Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Grubb

Caractérisation de quelques propriétés des problèmes aux limites pour les systèmes elliptiques : problèmes aux limites variationnel

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 19 bis, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A19_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

CARACTERISATION DE QUELQUES PROPRIETES DES PROBLEMES AUX LIMITES POUR LES SYSTEMES ELLIPTIQUES : PROBLEMES AUX LIMITES VARIATIONNELS.

par G. GRUBB

Exposé N° 19 bis

3 Mars 1972

Cette conférence est la suite de l'exposé n° XIX et a été donnée le 3 Mars 1972 dans le cadre du séminaire Lions-Brézis à l'Université de Paris VI.

§ 7. Nous reprenons ici l'étude de l'inégalité (6), en particulier sa relation avec les formes sesquilinéaires intégro-différentielles (cf.p.XIX 3) L'association de A avec une forme intégro-différentielle n'a un sens que si $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, ou si on se borne à des considérations locales. D'autre part, nos résultats seront valables pour un opérateur A quelconque, d'ordre 2m. (Le résultat principal n'a pas encore été publié ailleurs.)

<u>Nouvelles hypothèses</u> : $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, et Γ est la frontière de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Les fibrés sont triviales, c'est-à-dire

$$E = \bar{\Omega} \times \mathbb{C}^q \ ; \ F_j = \Gamma \times \mathbb{C}^{q_j}, \ j \in J.$$

A est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2m <u>quelconque</u>, à coefficients C^∞ sur $\bar{\Omega}$. Nous supposerons que B est <u>normal</u> (voir p.XIX.2) mais ne mettrons aucune restriction ultérieure sur $\sum_{j \in J} q_j$. Nous posons désormais

$$\text{(22)} \qquad D(A_B) = \{u \in H^{2m}(\Omega)^q \mid B\rho\, u = 0\}.$$

Par une forme sesquilinéaire nous entendons une forme intégro-différentielle.

$$\text{(23)} \qquad a(u,v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} a_{\alpha\beta}\, D^\beta u\, \overline{D^\alpha v}\, dx,$$

où les $a_{\alpha\beta}$ sont des $q \times q$-matrices de fonctions dans $C^\infty(\bar{\Omega})$.

<u>Définition 1</u> : Une forme sesquilinéaire a(u,v) est dite <u>associée à A,</u> si

$$\text{(24)} \qquad (Au,v) = a(u,v), \ \forall\, u,v \in \mathcal{D}(\Omega)^q,$$

c'est-à-dire

(25) $$A = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} D^{\alpha} a_{\alpha\beta} D^{\beta}. \; \bullet$$

Soit $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire associée à A, et soit V un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)^q$, contenant $H^m_o(\Omega)^q$. Alors $a(u,v)|_V$ définit un certain opérateur $\tilde{A}$ dans $L^2(\Omega)^q$, satisfaisant à

$$(\tilde{A}u,v) = a(u,v) \quad \forall\, u,\ v \in D(\tilde{A})$$

(voir [12] ch.2.9 , pour des détails ultérieurs). $\tilde{A}$ opère comme A; et si V est défini par des conditions au bord normales, $\tilde{A}$ est en effet de la forme A_B. Nous allons étudier la question :

<u>Problème II</u> : Pour quels choix de B (et de A) <u>existe-il une forme sesquilinéaire</u> $a_B(u,v)$ telle que

(26) $$(Au,v) = a_B(u,v), \quad \forall u,v \in D(A_B) \ ?$$

<u>Définition 2</u> : Nous appelons A_B <u>variationnel</u>, quand il existe a_B telle que (26) a lieu.

(26) entraîne en particulier

(27) $$|(Au,v)| \leq c\|u\|_m\ \|v\|_m, \ \forall u,\ v \in D(A_B),$$

parce que $a_B(u,v)$ est continue sur $H^m(\Omega)^q \times H^m(\Omega)^q$.

Notons que (27) entraîne (6).

• On note $D^{\alpha} = (i^{-1}\partial/\partial X_1)\ldots(i^{-1}\partial/\partial X_n)$, où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup 0)^n$; et $D_t = i^{-1}\partial/\partial n$ (dérivée normale intérieure).

