Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

G. Grubb

Caractérisation de quelques propriétés des problèmes aux limites pour les systèmes elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 19, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

CARACTERISATION DE QUELQUES PROPRIETES DES PROBLEMES AUX LIMITES POUR LES SYSTEMES ELLIPTIQUES

par G. GRUBB

Exposé N° XIX

1er Mars 1972

§ 1. Soit $\bar{\Omega}$ une variété compacte C^∞ de dimension n, à bord Γ (nous noterons $\bar{\Omega}\setminus\Gamma = \Omega$) et soit E un fibré vectoriel C^∞ de rang $q \geq 1$ sur $\bar{\Omega}$. On choisit une "dérivée normale" D_t dans E qui définit les opérateurs de trace

$$\gamma_k : u \to D_t^k u \,|_\Gamma, \; k = 0,1,2,\ldots;$$

et on définit convenablement les espaces L^2 et les espaces de Sobolev H^s sur E et sur $E|_\Gamma$.

Soit A un opérateur différentiel elliptique dans E, d'ordre 2m et à coefficients C^∞. Notons

$$M = \{0\ 1\ \ldots 2m-1\},\; M_o = \{0,\ldots,m-1\},\; M_1 = \{m,\ldots,2m-1\};$$

et $\rho = \{\gamma_k\}_{k\in M}$, $\gamma = \{\gamma_k\}_{k\in M_o}$ et $\nu = \{\gamma_k\}_{k\in M_1}$. On a la formule de Green

(1) $$(Au,v) - (u,A'v) = (\mathcal{a}\rho u,\rho v),\; \forall\, u,v \in C^\infty(E),$$

où $\mathcal{a}$ est une $M\times M$-matrice $(\mathcal{a}_{jk})_{j,k\in M}$ d'opérateurs différentiels $\mathcal{a}_{jk}$ dans $E|_\Gamma$ d'ordres $2m-j-1-k$ (donc nuls pour $2m-j-1 < k$). Notons $\mathcal{a}_{M_\alpha M_\beta} = (\mathcal{a}_{jk})_{j\in M_\alpha, k\in M_\beta}$, pour $\alpha,\beta = 0,1$.

On va considérer les problèmes aux limites définis comme suit : il est donné un ensemble $J \subset M$, et pour chaque $j \in J$ un fibré F_j sur Γ de rang q tel que $\Sigma_{j\in J}\, q_j = mq$, et pour tout $(j,k) \in J\times M$ un opérateur différentiel B_{jk} d'ordre j-k allant de $E|_\Gamma$ dans F_j. Soit $B = (B_{jk})_{j\in J,k\in M}$ alors on définit la réalisation A_B de A par

(2) $$A_B : u \mapsto Au,\; D(A_B) = \{u\in L^2(\Omega)\,|\,Au\in L^2(\Omega),\; B\rho u = 0\}.$$

Les B_{jk} avec $j < k$ sont nuls; les B_{jj} peuvent être considérés comme des <u>morphismes</u> de $E|_{\Gamma}$ dans F_j. Soit $J_o = J \cap M_o$, $J_1 = J \cap M_1$, et notons $B_{J_\alpha M_\beta} = (B_{jk})_{j\in J_\alpha,\ k\in M_\beta}$, $\alpha,\beta = 0,1$; alors la condition $B\rho u = 0$ s'écrit

(3)
$$\begin{cases} B_{J_oM_o}\ \gamma u = 0 \\ B_{J_1M_o}\ \gamma u + B_{J_1M_1}\ \nu u = 0 \end{cases}$$

où $B_{J_oM_o}$ et $B_{J_1M_1}$ sont, dans un sens, triangulaires.

<u>Problème</u> : Sous quelles conditions existe-t-il $c > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, tels que

(4) $$\mathrm{Re}(Au,u) \geq c\|u\|_m^2 - \lambda\|u\|_o^2,\ \forall\ u \in D(A_B) \cap H^m(E)?$$

(l'inégalité "de Gårding"); ou

(5) $$\mathrm{Re}(Au,u) \geq -\lambda\|u\|_o^2\ ,\ \forall\ u \in D(A_B)\ ?$$

ou

(6) $$\mathrm{Re}(Au,u) \geq -\lambda\|u\|_m^2\ ,\ \forall\ u \in D(A_B) \cap H^m(E)\ ?$$

Ici, (4) exige $\mathrm{Re}\sigma^o(A) > 0$ sur $T^*(\Omega)$ 0 pour être vrai sur $C_o^\infty(E|_\Omega)$; (5) exige au moins $\mathrm{Re}\sigma^o(A) \geq 0$; et (6) est toujours vrai sur $C_o^\infty(E|_\Omega)$. D'après une observation de Seeley [13], (5) + ellipticité de A_B entraîne que B est <u>normal</u> dans le sens que <u>tous</u> <u>les</u> B_{jj} <u>sont</u> <u>surjectifs</u>. Nous supposerons désormais que ceci a lieu; en particulier $q_j \leq q$ pour tout $j \in J$.

