A. Brunel

Propriété restreinte de valeur moyenne caractérisant les fonctions harmoniques bornées sur un ouvert $\mathbb{R}^N$ (selon D. Heath et S. Orey)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 14, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

PROPRIETE RESTREINTE DE VALEUR MOYENNE CARACTERISANT LES FONCTIONS HARMONIQUES BORNEES SUR UN OUVERT $\mathbb{R}^N$.

(SELON D. HEATH ET S. OREY)

par A. BRUNEL

Exposé N° XIV

26 Janvier 1972

§ 1.

Le problème posé est le suivant :

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $r : D \to]0, +\infty[$, une fonction mesurable telle que ,

$$\forall x \in D \quad r(x) \leq d(x, D^c).$$

Soit B_x, la boule de centre x et de rayon r(x). Disons qu'une fonction f, mesurable et bornée sur D, a la propriété restreinte de valeur moyenne (relativement à r) si

(1) $$\forall x \in D \quad f(x) = \frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x} f d\mu,$$

μ étant la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$.

Quelles conditions suffisantes peut-on donner sur D et sur r pour que les fonctions ayant la propriété restreinte de valeur moyenne soient exactement les fonctions harmoniques bornées sur D ?

Akcoglu et Sharpe (I) en 1968 ont résolu ce problème dans le cas où D est un disque et $r(x) = d(x, D^c)$. J. Baxter (II) puis D. Heath ont obtenu deux généralisations différentes dont je n'indiquerai pas les détails parce que, tout récemment, D. Heath et S. Orey ont trouvé des conditions qui comprennent toutes les précédentes. Ces conditions peuvent s'énoncer comme suit,

a) D est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$.

b) Il existe $g : D \to]0, +\infty[$ satisfaisant à

$$\forall x,y \in D \quad |g(x)-g(y)| \leq M\|x-y\| \quad (M \geq 1) \text{ et } g(x) \leq d(x, D^c)$$

c) Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

(2) $$\forall x \in D \quad \varepsilon_0 g(x) \leq r(x) \leq g(x)$$

§ 2. LA DEMONSTRATION PROBABILISTE DE HEATH ET OREY

Soit d'une part $(\Omega^o, X_t^o, \mathcal{F}_t^o, \theta_t^o, \mathbf{P}_x^o ; t \geq 0, x \in \mathbb{R}^N)$, le mouvement Brownien standard dans $\mathbb{R}^N$, d'autre part $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \mathbf{P}^1)$ un espace probabilisé sur lequel est donné une suite $(\rho_n^1)_{n=1,2,\dots}$ de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. Par exemple ρ_1^1 est à valeur dans $[0,1]$ avec une densité de probalité égale à $Nx^{N-1}dx$.

On pose maintenant :

$$\Omega = \Omega^o \times \Omega^1, \quad \mathbf{P}_x = \mathbf{P}_x^o \otimes \mathbf{P}^1, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^o \otimes \mathcal{F}^1$$

et l'on définit pour tout $\omega = (\omega^o, \omega') \in \Omega^o \times \Omega^1$,

$$\theta_t(\omega) = (\theta_t^o(\omega^o), \omega^1), \quad X_t(\omega) = X_t^o(\omega^o), \quad \rho_n(\omega) = \rho_n^1(\omega^1).$$

Ces constructions sont faites dans le but de plonger une chaîne de Markov dans le processus X de telle sorte que f soit invariante sous le noyau de transition de cette chaîne. Pour cela, on définit la suite des temps d'arrêt :

$$T_o = 0$$

$$T_{n+1} = \inf \{t > T_n \mid \|X_t - X_{T_n}\| > \rho_{n+1}\, r(X_{T_n})\} \quad \text{si } X_{T_n} \in D$$

$$= T_n \qquad\qquad \text{si } X_{T_n} \in D^c$$

Soit $T = \lim_n \uparrow T_n$. On peut alors prouver que sur l'ensemble $\{T < +\infty\}$, $T = \inf \{t > 0 \mid X_t \in D^c\}$. Cela est une conséquence de (2).

Posons pour simplifier, $Y_n = X_{T_n}$ et désignons par $\mathcal{G}_n$ la tribu

$\sigma(Y_o, Y_1, \ldots Y_n)$. Alors $(Y_n, \mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. En outre la loi de probabilité conditionnelle en Y_n de Y_{n+1} est uniforme dans la boule B_{Y_n}. On a ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathbb{E}_x[f\circ Y_{n+1} \mid \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}_x[f\circ Y_{n+1} \mid Y_n] = f\circ Y_n.$$

en tenant compte du fait que f a la propriété restreinte de valeur moyenne. Donc $(f\circ Y_n, \mathcal{G}_n)$ est une martingale bornée qui converge $\mathbb{P}_x$- p,s et aussi dans $\mathbb{L}^1_{\mathbb{P}_x}$ vers une variable aléatoire F telle que $f(x) = \mathbb{E}_x(F)$.