§ 8. Dans ce paragraphe, nous reprenons la formule de Green (1) de Seeley [14] de façon plus détaillée, et étudions aussi la "demi-formule de Green" pour A et une forme sesquilinéaire associée a(u,v).

Sur Γ, A s'écrit sur la forme

$$A = A_{2m} D_t^{2m} + A_{2m-1} D_t^{2m-1} + \dots + A_o, \tag{28}$$

où les A_l sont des opérateurs différentiels sur Γ, d'ordres 2m-1, respectivement. En particulier, A_{2m} est une <u>fonction</u> ($q \times q$-matricielle). Nous observons que Γ est non-caractéristique pour A au point $y \in \Gamma$, si et seulement si $A_{2m}(y)$ est inversible.

<u>Proposition 2</u> : Soit A' l'adjoint formel de A. On a pour $u, v \in H^{2m}(\Omega)^q$

$$\int_\Omega (Au\,\bar{v} - u\,\overline{A'v})dx = \int_\Gamma \mathcal{Q}\,\rho u . \overline{\rho v}\, d\sigma, \tag{29}$$

où $\mathcal{Q}$ est la $M \times M$-matrice (de $q \times q$-matrices)

$$\mathcal{Q} = i \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{2m} \\ A_{2,2} & & \cdot\, A_{2m} & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ A_{2m} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

avec $A_{l,k} = A_l$ + opérateur différentiel d'ordre inférieur à 2m-1.

La formule (29) est immédiate quand $\Omega = \overline{\mathbb{R}^n_+} = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ (notation $x = (y, t)$). On ramène le cas général à celui-là par utilisation de bonnes coordonnées locales.

On voit que $\mathcal{A}$ est inversible (son invers étant encore un opérateur différentiel) exactement quand Γ est non-caractéristique pour A. Nous allons écrire, pour $\delta, \varepsilon = 0,1$

(31) $$(\mathcal{A}_{jk})_{j\in M_\delta,\ k\in M_\varepsilon} = \mathcal{A}_{M_\delta, M_\varepsilon} \text{ ou, très abrégé, } = \mathcal{A}_{\delta\varepsilon};$$

alors (29) prend la forme, après insertion de $\rho u = [\gamma u, \nu u]$

(32) $$(Au,v) - (u,A'v) = <\mathcal{A}_{o1}\nu u, \gamma v> + <\mathcal{A}_{oo}\gamma u, \gamma v> + <\mathcal{A}_{1o}\gamma u, \nu v>,$$

où nous avons noté par $(\ ,\ )$ la dualité dans $L^2(\Omega)^q$ et par $<\ ,\ >$ la dualité (et ses extensions) dans $L^2(\Gamma)^{mq}$.

<u>Proposition 3</u> : Soit $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire associée à A. Alors on a pour $u,v \in H^{2m}(\Omega)^q$

(33) $$(Au,v) = a(u,v) + <\mathcal{A}_{o1}\nu u, \gamma v> + <\mathcal{S}\gamma u, \gamma v>,$$

où $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_{jk})_{j,k\in M_o}$ est un opérateur différentiel sur Γ, continu de $\prod_{k\in M_o} H^{m-k-1/2}(\Gamma)^q$ dans $\prod_{j\in M_o} H^{-m+j+1/2}(\Gamma)^q$, c'est-à-dire, <u>de type</u> $(m-k-1/2,\ -m+j+1/2)_{j,k\in M_o}$.

<u>Démonstration</u> : Posons $a^*(u,v) = \overline{a(v,u)}$, alors a^* est associée à A'. Une intégration par parties donne

$$(Au,v) - a(u,v) = <\mathcal{R}_1\nu u, \gamma v> + <\mathcal{S}_1\gamma u. \gamma v>$$

$$(A'v,u) - a^*(v,u) = <\mathcal{R}_2\nu v, \gamma u> + <\mathcal{S}_2\gamma v, \gamma u>$$

(les $\mathcal{R}_i$ de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j\in M_o, k\in M_1}$ et les $\mathcal{S}_i$ de type

$(m-k-1/2,-m+j+1/2)_{j,k\in M_o})$, d'où

$$(Au,v) - (u,A'v) = <\mathcal{R}_1 \nu u, \gamma v> + <(\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2^*)\gamma u, \gamma v> + <\gamma u, \mathcal{R}_2 \nu v>.$$

Prenant $u,v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^q$ avec $\gamma u = 0$, $\nu u = \varphi$, $\gamma v = \Psi$, on trouve par comparaison avec (32),

$$<\mathcal{C}_{o1}\ \varphi,\ \Psi> = <\mathcal{R}_1 \varphi, \Psi>,$$

d'où $\mathcal{C}_{o1} = \mathcal{R}_1$, puisque φ et Ψ peuvent être choisis librement dans $\mathcal{D}(\Gamma)^{mq}$.