Une condition suffisante pour (4) a été donné par Agmon [1] et Guedes de Figueiredo [9], portant sur les A_B qui peuvent etre définis par une forme sesquilinéaire integro-différentielle (quand $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$). Shimakura et Fujiwara [3] (et l'auteur [5]) ont traités une classe particulière des B, pour $q = 1$.

Quand on regarde le problème aujourd'hui, on pense immédiatement à la méthode de Caldéron, Seeley et Hörmander (voir en particulier [10]), où on ramène des problèmes de régularité à des problèmes analogues pour des opérateurs pseudo-différentiels (o p. d.) dans la frontière. Mais, bien qu'on utilise leur résultat fondamental on doit, pour (4)-(6), procéder d'une manière différente; et on trouve qu'il entre, même pour (4), des conditions sur les opérateurs A et B entiers, non seulement sur leur symbole principal. Pour bien montrer ce qu'il se passe, nous esquissons d'abord une théorie abstraite élémentaire des problèmes aux limites généraux (détails dans [4]-[6]), et nous donnerons ensuite l'application -plus compliquée- aux problèmes aux limites concrets. Les nouveaux résultats sont pour la plupart annoncés dans [7] et [8].

§ 2. On désigne par A_1 l'opérateur maximal dans $L^2(E)$ pour A :

$$A_1 : u \mapsto Au; \; D(A_1) = \{u \in L^2(E) \mid Au \in L^2(E)\};$$

et par A_o l'opérateur minimal de domaine $D(A_o) = H_o^{2m}(E)$. Les opérateurs linéaires $\tilde{A}$ avec

$$A_o \subset \tilde{A} \subset A_1$$

sont les réalisations de A; on désigne par A_γ la réalisation ("de Dirichlet") de domaine $H^{2m}(E) \cap H_o^m(E)$. Nous supposons que

(7) $\quad A_\gamma$ est une isomorphisme de $D(A_\gamma)$ sur $L^2(E)$,

et supposons aussi, pour simplifier les énoncés, que $A = A'$.

Avec le noyau de A_1 noté $Z(A_1)$,

$$Z(A_1) = \{u \in L^2(E) | Au = 0\}$$

on a la décomposition de $D(A_1)$ dans une somme directe topologique

$$D(A_1) = D(A_\gamma) \dotplus Z(A_1), \tag{8}$$

notée

$$u = u_\gamma + u_\zeta = pr_\gamma u + pr_\zeta u,$$

où $u_\gamma = A_\gamma^{-1} Au$, $u_\zeta = u-u_\gamma$. Quand X est un sous-espace de $L^2(E)$, la projection orthogonale de u dans X sera notée u_X.

<u>Théorème 1</u> : Soit $\widetilde{A}$ une réalisation fermée de A. Soient

$$V = \overline{pr_\zeta D(\widetilde{A})},\ W = \overline{pr_\zeta D(\widetilde{A}^*)},$$

fermetures dans $Z(A_1)$. L'ensemble $G \subset V \times W$ défini par

$$G = \{[u_\zeta, (Au)_W] \mid u \in D(A)\}$$

est le graphe d'un opérateur $T : V \to W$, fermé et de domaine dense.

Inversement, soient V et W deux sous-espaces fermés de $Z(A_1)$, et $T : V \to W$ un opérateur fermé, de domaine dense. Alors T définit une réalisation fermée $\widetilde{A}$ de A par

$$D(\widetilde{A}) = \{u \in D(A_1) \mid u_\zeta \in D(T),\ (Au)_W = Tu_\zeta\}. \tag{9}$$

Les deux procédés définissent une correspondance biunivoque entre les réalisations fermées $\widetilde{A}$ de A et les triples V, W, T.

Cette correspondance respecte les propriétés que nous étudions et beaucoup d'autres :

Théorème 2 : Supposons que $\tilde{A}$ correspond à $T : V \to W$ par le théorème 1. Alors on a :

1° $\tilde{A}^*$ correspond à $T^* : W \to V$ par le théorème 1.

2° $Z(\tilde{A}) = Z(T)$; et $R(\tilde{A}) = R(T) \dotplus (L^2(E) \ominus W)$.