Soit alors $x_o \in D$, r_o un nombre quelconque de l'intervalle $]0, d(x_o, D^c)[$. Associons à r_o un temps d'arrêt τ défini par

$$\tau = \inf\{t > 0 \mid \|X_t - x_o\| \geq r_o\}.$$

La clef de la solution est de montrer que l'on a

$$F\circ\theta_\tau = F \quad \mathbb{P}_{x_o} - \text{p,s.}$$

En effet cela entraîne, en appliquant la propriété forte de Markov,

$$f(x_o) = \mathbb{E}_{x_o}(F) = \mathbb{E}_{x_o}[\mathbb{E}_{x_o}(F \mid \mathcal{F}_\tau)] = \mathbb{E}_{x_o}[\mathbb{E}_{x_o}(F\circ\theta_\tau \mid \mathcal{F}_\tau)] = \mathbb{E}_{x_o}[\mathbb{E}_{X_\tau}(F)] =$$

$$= \mathbb{E}_{x_o}(f\circ X_\tau) = \int_{S(x_o, r_o)} f \, d\sigma \quad ,$$

en désignant par σ la probalité uniforme sur la surface de la sphère de centre x_o et de rayon r_o.

Il est maintenant clair que cela donne l'harmonicité de f.

Tout revient donc à montrer que les suites $f\circ Y_n$ et $f\circ Y_n \circ \theta_\tau$ convergent vers la même limite, $\mathbb{P}_{x_o}$ - p,s. Il suffit pour cela de montrer que si α et β sont des réels, $\alpha < \beta$, et en posant :

$$F^* = F \circ \theta_\tau \ , \ \Lambda = \{F < \alpha\}, \ \Lambda^* = \{F^* > \beta\},$$

l'on a :

$$\mathbf{P}_{x_0} (\Lambda \cap \Lambda^*) = 0.$$

Le théorème de convergence des martingales que nous avons appliqué déjà nous donne aussi que :

$$\lim_n \mathbf{P}_{x_0} [\Lambda | Y_n] = 1_\Lambda, \ \mathbf{P}_{x_0} - p,s.$$

Suivant Chung, on peut améliorer ce résultat et écrire, en posant

$$A_n = \{f \circ Y_n < \alpha\} \qquad n=0,1,2,\dots,$$

(3) $$\lim \mathbf{P}_{x_0} [\bigcap_{i \geq n} A_i | Y_n] = 1_\Lambda, \ \mathbf{P}_{x_0} - p,s$$

et bien entendu, $\Lambda = \lim_n \inf(A_n)$.

La limite (3) peut aussi s'écrire :

(4) $$\lim \mathbf{P}_{Y_n} [\bigcap_{i \geq 0} A_i] = 1_\Lambda, \ \mathbf{P}_{x_0} - p,s.$$

De façon analogue, en introduisant la suite $B_n = \{f \circ Y_n \circ \theta_\tau > \beta\}$, on démontre que :

$$\lim \mathbf{P}_{Y_n \circ \theta_\tau} [\bigcap_{i \geq 0} B_i] = 1_{\Lambda^*} \ , \ \mathbf{P}_{x_0} - p,s$$

Introduisons ensuite les parties K_ε et K_ε^* de D, définies par

$$K_\varepsilon = \{x \in D \mid \mathbf{P}_x[\bigcap_{i\geq 0} \{f \circ Y_i < \alpha\}] > 1-\varepsilon\}$$

$$K_\varepsilon^* = \{x \in D \mid \mathbf{P}_x[\bigcap_{i\geq 0} \{f \circ Y_i > \beta\}] > 1-\varepsilon\},$$

où ε est un nombre positif qui sera fixé ultérieurement.

De (4) on déduit que, pour $\mathbf{P}_{x_0}$ - presque tout $\omega \in \Lambda$, il existe un entier $n_0(\omega)$ tel que $Y_{n_0+m} \in K_\varepsilon$, quelque soit $m \in \mathbb{N}$. Et de même qu'il existe, pour $\mathbf{P}_{x_0}$ -presque tout $\omega \in \Lambda^*$, un entier $n_1(\omega)$ tel que $Y_{n_1+m} \circ \theta_\tau \in K_\varepsilon^*$, quelque soit $m \in \mathbb{N}$.

Associons à tout $y \in D$ l'ouvert $G(y) = \{z \in D \mid \|z-y\| < qg(z)\}$, q étant un nombre positif fixé, inférieur à 1, et posons la définition :

(5) <u>Définition</u> : Soit Γ une partie de D, $K = K_\varepsilon$ (ou K_ε^*). On dira que Γ a un (K,q)-recouvrement si

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad G(\gamma) \cap K \neq \emptyset.$$

En particulier, si $\Gamma = \{X_t \mid T_{n_0} \leq t < T\}$, partie de la trajectoire ω (pour laquelle $n_0(\omega)$ existe), il est évident que Γ a un $(K,1)$ recouvrement si $\omega \in \Lambda$.