D'autre part $\mathcal{S}$ dans (33) peut être n'importe quel opérateur différentiel de type $(m-k-1/2,-m+j+1/2)_{j,k\in M_o}$. Car nous avons

<u>Théorème 7</u> : Pour tout opérateur différentiel $\mathcal{S}$ sur Γ de type $(m-k-1/2,-m+j+1/2)_{j,k\in M_o}$, il existe une forme sesquilinéaire $s(u,v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} s_{\alpha\beta}\, D^\beta u\, \overline{D^\alpha v}\, dx$ telle que

(34) $$s(u,v) = <\mathcal{S}\gamma u, \gamma v>,\ \forall\, u,v \in H^m(\Omega)^q.$$

En particulier, l'opérateur différentiel S sur $\bar{\Omega}$ associé à $s(u,v)$

(35) $$S = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} D^\alpha s_{\alpha\beta} D^\beta$$

est <u>nul</u>.

<u>Indication de démonstration</u> : La deuxième partie du théorème est évidente, car $(Su\ v) = s(u,v) = <\mathcal{S}\gamma u, \gamma v> = 0$ pour tout $u,v \in \mathcal{D}(\Omega)$. La première partie est démontrée en détail dans [6], voir Proposition 5.1. On généralise la technique du cas plus simple, où $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, $m = 1$

(donc $\gamma = {}_1\gamma_0$) et $\mathscr{S} = \frac{\partial}{\partial y}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial y}\, u(y,0)\right) v(y,0)\, dy = - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial y}\, u(y,t)\ v(y,t)\right) dt\ dy$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^2_+} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}\, v + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t} \right] dy\ dt, \text{ pour } u,v \in \mathscr{D}(\overline{\mathbb{R}^2_+}).$$

Pour éliminer la dérivation d'ordre 2, nous ajoutons

$$0 = \int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\, v\right) dy = \int_{\mathbb{R}^2_+} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} v + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dy\ dt,$$

et obtiendrons

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial y}\, \gamma_0 u\ \gamma_0 v\ dy = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t}\right] dy dt,\ u,v \in \mathscr{D}(\overline{\Omega});$$

la formule s'étend par continuité à $H^1(\Omega)$.

<u>Corollaire 1</u> : Pour tout opérateur différentiel $\mathscr{S}$ sur Γ de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j,k\in M_0}$, il existe $a(u,v)$ associée à A telle que (33) a lieu.

§ 9. Nous reprenons ici le lemme 1, et donnerons la démonstration pour le cas présent, où les fibrés sont triviales (la démonstration s'étend en effet immédiatement au cas non-trivial) :

<u>Lemme 1'</u> : L'opérateur B, continu de $\prod_{k\in M} H^{s-k}(\Gamma)^q$ dans $\prod_{j\in J} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, est <u>surjectif</u> et possède une inverse à droite C, opérateur différentiel <u>injectif</u> continu de $\prod_{j\in J} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$ dans $\prod_{k\in M} H^{s-k}(\Gamma)^q$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u> : Ecrivons $B = B' + B''$, où B' est la partie "diagonale" de B,

$$B' = (\delta_{jk} B_{jk})_{j\in J, k\in M} .$$

Par nos hypothèses, voir p.XIX.2 en bas, B' est une <u>fonction</u> matricielle C^∞ sur Γ, et pour chaque $y \in \Gamma$, $B'(y)$ définit une application <u>surjective</u> de $\prod_{k\in M} \mathbb{C}^q$ sur $\prod_{j\in J} \mathbb{C}^{q_j}$.

