Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Guichardet

Espaces hilbertiens symétriques et produits tensoriels continus

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 15 et 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

ESPACES HILBERTIENS SYMETRIQUES ET PRODUITS TENSORIELS CONTINUS

par A. GUICHARDET

Exposés N° XV - XVI

2-9 Février 1972

Ce qui suit est un bref résumé d'un cours donné au printemps 1971 à Minneapolis, U.S.A. ([1]).

§ 1. Espaces hilbertiens symétriques et applications EXP.

Définition 1. Soit H un espace hilbertien complexe ; nous notons S^nH la n-ième puissance symétrique hilbertienne de H, que l'on peut identifier à l'ensemble des éléments symétriques de la n-ième puissance tensorielle hilbertienne de H ; on a en particulier $S^0H = \underline{C}$ et $S^1H = H$; nous désignons par $S\,H$ la somme directe hilbertienne des S^nH , $n = 0,1,\dots$; ses éléments sont donc des suites $(x_o, x_1,\dots x_n \dots)$ avec le produit scalaire

$$(x\,|\,y) = \sum_{n\geq o} (x_n\,|\,y_n)\ .$$

Pour tout $a \in H$ on note EXP a l'élément $(1, a, a^{\otimes 2}/\sqrt{2!},\dots a^{\otimes n}/\sqrt{n!} \dots)$ de SH.

Propriétés de l'application EXP.

(i) $\mathrm{EXP}\ 0 = (1,0,0,\dots) \in S^0H$

(ii) $(\mathrm{EXP}\ a\,|\,\mathrm{EXP}\ b) = e^{(a|b)}$ d'où en particulier $\|\mathrm{EXP}\ a\| = e^{\frac{1}{2}\|a\|^2}$

(iii) l'application EXP de H dans SH est injective et bicontinue

(iv) les éléments EXP a sont linéairement indépendants et totaux dans SH.

<u>Exemple</u> 1. $\underline{SC}$ est canoniquement isomorphe à $L^2(\underline{R}, \nu)$ où ν est la mesure gaussienne réduite $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2/2}\, dt$; les éléments $1^{\otimes n}$ correspondent aux polynomes de Hermite, et chaque élément EXP a , $a \in \underline{C}$, à la fonction $t \longmapsto e^{at-a^2/2}$. Plus généralement soient E un EVT réel "raisonnable" (par exemple $\underline{LF}$ séparable) et μ une mesure gaussienne sur E', i.e. une mesure de probabilité telle que pour tout $x \in E$, $\int e^{i<f,x>} d\mu(f)$ soit de la forme $e^{-Q(x)/2}$ où Q est une forme quadratique positive continue non dégénérée sur E ; soit H l'espace hilbertien complexifié du complété de E pour Q ; alors SH est canoniquement isomorphe à $L^2(E',\mu)$, et chaque élément EXP x , $x \in E$, correspond à la fonction sur E' : $f \longmapsto e^{<f,x> - Q(x)/2}$.

<u>Le foncteur S.</u> Soit T une application linéaire contractante (ceci pour éviter les opérateurs non bornés) d'un espace hilbertien H dans un espace hilbertien K ; on en déduit une application linéaire contractante ST de SH dans SK :

$$ST = (I , T , T^{\otimes 2} ,\dots T^{\otimes n} \dots)$$

i.e.

$$ST(x) = T^{\otimes n}(x) \quad \forall\ x \in S^nH \ ;$$

on a aussi

$$ST(\mathrm{EXP}\ x) = \mathrm{EXP}(Tx) \quad \forall\ x \in H.$$

On obtient ainsi un foncteur S de la catégorie des espaces hilbertiens avec applications linéaires contractantes dans elle-même.

§ 2. <u>Les opérateurs unitaires</u> $U_{A,b,c}$.

Soit H^1 le sous-ensemble de SH formé des vecteurs k EXP x où $k \in \underline{C} - \{0\}$ et $x \in H$; les opérateurs unitaires U dans SH tels que U et U^{-1} conservent H^1 globalement forment un groupe G_H que nous allons déterminer. Tout d'abord pour tout $A \in \mathcal{U}(H)$ (groupe des opérateurs unitaires dans H) l'opérateur SA appartient à G_H ; nous le notons $U_{A,0,1}$ pour des raisons qui apparaîtront bientôt. Deuxièmement pour tout vecteur b de H il existe un opérateur unitaire unique dans SH, soit $U_{I,b,1}$, telque