3° Quand $Z(\tilde{A}) = Z(T) = 0$, alors

$$\tilde{A}^{-1} = A_\gamma^{-1} + T^{(-1)}, \tag{10}$$

ou $T^{(-1)} f = T^{-1}(f_W)$ pour $f \in R(\tilde{A})$.

4° Soit $s \in [0,2m]$. Alors

$$D(\tilde{A}) \subset H^s(E) \Leftrightarrow D(T) \subset H^s(E).$$

5° Supposons de plus que $A_\gamma > 0$. Alors

$$\operatorname{Re}(Au,u) \geq 0 \text{ pour } u \in D(\tilde{A}) \Leftrightarrow V \subset W \text{ et } \operatorname{Re}(Tz,z) \geq 0 \text{ pour } z \in D(T). \tag{11}$$

$$\operatorname{Re}(Au,u) \geq c\|u\|_m^2 - \lambda\|u\|_0^2 \text{ pour } u \in D(\tilde{A}) \cap H^m(E) \Leftrightarrow V \subset W \text{ et } \operatorname{Re}(Tz,z) \geq c'\|z\|_m^2 - \lambda'\|z\|_0^2 \text{ pour } z \in D(T) \cap H^m(E) \tag{12}$$

$$\operatorname{Re}(Au,u) \geq -\lambda\|u\|_m^2 \text{ pour } u \in D(\tilde{A}) \cap H^m(E) \Leftrightarrow V \subset W \text{ et } \operatorname{Re}(Tz,z) \geq -\lambda'\|z\|_m^2 \text{ pour } z \in D(T) \cap H^m(E) \tag{13}$$

On remarque les conséquences : par 1°, les réalisations auto-adjointes sont caractérisées par $V = W$ et $T = T^*$. 3° permet l'application de théoremes de perturbation; nous y reviendrons à la fin de cet exposé

4° détermine en particulier les réalisations elliptiques, et 5° servira à notre problème. (Dans les articles [4]-[6] nous avons bien d'autres résultats du genre de 5°.).

§ 3. Pour traduire ces résultats en quelquechose qui a lieu sur Γ, nous allons utiliser que, sous l'hypothèse de (7), la théorie de Lions et Magenes [12] implique :

<u>Proposition 1</u> : Pour tout $s \in \mathbb{R}$, γ définit un isomorphisme (appelé γ_Z) de $\{u \in H^s(E) \mid Au = 0\}$ sur $\prod_{k \in M_o} H^{s-k-1/2}(E|_\Gamma)$. En particulier

(14) $$\gamma_Z : Z(A_1) \to \prod_{k \in M_o} H^{-k-1/2}(E|_\Gamma)$$

est un isomorphisme.

Nous désignerons par H_γ l'espace $\prod_{k \in M_o} H^{-k-1/2}(E|_\Gamma)$ <u>muni de la norme pour laquelle (14) est une isométrie</u>. On peut déduire de A un certain o.ps.-d. positif elliptique R, isomorphisme de $\prod_{k \in M_o} H^{-k-1/2}(E|_\Gamma)$ sur $\prod_{k \in M_o} H^{k+1/2}(E|_\Gamma)$ pour lequel

(15) $$\|\varphi\|^2_{H_\gamma} = \langle R\varphi, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in H_\gamma$$

voir [6], exemple 6.3.

Avec cette définition, $T : V \to W$ se traduit en un opérateur $U : X \to Y$, où

$$(16) \qquad X = \gamma V = \gamma\, \overline{\mathrm{pr}_\zeta\, D(\widetilde{A})} = \gamma D(A)\,, \quad Y = \gamma W = \overline{\gamma D(\widetilde{A}^*)}\,,$$

(fermetures dans H_γ); $D(U\ ) = \gamma D(T)$, et $U = \gamma T \gamma_Z^{-1}$.

Les énoncés du théorème 2 se traduisent de manière évidente, nous ne les répétons pas. (Dans [4]-[6] on a traduit T en un opérateur $L : X \to Y'$, pour éviter de fixer les normes dans H_γ, X et Y; cela suffit pour les résultats "qualitatifs")

§ 4. Regardons maintenant la réalisation A_B. Nous avons besoin d'un lemme :

<u>Lemme 1</u> : Quand B est normal B est une <u>surjection</u> de $\prod_{k\in M} H^{s-k}(E|_\Gamma)$ sur $\prod_{j\in J} H^{s-j}(F_j)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$; et il existe une inverse à droite $C = (C_{kj})_{k\in M,\, j\in J}$, opérateur différentiel <u>injectif</u>, continu de $\prod_{j\in J} H^{s-j}(F_j)$ dans $\prod_{k\in M} H^{s-k}(E|_\Gamma)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$B_{J_o M_o}\, C_{M_o J_o} = I_{J_o}\,, \quad B_{J_1 M_1}\, C_{M_1 J_1} = I_{J_1}$$

(où I_{J_o} désigne l'identité dans $\bigoplus_{j\in J_\alpha} F_j$).

