omega \mapsto \nu_\omega(\varphi)$ est une fonction sur Ω, J-intégrable, d'intégrale $J(\varphi)$. Elle a une espérance conditionnelle relativement à λ, $\mathcal{T}$; sur Ω_0, $\omega \mapsto \nu_\omega(\varphi)$ est nulle, et comme $\Omega_0 \in \mathcal{T}$, l'espérance conditionnelle est aussi nulle; on peut donc l'écrire sous la forme $\theta\tilde{\varphi}$, avec $\tilde{\varphi} = 0$ sur Ω_0. Considérons $\tilde{\varphi}$ comme une λ-classe de fonctions puisqu'elle n'est définie que λ-presque partout. Supposons $\|\varphi\|_{C(Y)} \leq 1$. On sait que $\theta\tilde{\varphi}\lambda$ est, sur $\mathcal{T}$, la mesure restriction à $\mathcal{T}$ de $\nu_\omega(\varphi)d\lambda(\omega)$; pour tout $A \in \mathcal{T}$, $|\int_A \nu_\omega(\varphi)d\lambda(\omega)| \leq \int_A \nu_\omega(1)d\lambda(\omega) = \int_A \theta(\omega)d\lambda(\omega)$: donc $\nu_\omega(\varphi)d\lambda(\omega)$ est absolument majorée, sur la tribu $\mathcal{T}$, par $\theta\lambda = \theta(\omega)d\lambda(\omega)$, $|\theta\tilde{\varphi}\lambda| \leq \theta\lambda$ sur $\mathcal{T}$, donc $\|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{T},\theta\lambda)} \leq 1$, ou, puisque $\tilde{\varphi} = 0$ sur Ω_0, $\|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{T};\lambda)} \leq 1$. Pour $\varphi \in C(Y)$ arbitraire, $\|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{T},\lambda)} \leq \|\varphi\|_{C(Y)}$.

Alors $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ est une application linéaire continue ≥ 0 de norme ≤ 1 de $C(Y)$ dans $L^\infty(\Omega,\mathcal{T},\lambda)$.

D'après le théorème de relèvement de Maharam, il existe une application linéaire continue ≥ 0 de $L^\infty(\Omega,\mathcal{T},\lambda)$ dans l'espace $B(\Omega)$

des fonctions bornées sur Ω, $\rho : L^{\infty}(\Omega, \mathcal{T}, \lambda) \longrightarrow B(\Omega)$, $\|\rho(f)\|_B$ (i.e. $\sup_{\omega\in\Omega} |(\rho(f)(\omega)|) = \|f\|_{L^\infty}$ (i.e. sup. ess.$_\lambda$ $|f(\omega)|$); $\rho(f)$ est $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$-mesurable et sa classe dans $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{T}, \lambda)$ est f. Utilisant un tel relèvement, $\rho(\tilde{\varphi})$ est maintenant, non plus une classe de fonctions, mais une fonction sur Ω, et, pour tout $\omega \in \Omega$, $|\rho(\tilde{\varphi})(\omega)| \leq \|\varphi\|_{C(Y)}$. Donc, pour tout $\omega \in \Omega$, $\varphi \mapsto \theta(\omega)(\rho(\tilde{\varphi}))(\omega)$ est une mesure de Radon ≥ 0 sur Y, que nous appellerons $\nu_\omega^{\mathcal{T}}$. Montrons qu'elle donne l'espérance conditionnelle cherchée. En effet, pour toute φ continue ≥ 0 sur Y, et toute $A \in \mathcal{T}$:

$$\int_A \;_{\omega}(\varphi)\, d\lambda(\omega) = \int_A \theta\tilde{\varphi}\, d\lambda = \int_A \theta(\omega)((\rho(\tilde{\varphi}))(\omega))\, d\lambda(\omega) = \int_A \nu_\omega^{\mathcal{T}}(\varphi)\, d\lambda(\omega) :$$

