Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Bony

P. Schapira

Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 11, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

EXISTENCE ET PROLONGEMENT DES SOLUTIONS HOLOMORPHES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

par J. M. BONY et P. SCHAPIRA

Exposé N° XI

5 Janvier 1972

Dans cet exposé, nous nous intéressons aux conditions de validité des deux énoncés suivants, où P désigne un opérateur différentiel à coefficients holomorphes dans $\mathbb{C}^n$:

- Si f est holomorphe dans un ouvert Ω, et si Pf se prolonge holomorphiquement au voisinage d'un point frontière, la fonction f se prolonge au voisinage de ce point.

- Si g est holomorphe dans Ω au voisinage d'un point frontière, il existe f homomorphe dans Ω au voisinage de ce point, solution de Pf = g

Nous montrerons (§.4) que ces énoncés sont vrais lorsque la frontiere est non caractéristique au point considéré, l'ouvert Ω devant satisfaire une condition de cône (invariante par C^1-difféomorphismes) réalisée en particulier par les ouverts convexes ou de classe C^1.

Ces théorèmes nous permettent (§.5) de résoudre un problème posé par B. Malgrange. Si Ω est un ouvert relativement compact à frontière partout non-caractéristique, vérifiant $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$, l opérateur P considéré comme application de $\mathcal{O}(\Omega)$ (espace des fonctions holomorphes dans Ω) dans lui-même est d'indice fini.

Ces résultats permettent également (voir [1], [2] et notre prochain exposé) de résoudre les équations hyperboliques non strictes dans le cadre des fonctions analytiques et des hyperfonctions.

§ 1. NOTATIONS

Nous identifierons $\mathbb{C}^n$, muni du produit hermitien $<z,\zeta> = \Sigma z_i \bar{\zeta}_i$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ muni du produit scalaire $\mathrm{Re}<z,\zeta>$. Sauf mention explicita du contraire, le mot hyperplan signifiera hyperplan réel de $\mathbb{R}^{2n}$.

Nous noterons S^{2n-1} la sphère unité. Nous dirons qu'une partie I de S^{2n-1} est convexe (resp. propre) si le cône engendré par I est convexe (resp. ne contient aucune droite). Le polaire de I est le cône convexe défini par $\mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle \leq 0$ pour ζ appartenant à I. Lorsque $I, I', \ldots$ désigneront des parties convexes propres de S^{2n-1}, nous noterons $\Gamma, \Gamma', \ldots$ l'intérieur de leurs polaires respectifs.

Nous considérerons des opérateurs différentiels $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ de la forme suivante

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = (\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n})$, où les coefficients $a_\alpha(z)$ sont holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Nous désignerons par

$$p(z,\zeta) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(z)\zeta^\alpha$$

le symbole principal de l'opérateur P.

Un hyperplan d'équation $\mathrm{Re}\langle z-z_0,\zeta\rangle = 0$ est caractéristique en z_0 si $p(z_0,\zeta) = 0$. De même nous dirons que cet hyperplan est caractéristique en z_0 relativement à une famille (P_i) d'opérateurs de ce type si on a $p_i(z_0,\zeta) = 0$ quel que soit i. Nous dirons également que le vecteur ζ est caractéristique en z_0.

<u>Définition 1.1</u> : Si Ω est un ouvert de U, nous noterons $\mathrm{Car}(\Omega)$ l'adhérence de l'ensemble des directions qui sont caractéristiques (relativement au système (P_i)) en au moins un point de Ω.

Un vecteur non nul ζ appartient à $\mathrm{Car}(\Omega)$ s'il existe une suite (z_n,ζ_n) avec $z_n \in \Omega$; $\zeta_n \to \zeta$; $p_i(z_n,\zeta_n) = 0$.

§ 2. THEÓREMES DE PROLONGEMENT

Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème de M. Zerner [8].

<u>Lemme 2.1</u> : Soit Ω un ouvert convexe dont la frontière est de classe C^1. Supposons que la normale ζ à $\partial\Omega$ en un des points z_0 soit non caractéristique pour l'opérateur P. Alors, si f est holomorphe dans Ω et si Pf se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0.

On peut se ramener, grâce au théorème de Cauchy-Kowalewski au cas où Pf = 0. Nous prendrons d'autre part le vecteur ζ unitaire et dirigé vers l'extérieur de Ω.