Dans la démonstration, on utilise le caractère triangulaire de B. A l'aide de ce lemme, on montre assez facilement que (cf.(16) et (1),(2) (3))

(17) $$X = \{\varphi \in H_\gamma \mid B_{J_o M_o}\varphi = 0\}$$

(18) $$Y = (\mathcal{a}^*_{M_o M_1})^{-1} B^*_{J_1 M_1} \prod_{j\in J_1} H^{-2m+j+1/2}(F_j).$$

L'opérateur U va de X en Y. Même si on montre que U est une restriction d'un o.ps.-d. cela ne sert pas à grand chose, car X et Y ne sont pas en général des (produits d') espaces de Sobolev. Cependant on peut montrer, grâce au lemme 1 :

<u>Lemme 2</u> : (i) Soit $G_1 = \bigoplus_{j\in J_1} F_j$. L'o.ps.-d. $\Psi = (\mathcal{a}^*_{M_o M_1})^{-1} B^*_{J_1 M_1} \Xi$,

où $\Xi = (B_{J_1 M_1} \mathcal{a}^{-1}_{M_o M_1} R (\mathcal{a}^*_{M_o M_1})^{-1} B^*_{J_1 M_1})^{-1/2}$, définit une <u>isométrie</u> de $L^2(G_1)$ sur Y; en outre, $\Psi_1 = \Xi^{-1} C^*_{M_1 J_1} \mathcal{a}^*_{M_o M_1}$ satisfait à $\Psi_1 \Psi = I$.

(ii) De même, il existe un fibré G sur Γ de rang $\sum_{j\in J_1} q_j$ et un o.ps.-d. Φ injectif continu de $L^2(G)$ dans H_γ, <u>isométrie</u> de $L^2(G)$ sur X, et ayant une inverse à gauche Φ_1, encore pseudo-différentielle. (Si X = Y, on prend $G = G_1$, $\Phi = \Psi$ et $\Phi_1 = \Psi_1$.)

Donc nous pourrons transformer U en un opérateur $\mathcal{T} : L^2(G) \to L^2(G_1)$ (où $\mathcal{T} = \Psi_1 U \Phi$). On montre pour $\mathcal{T}$ le résultat fondamental :

<u>Théorème 3</u> : $\mathcal{T}$ est la réalisation maximale de l'o.p.s.-d. d'ordre 2m

$$\mathcal{T} = -\Xi(B_{J_1 M_o} + B_{J_1 M_1} P_{\gamma,\nu})\Phi,$$

où $P_{\gamma,\nu} = \nu \circ \gamma_Z^{-1}$ (o.ps.-d. sur Γ). $\sigma^o(\mathcal{T})$ dépend seulement de $\sigma^o(B)$ et de $\sigma^o(A)$ sur Γ.

§ 5. Dans l'application du théorème 2. 5°, on trouve d'abord que $[V \subset W \Rightarrow]\; X \subset Y \Rightarrow X = Y$, par utilisation du lemme 1 encore une fois. Et $\mathcal{T}$ satisfait alors trivialement à $|(\mathcal{T}\varphi,\Psi)_{L^2(G)}| \leq c\|\varphi\|_m\|\Psi\|_m$. On aura, plus précisément

<u>Théorème 4</u> : Soient X et Y définis par (17) -(18). Les conditions suivantes sont <u>équivalentes</u> :

(i) $X \subset Y$; (ii) $X = Y$; (iii) $X \supset Y$;

(19) (iv) $B_{J_oM_o}(\mathcal{O}\!\!\iota^*_{M_oM_1})^{-1}\, B^*_{J_1M_1} = 0$;

(v) $\mathrm{Re}(Au,u) \geq -\lambda\|u\|^2_m$, $\forall u \in D(A_B) \cap H^m(E)$;

(vi) $|(Au,v)| \leq c\;\|u\|_m\;\|v\|_m$, $\forall\; u,v \in D(A_B) \cap H^m(E)$.

Le théorème est même vrai quand A est un opérateur quelconque d'ordre 2m avec Γ non-caractéristique; et il décrit aussi les A_B qui proviennent des formes sesquilinéaires.