On peut alors définir

$$C'(y) = B'(y)^*(B'(y)B'(y)^*)^{-1},$$

(par rapport au produit scalaire euclidien), qui est une fonction matricielle C^∞ sur Γ, envoyant $\prod_{j\in J} \mathbb{C}^{q_j}$ <u>injectivement</u> dans $\prod_{k\in M} \mathbb{C}^q$ pour chaque $y \in \Gamma$, et ayant la propriété

$$B'(y)\ C'(y) \text{ est l'identité dans } \prod_{j\in J} \mathbb{C}^{q_j}$$

Observons maintenant que l'opérateur $C'B''$ dans $\prod_{k\in M} H^{s-k}(\Gamma)^q$ est <u>nilpotent</u>, parce qu'il a des zéros dans, et au-dessus de, la diagonale. En utilisant $B = B' + B''$, on obtient finalement que l'opérateur différentiel

$$C = \sum_{k=0}^{2m} (-C'B'')^k C'$$

satisfait à : BC = identité sur $\prod_{j\in J} H^{s-k}(\Gamma)^{q_j}$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Avec la notation habituelle, nous avons aussi

<u>Corollaire 2</u> : $B_{J_o M_o} C_{M_o J_o} = I$ et $B_{J_1 M_1} C_{M_1 J_1} = I$ (identités dans $\prod_{j\in J_o} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$, resp., $\prod_{j\in J_1} H^{s-j}(\Gamma)^{q_j}$).

Ceci permettra une représentation des valeurs au bord des $u \in D(A_B)$ (cf. (22)) :

<u>Lemme 3</u> : Les valeurs au bord $[\gamma u, \nu u]$ qui s'obtiennent quand u parcourt $D(A_B)$ sont exactement ceux de la forme

(36) $$\gamma u = (I - C_{M_o J_o} B_{J_o M_o})\varphi$$

(37) $$\nu u = (I - C_{M_1 J_1} B_{J_1 M_1})\Psi - C_{M_1 J_1} B_{J_1 M_o} \gamma u,$$

où $[\varphi, \Psi]$ parcourt $\prod_{k\in M_o} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q \times \prod_{k\in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$.

<u>Démonstration</u> : Quand $u \in D(A_B) (\subset H^{2m}(\Omega)^q)$, $\gamma u \in \prod_{k\in M_o} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$ et satisfait à (3)*; donc $\gamma u = \gamma u - C_{oo}B_{oo}\gamma u = (I - C_{oo}B_{oo})\gamma u$. De même, $\nu u \in \prod_{k\in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$, et (3) entraîne

$$\nu u = (I - C_{11}B_{11})\nu u + C_{11}B_{11}\nu u = (I - C_{11}B_{11})\nu u - C_{11}B_{10}\gamma u.$$

D'autre part, quand $[\varphi, \Psi]$ est donné, on vérifie en utilisant coroll.2 que $\chi = (I - C_{oo}B_{oo})\varphi$ et $\eta = (I - C_{11}B_{11})\Psi - C_{11}B_{10}\chi$ satisfont aux équations

$$B_{oo}\chi = 0$$

$$B_{10}\chi + B_{11}\eta = 0.$$

---

* voir p.9

Ici $[\chi,\eta] \in \prod_{k\in M_o} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q \times \prod_{k\in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$, et il est bien connu (voir e.g. [12]) qu'il existe $u \in H^{2m}(\Omega)^q$ avec $[\gamma u,\nu u] = [\chi,\eta]$.

§ 10. **Finalement, on résoud le problème II, et (6).**

<u>Théorème 8</u> : Soit A un opérateur différentiel d'ordre 2m sur $\bar{\Omega}$, et soit A_B la réalisation de A défini par (22). Les trois conditions (i) - (iii) sont <u>équivalentes</u> :

(i) A_B est variationnel.

(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Re}(Au,u) \geq -\lambda \|u\|_m^2$ pour $u \in D(A_B)$.

(iii) L'opérateur $(I - C_{M_oJ_o}B_{J_oM_o})^* \mathcal{a}_{M_oM_1}(I - C_{M_1J_1}B_{J_1M_1})$ est <u>nul</u>.

<u>Démonstration</u> : Nous avons déjà remarqué que (i) implique (ii), de manière évidente.