Soit alors $\tilde{H}_\varepsilon$ l'hyperplan complexe d'équation $<z-z_0,\zeta> = -\varepsilon$. La frontière étant de classe C^1, la plus grande boule de $\tilde{H}_\varepsilon$ centrée en $z_0-\varepsilon\zeta$ et contenue dans $\Omega \cap \tilde{H}_\varepsilon$ a un rayon a qui est infiniment grand par rapport à ε lorsque ε tend vers 0.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski précisé [6] il existe un nombre $\delta > 0$, indépendant de a et de ε, tel que tout germe de solution holomorphe de Pf = 0 au voisinage de B'_a se prolonge en fonction holomorphe dans la boule (de $\mathbb{C}^n$) $B_{\delta a}$ de même centre et de rayon δa. Cette boule contiendra z_0 pour ε assez petit et f se prolonge holomorphiquement dans $\Omega \cup B_{\delta a}$.

<u>Théorème 2.1</u> : Soit (P_i) une famille d'opérateurs différentiels dans U et soient ω et Ω deux convexes de U, où ω est localement compact. Ω est ouvert et $\omega \subset \Omega$. Supposons que tout hyperplan de normale appartenant à Car(Ω) qui coupe Ω coupe également ω. Alors, si f est holomorphe au voisinage de ω, et si $P_i f$ se prolonge holomorphiquement dans Ω, la fonction f se prolonge holomorphiquement dans Ω.

Ce résultat s'obtient à partir du lemme précédent en adaptant un argument géométrique dû à Hörmander ([4] th.5.3.3.).

§ 3. CAS D'UN CONE CONVEXE

Dans ce paragraphe, Γ désignera un cône ouvert convexe non vide dont le sommet appartient à U. Nous supposerons que ce sommet est l'origine, et nous désignerons par I l'intersection de S^{2n-1} avec le polaire de Γ.

Si ζ appartient à I, si I_1 et I_2 sont deux parties convexes fermées propres de S^{2n-1}, où I_1 est un voisinage de I et I_2 un voisinage de I_1, et si Γ_1 et Γ_2 désignent les intérieurs de leurs polaires respectifs, les deux propriétés suivantes sont immédiates :

- Pour $\varepsilon > 0$, l'intersection K de $\bar{\Gamma}_1$ avec l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re} \langle z, \zeta \rangle = -\varepsilon$ est une base compacte de $\bar{\Gamma}_1$.
- L'intersection des demi-espaces contenant K et dont la normale n'appartient pas à I_2 est un voisinage de 0.

Lemme 3.1 : Soit (P_i) une famille finie d'opérateurs différentiels dans U. Supposons que les directions de I soient non caractéristiques en 0. Alors, si f est holomorphe dans Γ au voisinage de 0, et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de 0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0.

Soit W un voisinage convexe de 0 dans lequel les $P_i f$ sont holomorphes et tel que Car(W) ne rencontre pas I. Choisissons I_1 et I_2 comme ci-dessus avec $I_2 \cap \mathrm{Car} W = \emptyset$. Choisissons enfin ε tel que K soit contenu dans W. D'après le théorème 2.1, si V est un voisinage ouvert convexe de 0 contenu dans l'intersection des demi-espaces contenant K et dont la normale n'appartient pas à I_2, la fonction f se prolonge dans V.

<u>Lemme 3.2</u> : Soit $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel dans U et supposons que les directions de I soient non caractéristiques en 0. Pour tout voisinage de 0, il existe un voisinage V' de 0 tel que, si g est holomorphe dans $\Gamma \cap V$, il existe une solution f de $Pf = g$ holomorphe dans $\Gamma \cap V'$.

La démonstration se fait en deux étapes.

a) On démontre d'abord le lemme dans le cas où il existe ζ_0 appartenant à I et $\alpha > 0$ tels que :

- pour tout vecteur ζ de I, on a $|\zeta - \zeta_0| \leq \alpha$
- tout vecteur ζ vérifiant $|\zeta - \zeta_0| \leq \alpha$ est non caractéristique en 0.

On résout alors le problème de Cauchy $Pf = g$; traces $(f) = 0$ au voisinage de l'hyperplan complexe $<z,\zeta_0> = -\varepsilon$ et le théorème 2.1. permet de prolonger f à un voisinage de 0 dans Γ.

b) Dans le cas général, on montre d'abord, en utilisant la résolution du premier problème de Cousin (voir par exemple [5]) que la fonction g peut se décomposer en une somme finie de fonctions g_p, chacune d'elles étant définie dans un cône Γ_p contenant Γ et ayant suffisamment peu de normales pour que l'on puisse appliquer la première partie de la démonstration. On résout alors $Pf_p = g_p$ et on pose $f = \Sigma f_p$.