Plus précisément on va prouver que, en choisissant ε et q de la façon suivante :

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{\varepsilon_0}{11M}\right)^N, \quad q = \frac{\varepsilon_0}{8M},$$

on a la

<u>Proposition</u> : Pour $\mathbb{P}_{x_0}$-presque tout $\omega \in \Lambda$, la portion de trajectoire :

$$\Gamma = \{ X_t \mid T_{n_0(\omega)}(\omega) \leq t < T(\omega) \}$$

a un $(K_\varepsilon - q)$ recouvrement.

Indiquons d'abord sans démonstration, un résultat donné dans l'article de Heath et Orey :

$$(6) \qquad \begin{aligned} x \in K_\varepsilon &\Rightarrow \mu(B_x \cap K_\varepsilon) \geq (1-\varepsilon)\ \mu(B_x) \\ x \in K_\varepsilon^* &\Rightarrow \mu(B_y \cap K_\varepsilon^*) \geq (1-\varepsilon)\ \mu(B_y), \end{aligned}$$

et montrons comment la proposition entraîne le résultat cherché.

Supposons $\mathbb{P}_{x_0}(\Lambda \cap \Lambda^*) > 0$ et choisissons dans $\Lambda \cap \Lambda^*$ un ω tel que $n_0(\omega)$ et $n_1(\omega)$ existent. Soit j un entier plus grand que $n_0(\omega)$ et $n_1(\omega)$ et posons $y_0 = Y_j \circ \theta_\tau$. Alors $y_0 \in K_\varepsilon^*$ et la proposition montre qu'il existe un $x_0 \in K_\varepsilon \cap G(y_0)$. Or

$$g(x_0) - g(y_0) \leq M \|x_0 - y_0\| < Mqg(x_0),$$

$$g(x_0) < \frac{g(y_0)}{1 - Mq} \leq \frac{8}{7}\ g(y_0) \ \text{ et}$$

$$\|x_0 - y_0\| < \frac{8q}{7\varepsilon_0}\ r(y_0) \leq \frac{1}{7}\ r(y_0),$$

donc $x_0 \in B_{y_0}$. On vérifie aussi facilement que :

$$\sup\ (r(x_0),\ r(y_0)) \leq \frac{2}{\varepsilon_0}\ \inf\ (r(x_0), r(y_0))$$

qui entraîne l'inégalité

$$(7) \qquad \mu(B_{x_0} \cap B_{y_0}) \geq \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^N \sup\ (\mu(B_{x_0}), \mu(B_{y_0}))$$

Or (7) est contradictoire avec les conditions (6) et le fait que $K_\varepsilon \cap K_\varepsilon^* = \emptyset$

Tout revient donc à prouver la proposition. Si elle était fausse, il existerait une partie $\mathbf{P}_{x_o}$-non négligeable de Λ dont les points ω et la portion correspondante Γ de trajectoire ne vérifiraient pas la propriété de $(K_\varepsilon - q)$ recouvrement. Pour un tel ω il devrait exister un instant $S < T(\omega)$ ayant les propriétés suivantes :

$\{X_t \mid T_{n_o} \le t < S\}$ a un $(K_\varepsilon - q)$ recouvrement mais

$\{X_t \mid T_{n_o} \le t \le S\}$ n'en admet pas.

Ceci étant soit t_n une suite croissante d'instants, tendant vers S. Posons $y_n = X_{t_n}$ et choisissons pour chaque n, $z_n \in G(y_n) \cap K_\varepsilon$.

Puisque $X_{t_n} \to X_S = \xi$, la suite (z_n) est bornée et on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $z_n \to \zeta \in \overline{G(\xi)}$. Cette dernière condition entraîne que, pour n assez grand, l'on a

$$\|z_n - \xi\| < \frac{\varepsilon_o}{6M}\, g(\xi), \text{ donc aussi que } |g(z_n) - g(\xi)| < \frac{\varepsilon_o}{6M}\, g(\xi), \text{ d'où}$$

$$(1 + \frac{\varepsilon_o}{6})g(\xi) \ge g(z_n) \ge r(z_n) \ge \varepsilon_o g(z_n) \ge \varepsilon_o(1 - \frac{\varepsilon_o}{6})\, g(\xi) \ge \frac{5}{6}\, \varepsilon_o g(\xi),$$

c'est à dire que l'on a l'inclusion :

$$B' = B(\xi, \frac{\varepsilon_o}{9M} g(\xi)) \subset B_{z_n}$$

soit
$$\frac{\mu(B')}{\mu(B_{z_n})} \ge \left(\frac{\varepsilon_o}{11M}\right)^N > \varepsilon.$$

Compte tenu de (6) et du fait que $B(\xi, \frac{\varepsilon_o}{9M}\, g(\xi)) \subset G(\xi)$, nous aboutissons à une contradiction, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

J. Delsarte : Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques C. R. Acad. Sc. t.246 (1958)

J. Delsarte et J. L. Lions : Moyennes généralisées . Comm. Math. helv. (1959)

(1) M. A. Akcoglu et R. W. Sharpe : Ergodic theory and boundaries, Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968)

J. R. Baxter : Restricted mean values and harmonic functions (to appear)

D. Heath : Functions possessing restricted mean value properties (to appear).