$$U_{I,b,1}(\mathrm{EXP}\ x) = e^{-\frac{1}{2}\|b\|^2 - (x|b)}\ \mathrm{EXP}(x+b) \qquad \forall x \in H ;$$

on a visiblement $U_{I,b,1} \in G_H$. Troisièmement pour tout $c \in \underline{U}$ (groupe des nombres complexes de module 1), l'opérateur scalaire cI appartient à G_H. On déduit de cela des opérateurs unitaires appartenant à G_H :

$$U_{A,b,c} = c\, U_{I,b,1}\, U_{A,0,1}$$

$$U_{A,b,c}\,(\mathrm{EXP}\ x) = c\, e^{-\frac{1}{2}\|b\|^2 - (Ax|b)}\ \mathrm{EXP}\,(Ax+b)$$

et on a la

Proposition 1. Tout élément de G_H s'écrit d'une façon unique sous la forme $U_{A,b,c}$ où $A \in \mathcal{U}(H)$, $b \in H$, $c \in \underline{U}$.

On voit ainsi que G_H est isomorphe au groupe $\mathcal{U}(H) \times H \times \underline{U}$ où la loi de composition est la suivante :

$$(A,b,c)\ (A',b',c') = (AA',\ b+Ab',\ cc'\ e^{i\mathrm{Im}(b|Ab')}) \ .$$

Remarque 1. On a en particulier

$$U_{I,b,1}\, U_{I,b',1} = e^{i\ \mathrm{Im}(b|b')}\, U_{I,b+b',1} \ ;$$

autrement dit l'application $b \longmapsto U_{I,b,1}$ est une représentation unitaire projective du groupe additif H dans l'espace SH ; cette représentation est connue depuis longtemps en Théorie Quantique des Champs sous le nom de "représentation de Fock des relations de commutation" ; SH est appelé "espace de Fock". Les vecteurs EXP x ont été introduits indépendamment et à peu près simultanément par des physiciens théoriciens comme H.Araki ([2]), et par des probabilistes comme J.Neveu ([3]) et G.Kallianpur ([4]) pour l'étude des mesures gaussiennes (cf. exemple 1). Araki a déduit de cette théorie ([5]) une nouvelle méthode pour déterminer les fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact G, méthode qui redonne, dans le cas où $G = \underline{R}^n$, des résultats classiques de Théorie des Probabilités ; cette méthode repose sur la détermination des morphismes de G dans G_H et ceci pose des problèmes - pas du tout triviaux - de cohomologie des groupes ; en effet un tel morphisme sera de la forme

$$G \ni g \longmapsto (A_g , b_g , c_g)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{gg'} &= A_g A_{g'} \\ b_{gg'} &= b_g + A_g b_{g'} \\ c_{gg'} &= c_g c_{g'} e^{i \operatorname{Im}(b_g | A_g b_{g'})} \end{aligned} \quad ;$$

autrement dit $g \longmapsto A_g$ est une représentation unitaire de G dans H, $g \longmapsto b_g$ est un 1-cocycle pour cette représentation, et $g \longmapsto c_g$ est une 1-cochaîne $G \longrightarrow \underline{U}$ dont le cobord est la 2-cochaîne

$$(g,g') \longmapsto e^{i \operatorname{Im}(b_g | A_g b_{g'})}$$

§ 3. Lien avec sommes directes et produits tensoriels. Théorème d'Araki et Woods.

On peut dire en bref que le foncteur S transforme les sommes directes en produits tensoriels ; cela est tout à fait plausible - et facile à vérifier - dans le cas des sommes directes finies, puisque la même propriété a lieu en Algèbre ; par contre pour énoncer un résultat précis dans le cas général, il est peut-être bon de rappeler la définition des produits tensoriels infinis d'espaces hilbertiens.

Définition 2. On se donne une famille quelconque d'espaces hilbertiens $(H_t)_{t \in T}$

où T est un ensemble d'indices quelconque, et pour chaque t un vecteur unitaire a_t de H_t ; pour chaque partie finie S de T on forme le produit tensoriel hilbertien $\bigotimes_{t\in S} H_t$; pour chaque couple de parties finies $R \subset S$ on considère l'application linéaire isométrique $\bigotimes_{t\in R} H_t \longrightarrow \bigotimes_{t\in S} H_t$ qui envoie tout élément x sur l'élément $x \otimes (\bigotimes_{t\in S-R} a_t)$; on obtient ainsi un système inductif, dont la limite inductive est appelée <u>produit tensoriel des</u> H_t <u>relativement aux</u> a_t et notée $\overset{(a_t)}{\bigotimes_{t\in T}} H_t$. Ce nouvel espace est engendré par les éléments <u>décomposables</u> de la forme $\otimes x_t$ où x_t appartient à H_t et est égal à a_t sauf pour un nombre fini de t ; le produit scalaire de deux tels éléments est donné par