Montrons alors (ii) ⇒ (iii). Choisissons arbitrairement une forme sesquilinéaire $a_o(u,v)$ associée à A. Alors, par la proposition 3 :

(38) $(Au,v) = a_o(u,v) + \langle\mathcal{a}_{01}\nu u,\gamma v\rangle + \langle\mathcal{S}_o\gamma u,\gamma v\rangle$, $\forall u,v \in H^{2m}(\Omega)^q$, où $\mathcal{S}_o$ est de type $(m-k-1/2,-m+j+1/2)_{j,k\in M_o}$. Donc

(39) $$|\langle\mathcal{S}_o\gamma u,\gamma v\rangle| \leq \|\mathcal{S}_o\gamma u\|_{\{-m+k+1/2\}}\|\gamma u\|_{\{m-k-1/2\}}$$

$$\leq c\|\gamma u\|_{\{m-k-1/2\}}\|\gamma v\|_{\{m-k-1/2\}} \leq c_1\|u\|_m\,\|v\|_m.$$

♦ Avec la notation $B_{J_\varepsilon M_\delta} = B_{\varepsilon\delta}$, (3) s'écrit : $B_{oo}\gamma u = 0$, $B_{10}\gamma u + B_{11}\nu u = 0$.

Puisque $a_o(u,v)$ est aussi continue sur $H^m(\Omega)^q \times H^m(\Omega)^q$, (ii) implique

$$\mathrm{Re}\langle \mathcal{a}_{01}\nu u, \gamma u\rangle \geq -\lambda_1 \|u\|_m^2 , \quad \forall\ u \in D(A_B).$$

Pour tout $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, $u + w$ appartient à $D(A_B)$ et donc

$$\mathrm{Re}\langle \mathcal{a}_{01}\nu u, \gamma u\rangle \geq -\lambda_1 \|u + w\|_m^2, \ \forall\ u \in D(A_B),\ w \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En particulier,

$$\mathrm{Re}\langle \mathcal{a}_{01}\nu u, \gamma u\rangle \geq -|\lambda_1| \inf_{w\in\mathcal{D}(\Omega)} \|u + w\|_m^2, \ \forall\ u \in D(A_B),$$

d'où

(40) $$\mathrm{Re}\langle \mathcal{a}_{01}\nu u, \gamma u\rangle \geq -\lambda_2 \|\gamma u\|^2_{\{m-k-1/2\}}, \ \forall\ u \in D(A_B),$$

par un théorème bien connu (voir e.g. [12]). Par utilisation du lemme 3 nous avons

(41) $$\langle \mathcal{a}_{01}\nu u, \gamma u\rangle = \langle \mathcal{a}_{01}(I - C_{11}B_{11})\Psi,\ (I - C_{oo}B_{oo})\varphi\rangle - \langle \mathcal{a}_{01}C_{11}B_{10}\gamma u, \gamma u\rangle.$$

Ici, $\mathcal{a}_{01}C_{11}B_{10}$ est de type $(m-k-1/2, -m+j+1/2)_{j,k\in M_o}$ tel qu'une estimation comme (39) s'applique au dernier terme de (41); alors (40) entraîne, après quelques réductions :

(42) $$\mathrm{Re}\langle (I - C_{oo}B_{oo})^* \mathcal{a}_{01}(I - C_{11}B_{11})\Psi, \varphi\rangle \geq -\lambda_3 \|\varphi\|^2_{\{m-k-1/2\}}$$

pour tout $[\varphi, \Psi] \in \prod_{k\in M_o} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q \times \prod_{k\in M_1} H^{2m-k-1/2}(\Gamma)^q$. Cela ne peut être vrai que si

$$(43)\qquad (I - C_{oo}B_{oo})^{*}\,\mathcal{A}_{01}(I - C_{11}B_{11}) = 0,$$

ce qui prouve (iii).

Montrons finalement (iii) $\Rightarrow$ (i). Quand (iii) est vrai, (38) a la forme, pour $u,v \in D(A_B)$ (cf.(41))

$$(44)\qquad \begin{aligned}(Au,v) &= a_o(u,v) + \langle \mathcal{S}_o\,\gamma u,\gamma v\rangle - \langle \mathcal{A}_{01}C_{11}B_{10}\gamma u,\gamma v\rangle \\ &= a_o(u,v) + \langle(\mathcal{S}_o - \mathcal{A}_{01}C_{11}B_{10})\gamma u,\gamma v\rangle.\end{aligned}$$

Le théorème 7 donne l'existence d'une forme sesquilinéaire $s(u,v)$ coïncidante avec le dernier terme pour $u,v \in H^m(\Omega)^q$. Prenant $a_B(u,v) = a_o(u,v) + s(u,v)$ on obtient

$$(45)\qquad (Au,v) = a_B(u,v),\quad \forall u,v \in D(A_B).$$

Q.E.D.