Quant aux autres inégalités, nous avons

<u>Théorème 5</u> : (Hypothèses : A elliptique avec A = A', et B normal.) A_B satisfait à l'inégalité de Gårding (4) si et seulement si :

a) $\sigma^o(A) > 0$ sur $T^*(\Omega)\setminus 0$;
b) $B_{J_oM_o}(\mathcal{O}\!\!\iota^*_{M_oM_1})^{-1}\, B^*_{J_1M_1} = 0$;
c) $\mathrm{Re}\;\sigma^o(\mathcal{T}) > 0$ sur $T^*(\Gamma)\setminus 0$.

Ici, $\mathrm{Re}\;\sigma^o(\mathcal{T}) > 0$ entraîne en particulier $D(A_B) \subset H^{2m}(E)$.
On a $\mathrm{Re}(A_Bu,u) \geq 0$ sur $D(A_B)$ si et seulement si a) et b) ont lieu, et

$\mathrm{Re}(\mathcal{T}\varphi,\varphi) \geq 0$ sur $D(\mathcal{T})$.

§ 6. Finalement une application de 3° :

Soit $\sigma^0(A) > 0$, et A_B une réalisation elliptique auto-adjointe, <u>non inférieurement borné</u> (i.e. $\sigma^0(\mathcal{T})$ inversible mais non défini positif). A_B est à spectre discret, et on peut le supposer inversible. Soit $N^{\pm}(A_B;t)$ le nombre de valeurs propres positifs, resp. négatifs, dans l'intervalle $[-t,t]$. Agmon [2] a montré :

$$N^+(A_B;t) - c(A)t^{n/2m} = o(t^{(n-\theta)/2m}) \tag{20}$$

$$N^-(A_B;t) = o(t^{(n-\theta)/2m}), \tag{21}$$

pour tout $\theta < \frac{1}{2}$, $c(A)$ une constante dérivée de $\sigma^0(A)$. (Il paraît être prouvé que Hörmander [11] entraîne la validité de (20)-(21) avec $\theta < 1$, quand $q = 1$ ou les valeurs propres de $\sigma^0(A)$ sont distincts).

Par application du théorème de perturbation de Weyl à (10), ainsi que le fait que $\mathcal{T}$ est un opérateur d'ordre 2m sur la variété Γ <u>de dimension n-1</u>, nous trouvons

<u>Théorème 6</u> : Sous les hypothèses ci-dessus,

$$N^-(A_B;t) \leq c_1 t^{(n-1)/2m} + o(t^{(n-1)/2m})$$

où C_1 est une constante dérivée de $\sigma^0(\mathcal{T}')$.

D'autre part, on peut, pour tout choix de $B_{J_oM_o}$ et $B_{J_1M_1}$ satisfaisant à (19), choisir $B_{J_1M_o}$ pseudo-différentiel, tel que A_B est elliptique et auto-adjoint, et

$$N^-(A_B;t) \geq ct^{(n-1)/2m}$$

pour c donnée > 0. Voir [8] pour d'autres résultats sur $N^-(A_B;t)$.
Nous cherchons actuellement à appliquer des idées pareilles à $N^+(A_B;t)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Agmon : The coerciveness problem for integro-differential forms, J. Analyse Math. 6 (1958), 183-223.

[2] S. Agmon : Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators, Arch. Rat. Mech. An. 28 (1968) 165-183.

[3] D. Fujiwara et N. Shimakura : Sur les problèmes aux limites stablement variationnels, J. Math. Pures Appl. 49 (1970) 1-28.

[4] G. Grubb : A characterization of the non-local boundary value problems associated with an elliptic operator, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968) 425-513.

[5] G. Grubb : Les problèmes aux limites généraux d'un opérateur elliptique provenant de la théorie variationnelle, Bull. So.Math (2ème série) 94 (1970), 113-157.

[6] G. Grubb : On coerciveness and semiboundedness of general boundary problems, Israel J. Math., 10 (1971), 32-95.

[7] G. Grubb : Problèmes aux limites semi-bornés pour les systèmes elliptiques, C. R. Acad. Sc. (Série A) 274 (1972) 320-323.

[8] G. Grubb : Le spectre négatif des problèmes aux limites auto-adjoints fortement elliptiques, C. R. Acad. Sc. (Série A) 274 (1972) 409-412.

[9] D. Guesdes de Figueiredo : The coerciveness problem for forms over vector valued functions. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 63-94.

[10] L. Hörmander : Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math. 83 (1966) 129-209.

[11] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator, Acta. Math. 121 (1968), 193-218.

[12] J. L. Lions et E. Magenes : Problèmes aux limites non-homogènes et applications, vol.1, Ed. Dunod, Paris 1968.

[13] S. Seeley, exposé dans les Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970, vol.2, 798-801.