$$(\otimes x_t \mid \otimes y_t) \quad = \quad \prod (x_t \mid y_t) \ .$$

On peut aussi donner du produit tensoriel une autre définition qui nous sera utile au § 4 pour passer au cas des produits tensoriels continus : notons Γ le sous-ensemble du produit cartésien $\prod_{t\in T} H_t$ formé des familles $x = (x_t)$ telles que $x_t = a_t$ sauf pour un nombre fini de t ; sur Γ on a un noyau de type positif λ : $\lambda(x,y) = \prod (x_t \mid y_t)$; on prend l'espace hilbertien H canoniquement associé à ce noyau, c'est-à-dire le séparé-complété de l'espace préhilbertien $\underline{C}^{(\Gamma)}$ pour le produit scalaire

$$(F \mid G) \quad = \quad \sum_{x,y\in\Gamma} F(x)\ \overline{G(y)}\ \lambda(x,y) \ ;$$

H n'est autre que le produit tensoriel cherché et, pour tout $x \in \Gamma$, l'image canonique dans H de l'élément $\delta_x \in \underline{C}^{(\Gamma)}$ n'est autre que $\otimes x_t$.

Ceci posé on peut énoncer le résultat annoncé au début du présent paragraphe :

<u>Proposition</u> 2. Soit H la somme hilbertienne d'une famille d'espaces hilbertiens H_t ; posons $a_t = \mathrm{EXP}\ 0 \in SH_t$; il existe un isomorphisme isométrique unique de SH sur le produit tensoriel $\overset{(a_t)}{\bigotimes_{t\in T}} SH_t$ transformant, pour tout élément $x =$

$\oplus x_t$ de la somme algébrique des H_t, EXP x en $\otimes$ EXP x_t .

La démonstration est très simple : il suffit de remarquer que pour deux éléments x et y de la somme algébrique on a

$$(\mathrm{EXP}\ x \mid \mathrm{EXP}\ y) = e^{(x|y)} = e^{\sum (x_t|y_t)} = \prod e^{(x_t|y_t)}$$

$$= \prod (\mathrm{EXP}\ x_t \mid \mathrm{EXP}\ y_t) = (\otimes \mathrm{EXP}\ x_t \mid \otimes \mathrm{EXP}\ y_t) ,$$

et que les éléments EXP x (resp. $\otimes$ EXP x_t) sont totaux dans SH (resp. dans $\otimes^{(a_t)} SH_t$).

Remarque 2. Nous verrons au paragraphe suivant que cette proposition s'étend aux sommes hilbertiennes continues et produits tensoriels continus.

Il résulte de la proposition 2 que le foncteur S transforme toute algèbre booléenne de décompositions en sommes directes en une algèbre booléenne de décompositions en produits tensoriels ; plus précisément considérons une algèbre booléenne complète Θ , d'éléments extrêmes $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, un espace hilbertien K et, pour chaque $\theta \in \Theta$, un sous-espace hilbertien K_θ de K de façon que $K_{\mathbf{0}} = 0$, $K_{\mathbf{1}} = K$ et $K_\theta = \oplus K_{\theta_i}$ (somme hilbertienne) pour toute partition d'un élément θ en des éléments θ_i ; posons $H = SK$, $H_\theta = SK_\theta$, $\omega = \mathrm{EXP}\ 0 \in H$, $\omega_\theta = \mathrm{EXP}\ 0 \in H_\theta$; pour toute partition $\mathcal{F}$ d'un élément θ en des éléments θ_i on a un isomorphisme $\Lambda_{\mathcal{F}}$ de $\otimes^{(\omega_{\theta_i})} H_{\theta_i}$ sur H_θ . Le système $(\Theta, (H_\theta), (\omega_\theta), (\Lambda_{\mathcal{F}}))$ a les propriétés suivantes :

(i) $H_{\mathbf{0}} = \underline{C}$, $\omega_{\mathbf{0}} = 1$, $H_{\mathbf{1}} = H$, $\omega_{\mathbf{1}} = \omega$

(ii) $\Lambda_{\mathcal{F}}(\otimes \omega_{\theta_i}) = \omega_\theta$

(iii) deux propriétés d'associativité et de commutativité dont l'énoncé occuperait une page entière, et que le lecteur pourra ou ignorer, ou essayer de reconstituer lui-même.