l'ensemble des fonctions $\varphi \geq 0$ sur Ω pour lesquelles on a cette égalité est stable par les passages à la limite simple croissante ou bornée donc contient toute la tribu engendrée par C(Y), qui Y étant supposé compact <u>métrisable</u>, est toute la tribu borélienne de Y. Donc, pour $A \in \mathcal{T}$ $\int_A \;_{\omega}\, d\lambda(\omega) = \int_A \nu_\omega^{\mathcal{T}}\, d\lambda(\omega)$ la fonction à valeurs mesures $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}}$ doit en outre être $\mathcal{T}$-mesurable; pour $\varphi \in C(Y)$, $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}}(\varphi) = \theta(\omega)(\rho(\tilde{\varphi}))(\omega)$ est $\theta\rho(\tilde{\varphi})$, $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$-mesurable; par le meme passage à la limite que ci-dessus, c'est encore vrai pour $\varphi \in \mathcal{Y}$, donc $\omega \mapsto \nu_\omega^{\mathcal{T}}$ est $\hat{\mathcal{T}}_\lambda$- mesurable; en la modifiant sur une partie λ-négligeable convenable, on la rend $\mathcal{T}$-mesurable, et la démonstration de l'existence est achevée. L'unicité (à un ensemble λ-négligeable près) résulte facilement de l'unicité analogue de l'espérance conditionnelle, et de ce que C(Y) admet un ensemble dénombrable dense qui permet de réunir tous les ensembles λ-négligeables en un seul

§ 4. CARACTERISATIONS DES DESINTEGRATIONS

Théorème 4.1 : Pour que $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ soit une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T} \subset \hat{\mathcal{O}}_\lambda$, il faut et il suffit que :

1) $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ soit $\mathcal{T}$-mesurable;

2) $\lambda = \int_\Omega \lambda_\omega^{\mathcal{T}} d\lambda(\omega)$;

3) pour toute $A \in \mathcal{T}$, $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ soit portée par A ou par $\complement A$ selon que $\omega \in A$ ou $\omega \in \complement A$.

Démonstration : Montrons d'abord la nécessité. 1) est dans la définition; 2) résulte de ce que $\lambda = \int_\Omega \delta_{(\omega)} d\lambda(\omega) = \int_\Omega \lambda_\omega^{\mathcal{T}} d\lambda(\omega)$. Montrons 3). Considérons les fonctions $f = 1_A$, $g = 1_{\complement A}$; $fg = 0$. Donc son espérance conditionnelle est aussi nulle. Mais c'est aussi $f\, g^{\mathcal{T}}$, puisque f est $\mathcal{T}$-mesurable; donc $g^{\mathcal{T}}$ est λ-presque partout nulle sur A. Or c'est $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(g) = \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(\complement A)$; donc, pour λ-presque tout $\omega \in A$, $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ est portée par A

Montrons ensuite la suffisance. Supposons donc ces conditions vérifiées. Soient f une fonction ≥ 0 $\mathcal{O}$-mesurable sur Ω, et $A \in \mathcal{T}$. $\int_A f d\lambda = \lambda(f\, 1_A) = \int_\Omega \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(f 1_A) d\lambda(\omega)$ (par la condition 2) $= \int_A \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(f) d\lambda(\omega)$ (par la condition 3). Donc la fonction $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}(f)$, $\mathcal{T}$-mesurable par la condition 1, a même intégrale que f sur toute $A \in \mathcal{T}$, donc est une espérance conditionnelle de f pour λ, $\mathcal{T}$, ce qui prouve bien que $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ est une désintégration.

Le théorème suivant donne une justification sentimentale du mot désintégration :

Theorème 4.2 : Supposons la tribu $\mathcal{T}$ dénombrablement séparante (i.e. il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties $A_n \in \mathcal{T}$ telle que tout atome de $\mathcal{T}$ soit l'intersection des A_n qui le contiennent. Un atome de $\mathcal{T}$ est l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{T}$ contenant un point). Alors, pour que $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ soit une désintégration de λ relativement à $\mathcal{T}$, il faut et il suffit que :

1) $\omega \mapsto \lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ soit $\mathcal{T}$-mesurable;
2) $\lambda = \int_\Omega \lambda_\omega^{\mathcal{T}} \, d\lambda(\omega)$;
3) pour λ-presque tout ω, $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$ soit portée par l'atome du point ω.