<u>Remarque 1</u> : La démonstration entraîne aussi que (45) est valable pour $u \in D(A_B)$ et <u>$v \in V$</u>, où

$$(46)\qquad V = \{v \in H^m(\Omega)^q \mid B_{J_oM_o}\,\gamma v = 0\}.$$

<u>Remarque 2</u> : On peut donner une démonstration un peu plus directe (toujours fondée sur §8 et §9) de l'équivalence entre (i) et (iii). Nous avons inclu la condition (ii) parce qu'elle rend la discussion plus intéressante, à notre avis.

La démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (iii) est encore valable (et (iii) $\Rightarrow$ (ii) est conséquence directe de (44)), si les B_{jk} avec $j > k$ sont permis d'être <u>pseudo-différentiels</u> d'ordres j-k. Dans ce cas, la question de (i) n'a pas beaucoup de sens, parce que les opérateurs pseudo-différentiels sur Γ ne se prolongent en général pas à des opérateurs pseudo-différentiels sur $\bar{\Omega}$.

Remarque 3 : Quand Γ est non-caractéristique pour A, il résulte de la caractère triangulaire de $\mathcal{A}$ et B, que (iii) entraîne

$$\sum_{j\in J} q_j \geq mq.$$

De plus, on peut montrer à l'aide du lemme 1 - 1', que si Γ est non-caractéristique pour A, et $\sum_{j\in J} q_j = mq$, alors (iii) est équivalente à

$$B_{J_oM_o} (\mathcal{A}^*_{M_oM_1})^{-1} B^*_{J_1M_1} = 0,$$

et le théorème 4 est une conséquence du théorème 8.

Exemple : Quand q = m = 1, les A_B sont toujours variationnels. Mais aussitôt que $q > 1$ ou $m > 1$ il y a des restrictions. Prenons le cas où $q = 1$, $m = 2$:

A est d'ordre 4, et s'écrit près de Γ comme $A = A_4 D_t^4 + A_3 D_t^3 + A_2 D_t^2 + A_1 D_t + A_o$. L'ensemble M est égal à $\{0,1,2,3\}$, et on a, par la formule (30) pour $\mathcal{A}$, que

$$\mathcal{A}_{M_oM_1} = \begin{pmatrix} iA_{3,1} & iA_4 \\ iA_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons $J = \{1,3\}$, alors $B\rho u = 0$ prend la forme

$$B_{10}\gamma_0 + \gamma_1 u = 0$$

$$B_{30}\gamma_0 u + B_{31}\gamma_1 u + B_{32}\gamma_2 u + \gamma_3 u = 0,$$

où nous avons pris $B_{11} = B_{33} = 1$, par l'hypothèse de normalité. Alors

$$B_{J_oM_o} = (B_{10}\ \ 1)\ ,\ C_{M_oJ_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{J_1M_1} = (B_{32}\ \ 1)\ ,\ C_{M_1J_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on trouve que théorème 8, (iii) se réduit à

(47) $$A_{3,1} - B_{10}^{*} A_4 - A_4 B_{32} = 0.$$

1° Dans un point <u>non-caractéristique de</u> Γ, (47) devient

(48) $$B_{32} = -B_{10}^{*} + A_4^{-1} A_{3,1},$$

une condition assez exigeante sur les deux opérateurs de premier ordre B_{10} et B_{32}.

2° Dans un point <u>caractéristique</u> de Γ, (47) devient

$$A_{3,1} = 0,$$

qui ne demande rien de B, mais impose une condition sur l'opérateur A.

Remarquons que (48) est <u>stable</u> seulement sous des perturbations de A d'ordre ≤ 2 (près de Γ), et des perturbations de $B_{J_1M_o} = (B_{30}\ B_{31})$.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u> (additif à la bibliographie de l'exposé n° XIX)

[14] R. Seeley : Singular integrals and boundary value problems, Amer. J. Math. <u>88</u> (1966), 781-809.