Araki et Woods ont démontré dans [2] un résultat, le seul résultat profond actuellement connu de cette théorie, qui est une réciproque de ce qui précède : en bref toute algèbre booléenne de décompositions en produits tensoriels est l'image par le foncteur S d'une algèbre booléenne de décompositions en sommes directes. Plus précisément on se donne un système $(\Theta, (H_\theta), (\omega_\theta), (\Lambda_{\mathcal{F}}))$ vérifiant les conditions (i),(ii),(iii) ci-dessus ; on dit qu'un vecteur x de H est <u>factorisable</u> si pour toute partition finie $\mathcal{F}$ de 1 en des éléments θ_i, x peut s'écrire $\Lambda_{\mathcal{F}}(\bigotimes_{i\in I} x_i)$ avec $x_i \in H_i$; de même on dit qu'un opérateur unitaire U dans H est <u>factorisable</u> si dans la même situation U peut s'écrire $\Lambda_{\mathcal{F}}.\bigotimes_{i\in I} U_i.\Lambda_{\mathcal{F}}^{-1}$ où chaque U_i est un opérateur unitaire dans H_{θ_i}. On a alors le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 1. On suppose que Θ est sans atomes et que l'ensemble des vecteurs factorisables x de H vérifiant $(x|\omega) = 1$ est total dans H ; il existe alors un espace hilbertien K, une famille de sous-espaces K_θ vérifiant les conditions ci-dessus, et des isomorphismes $\Phi_\theta : H_\theta \longrightarrow SK_\theta$ tels que

a) $\Phi_\theta(\omega_\theta) = \mathrm{EXP}\ 0 \in SK_\theta$

b) Φ_1 transforme l'ensemble des vecteurs factorisables x de H vérifiant $(x|\omega) = 1$ en l'ensemble des vecteurs EXP a, $a \in K$

c) Φ_1 transforme l'ensemble des opérateurs unitaires factorisables dans H en l'ensemble des opérateurs $U_{A,b,c}$ où A,b,c sont choisis comme au § 2, mais où en outre A conserve chaque sous-espace K_θ

d) pour toute partition $\mathcal{F}$ d'un élément θ en des éléments θ_i, Φ_θ transforme l'isomorphisme $\Lambda_{\mathcal{F}}$ en l'isomorphisme canonique $\otimes^{(\mathrm{EXP}\ 0)} SK_{\theta_i} \longrightarrow SK_\theta$ décrit à la proposition 2.

La démonstration est longue et compliquée, mais directe en ce sens qu'on construit un par un les objets qui figurent dans l'énoncé et qu'on établit leurs propriétés une par une : on prend pour K l'ensemble des vecteurs factorisables x de H vérifiant $(x|\omega) = 1$, puis on définit sur K une structure d'espace hilbertien, c'est-à-dire une structure d'espace vectoriel et un produit scalaire $(.|.)_K$; ce produit scalaire doit être un logarithme du produit scalaire $(.|.)_H$; j'ai quelque peu simplifié sa construction (en utilisant les propriétés des algèbres booléennes), mais pas du tout, malheureusement, celle de la structure d'espace vectoriel ; pour celle-ci, qui reste très compliquée, l'idée de base est la suivante : si un élément a de K est très petit, EXP a - EXP 0 $= (0,a,a^{\otimes 2}/\sqrt{2!},\ldots)$ est peu différent de a.

§ 4. Produits tensoriels continus d'espaces hilbertiens.

Essayons d'étendre la définition 2 sous sa deuxième forme au cas d'un "ensemble continu d'indices" : nous prendrons pour T un espace topologique ou plus généralement un espace borélien (= espace mesurable en langage probabiliste), et pour Γ un sous-ensemble du produit cartésien $\prod_{t\in T} H_t$; deux difficultés (et deux seulement) se présentent :