Démonstration : La suffisance résulte du théorème 4.1. La nécessité s'obtient trivialement en appliquant le théorème 4.1 à une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant les propriétés de l'énoncé.

Remarque : En analyse, $\mathcal{T}$ est toujours dénombrablement séparante, et le théorème 4.2 donne une bonne définition des désintégrations. Mais, dans les processus en probabilités, elle ne l'est pratiquement jamais, et, même dans l'exemple simple du mouvement brownien, pour λ-presque tout ω, l'atome de ω est $\lambda_\omega^{\mathcal{T}}$-négligeable!

Corollaire 4.3 (Bourbaki) : Soient Ω, X, des espaces topologiques, λ une mesure de Radon ≥ 0 sur Ω, portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables. Soit p une application λ-propre de Ω dans X, i.e. λ-mesurable Lusin, et telle que, pour tout compact K de X, $p^{-1}(X)$ soit λ-intégrable; soit $\mu = p(\lambda)$ la mesure image. Soit $\mathcal{X}$ la tribu borélienne de X, $\mathcal{T} = p^{-1}(\mathcal{X})$♦. Alors λ admet des désintégrations relativement à $\mathcal{T}$, et deux d'entre elles sont λ-presque partout égales. Une désintégration peut (à un ensemble λ-négligeable près) se caractériser comme suit : $x \mapsto \lambda_x$ est une fonction sur X à valeurs probabilités de Radon ≥ 0 sur Ω, $\mathcal{X}$-mesurable, vérifiant $\lambda = \int_X \lambda_x \, d\mu(x)$, λ_x est portée par $p^{-1}(\{x\})$; et $\lambda_\omega^{\mathcal{T}} = \lambda_{p(\omega)}$.

Démonstration : Les conditions 1, 2, 3, sont trivialement vérifiées (2 signifie : $\lambda = \int_\Omega \lambda_{p(\omega)} \, d\lambda(\omega) = \int_X \lambda_x \, d\mu(x)$). La seule chose à vérifier est que $\mathcal{T}$ est dénombrablement séparante. Ce n'est pas tout à fait

---

♦ La condition "λ-propre" intervient pour que μ soit de Radon, mais aussi pour qu'elle soit σ-finie.

vrai; mais λ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, donc μ par une réunion dénombrable X' de compacts métrisables; la tribu borélienne de X' est dénombrablement séparante, ce qui suffit comme on le voit aisément.

Application

Exemples de désintégrations.

Exemple 1. : $\Omega = \mathbb{R}^2$, $d\lambda(x,y) = f(x,y)dxdy$, f borélienne ≥ 0, $\mathcal{O}$ = tribu borélienne. $X = \mathbb{R}$, p est la première projection $(x,y) \mapsto x$. On doit la supposer λ-propre : si K est un compact de $\mathbb{R}$, $\int_{K\times\mathbb{R}} f(x,y)dxdy < +\infty$.

$\mathcal{X}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{T}$ est la tribu formée des parties boréliennes de $\mathbb{R}^2$ réunions de verticales. On trouve, par le corollaire 4.3 : $\lambda^{\mathcal{T}}_{(x,y)} = \lambda_x = \frac{f(x,y)dy}{\int_{\mathbb{R}} f(x,z)dz}$.

Exemple 2. : $\Omega = \mathbb{R}^n$, λ = mesure de Lebesgue, $X = [0, +\infty[$, $p = r$ = distance à l'origine. $\mathcal{X}$ = tribu borélienne, $\mathcal{T}$ est la tribu des parties boréliennes de $\mathbb{R}^n$ qui sont des réunions de sphères de centre origine. Pour $t \in [0,+\infty[$, λ_t est la masse unité répartie de façon homogène sur la sphère de rayon t (elle n'a pas le choix : elle doit être portée par cette sphère, et avoir la masse 1, et le problème est invariant par le groupe orthogonal); et, pour $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^{\mathcal{T}}_{\omega} = \lambda_{r(\omega)}$.

BIBLIOGRAPHIE

Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure. A paraître au Journal d'Analyse, de Jérusalem.