1) pour définir le noyau λ nous aurons besoin d'une notion de "produit continu de nombres complexes" : que sera $\prod \alpha_t$ si $t \longmapsto \alpha_t$ est une application de T dans $\underline{C}$? On est tenté de se donner une mesure positive μ sur T et de poser

$$\prod \alpha_t = \exp\left[\int \log \alpha_t . d\mu(t)\right]$$

mais toute la difficulté réside dans le choix du logarithme ; en fait on peut donner un sens précis à cette formule dans deux cas (au moins) :

a) T est un espace borélien, μ une mesure borélienne, la fonction α_t est positive et son logarithme (ordinaire) est μ -intégrable

b) T est un espace topologique localement compact, chaque composante connexe est ouverte et fermée, chaque composante connexe compacte est simplement connexe, le compactifié de la réunion des composantes connexes non compactes est simplement connexe ; μ est une mesure de Radon positive et la mesure de chaque composante connexe compacte est entière ; la fonction α_t est continue et égale à 1 en dehors d'un compact. Dans ce cas on choisira pour $\log \alpha_t$ une détermination continue du logarithme. On notera que $\underline{R}^n$ vérifie les conditions ci-dessus pour $n \geqslant 2$ mais pas pour $n = 1$, ce qui crée quelques difficultés supplémentaires.

Dans chacun de ces cas on obtient une application Π d'un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions sur T dans $\underline{C}$, et cette application Π a des propriétés raisonnables, par exemple

$$\Pi \; \alpha_t \, \beta_t \;=\; \Pi \alpha_t \, . \, \Pi \beta_t \; .$$

Pour définir le noyau λ nous supposerons donc que nous avons de tels objets $\mathcal{E}$ et Π , que pour tous éléments $x = (x_t)$ et $y = (y_t)$ de Γ, la fonction $t \longmapsto (x_t \mid y_t)$ appartient à $\mathcal{E}$, et nous poserons

$$\lambda \; (x,y) \;=\; \Pi \; (x_t \mid y_t) \; .$$

2) Ce noyau λ est-il toujours de type positif ? La réponse, quelque peu inattendue, est NON, et les contre-exemples ne sont pas très difficiles à construire. On doit donc déclarer que le produit tensoriel continu n'existe pas si λ. n'est pas de type positif ; par contre si λ est de type positif, on peut définir un produit tensoriel continu $\overset{\Gamma}{\underset{t \in T}{\otimes}} H_t$ exactement comme à la définition 2 ; il est engendré par des éléments décomposables $\otimes \, x_t$ et on a encore

$$(\otimes \, x_t \mid \otimes \, y_t) \;=\; \Pi \; (x_t \mid y_t) \; .$$

<u>Exemple</u> 2. Considérons, sur l'espace de Schwartz $\mathcal{D}_{\underline{R}} \; (\underline{R}^n)$, $n \geqslant 2$, une fonction continue de type positif de la forme $\varphi(f) = \exp \left[\int_{\underline{R}^n} \psi_t(f(t)).dt \right]$ où les ψ_t sont des fonctions complexes sur $\underline{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\psi_t(0) = 0 \quad \forall \, t$
- pour tout t la fonction sur $\underline{R}$: $\varphi_t = \exp \psi_t$ est de type positif
- la fonction de deux variables $(t,x) \longmapsto \psi_t(x)$ est continue .

En vertu du théorème de Bochner-Minlos, φ est transformée de Fourier d'une mesure de probabilité ν sur $\mathcal{D}'_{\underline{R}}(\underline{R}^n)$, et en vertu du théorème de Bochner classique chaque φ_t est transformée de Fourier d'une mesure de probabilité ν_t sur $\underline{R}$. Il existe alors un isomorphisme de $L^2(\mathcal{D}'_{\underline{R}}(\underline{R}^n),\nu)$ sur le produit tensoriel continu des $L^2(\underline{R},\nu_t)$ construit de la façon suivante : pour tout réel u on note $\hat{u}$ la fonction $x \mapsto e^{iux}$, élément de $L^2(\underline{R},\nu_t)$, et on prend pour Γ l'ensemble des familles $t \mapsto \widehat{f(t)}$ où $f \in \mathcal{D}_{\underline{R}}(\underline{R}^n)$; l'isomorphisme en question transforme, pour toute $f \in \mathcal{D}_{\underline{R}}(\underline{R}^n)$, l'élément $T \mapsto e^{i\langle T, f\rangle}$ de $L^2(\mathcal{D}'_{\underline{R}}(\underline{R}^n),\nu)$ en le tenseur décomposable $\otimes \widehat{f(t)}$.

Remarque 3. Il serait agréable de pouvoir considérer l'espace mesuré $(\mathcal{D}'_{\underline{R}}(\underline{R}^n),\nu)$ comme le produit continu des espaces mesurés $(\underline{R},\nu_t)$, et d'exprimer le résultat précédent en disant que le foncteur L^2 transforme les produits continus en produits tensoriels continus ; mais en réalité la notion de produit continu d'espaces mesurés n'est pas encore bien au point. D'autre part, l'exemple 2 peut être généralisé dans la direction suivante : on remplace $(\underline{R}^n,dt)$ par un espace mesuré quelconque (T,μ), $\underline{R}$ par un groupe topologique G, $\mathcal{D}_{\underline{R}}(\underline{R}^n)$ par un groupe F d'applications $T \to G$, φ et φ_t par des fonctions continues de type positif sur F et G respectivement, et enfin $L^2(\mathcal{D}'_{\underline{R}}(\underline{R}^n),\nu)$ et $L^2(\underline{R},\nu_t)$ par les espaces hilbertiens déduits de φ et φ_t au moyen de la construction de Gelfand-Segal.

Exemple 3. On va voir ici que le foncteur S transforme les sommes hilbertiennes continues (ou intégrales hilbertiennes) en produits tensoriels continus. Soit (T,μ) un espace mesuré et $K = \int_T^{\oplus} K_t \, d\mu(t)$ une somme hilbertienne continue sur (T,μ) ; il existe un isomorphisme de SK sur le produit tensoriel continu des SK_t obtenu en prenant pour Γ l'ensemble des familles $t \mapsto \mathrm{EXP}\, x_t$ où $x = (x_t) \in K$, lequel isomorphisme transforme $\mathrm{EXP}\, x$ en $\otimes \mathrm{EXP}\, x_t$. La démonstration est à peu près la même que celle de la proposition 2'; la seule difficulté réside dans l'égalité

$$\exp \left[\int (x_t \mid y_t).d\mu(t)\right] = \prod \exp (x_t \mid y_t) \tag{1}$$

qui exige quelques précautions pour ne pas rester purement formelle ; en effet son premier membre dépend a priori des nombres $(x_t \mid y_t)$ et pas seulement de leurs exponentielles ; on peut lever cette difficulté en se ramenant au cas b) examiné page 8.

Quoi qu'il en soit, ceci permet de réinterpréter le théorème 1 en termes de produits tensoriels continus : reprenons les notations du th. 1 et supposons que H est séparable et que Θ est l'algèbre booléenne des classes d'équivalence de sous-ensembles mesurables d'un espace mesuré (T, μ) ; dans ces conditions le système des K_θ provient d'une décomposition de K en intégrale hilbertienne $K = \int_T^\oplus K_t.d\mu(t)$, chaque K_θ n'étant autre que $\int_\theta^\oplus K_t.d\mu(t)$; et on peut énoncer le

<u>Théorème</u> 1'. Il existe une décomposition de H en produit tensoriel continu $H = \bigotimes_{t\in T}^{\Gamma} H_t$ telle que les vecteurs factorisables de H soient exactement les éléments décomposables du produit tensoriel continu.

En bref : toute algèbre booléenne de décompositions d'un espace H en produits tensoriels provient d'une décomposition de H en produit tensoriel continu ; mais le théorème est en réalité beaucoup plus précis : la décomposition en produit tensoriel continu provient, via le foncteur S, d'une décomposition en somme directe continue ; et ce second résultat est beaucoup plus surprenant que le premier !

<u>Remarque</u> 4. On aimerait compléter le théorème 1' en disant que les opérateurs unitaires factorisables dans H sont exactement les opérateurs unitaires décompo-

sables (= produits tensoriels continus) dans le produit tensoriel continu ; mais là encore on se heurte à quelques égalités formelles du genre de (1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Guichardet : Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics : Infinitely Divisible Positive Definite Functions, Continuous Products and Tensor Products, Gaussian and Poissonian Stochastic Processes, University of Minnesota, Minneapolis, Spring 1971.

[2] H. Araki, E. J. Woods : Complete Boolean Algebras of Type I factors, Publ. R. I. M. S., Kyoto University, t.2, 1966, p. 157-242.

[3] J. Neveu : Processus aléatoires gaussiens, Sém. de Math. Sup., Montréal, 1968.

[4] G. Kallianpur : The Role of Reproducing Kernel Hilbert Spaces in the Study of Gaussian Processes, Advances in Proba., t.2, M. Dekker, New York 1970.

[5] H. Araki : Factorizable Representation of Current Algebra, Publ. R. I. M. S., Kyoto University, T.5, 1970, p. 361-422.