§ 4. <u>THEOREMES D'EXISTENCE ET DE PROLONGEMENT</u>

Nous allons généraliser les résultats du paragraphe précédent à une classe d'ouverts invariante par C^1-difféomorphisme, contenant comme cas particuliers les ouverts convexes et les ouverts de classe C^1.

Si Γ est un cône ouvert convexe de sommet 0, nous noterons Γ_ε l'intersection de Γ et de la boule de rayon ε centrée en 0.

<u>Définition 4.1</u> : Soit I une partie convexe fermée propre de S^{2n-1}. Nous dirons que l'ouvert Ω vérifie la condition de cône $C(z_0, I)$ en un de ses points frontière z_0, si pour tout voisinage I' de I, il existe un voisinage V de z_0 et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout z appartenant à $V \cap \Omega$, on ait $z + \Gamma'_\varepsilon \subset \Omega$, où Γ' désigne l'intérieur du polaire de I'.

<u>Remarques</u> : 1) La propriété précédente est invariante par C^1-difféomorphismes, et s'étend naturellement aux variétés, I étant alors une partie de la sphère cotangente en z_0.

2) Si Ω est un ouvert convexe, il vérifie la condition $C(z_0, I)$ en désignant par I l'ensemble des normales extérieures à $\bar{\Omega}$ en z_0.

3) Si Ω a une frontière de classe C^1 et est situé localement du même côté de $\partial\Omega$, il vérifie $C(z_0, \{\eta\})$ où η est la normale extérieure à $\partial\Omega$ en z_0.

4) Si Ω vérifie la condition de cône $C(z_0, I)$, il existe un système fondamental de voisinages V de z_0 tels que $V \cap \Omega$ soit connexe.

<u>Théorème 4.1</u> : Soit $P_i(z, \frac{\partial}{\partial z})$ une famille finie d'opérateurs différentiels dans U. Supposons que Ω vérifie la condition $C(z_0, I)$ en un point frontière z_0 appartenant à U, et que les directions de I soient non caractéristiques en z_0. Alors, si f est holomorphe dans Ω, et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0.

Soit en effet Γ' l'intérieur du polaire d'un voisinage I' suffisamment petit de I. D'après le lemme 3.1, la restriction de f à $z_0 + \Gamma'_\varepsilon$ se prolonge à un voisinage V de z_0. Le prolongement obtenu n'est pas ramifié grâce à la remarque (4) ci-dessus.

<u>Théorème 4.2</u> : Soit $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel dans U. Supposons que Ω vérifie la condition $C(z_0,I)$ en un point frontière z_0 appartenant à U, et que les directions de I soient non caractéristiques en z_0. Pour tout voisinage V de z_0, il existe un voisinage V' de z_0 tel que, si g est holomorphe dans $\Omega \cap V$, il existe une solution f de $Pf = g$ holomorphe dans $\Omega \cap V'$.

Le lemme 3.2 permet de résoudre $Pf = g$ dans le cône $z_0 + \Gamma'$, au voisinage de z_0. Le théorème 2.1 permet ensuite de démontrer que f se prolonge jusqu'à un voisinage de z_0 dans Ω.

<u>Corollaire</u> : Soit Ω un ouvert de classe C^1 dont la frontière est non caractéristique en z_0 pour l'opérateur $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$. Alors

- Si f est holomorphe dans Ω et si Pf se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge de même au voisinage de z_0.
- Si g est holomorphe dans Ω au voisinage de z_0, il existe une solution f de $Pf = g$, holomorphe au voisinage de z_0 dans Ω.

La partie "prolongement" de ce théorème est dûe à M. Zerner [8]. On peut énoncer un corollaire analogue pour un ouvert convexe dont tous les hyperplans d'appui en z_0 sont non caractéristiques en ce point.

§ 5. INDICE DES OPERATEURS DIFFERENTIELS

Nous supposerons dans ce paragraphe que U est une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, et que $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ est un opérateur défini sur U.

Nous désignerons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur U. Si ω est un ouvert, nous désignerons par $\mathcal{O}(\omega)$ ou par $H^0(\omega,\mathcal{O})$ l'espace des fonctions holomorphes dans ω. De même, si K est compact, nous noterons $\mathcal{O}(K)$ ou $H^0(K,\mathcal{O})$ l'espace des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K.

<u>Théorème 5.1</u> : Soit Ω un ouvert relativement compact de U. Supposons qu'en chaque point z_0 de sa frontière, Ω vérifie une condition de cône $C(z_0, I)$ où les directions de I sont non caractéristiques pour P en z_0. Supposons d'autre part que $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$.

Alors l'opérateur P, de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.

<u>Corollaire 5.1</u> : Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{C}^n$, tel que tout hyperplan d'appui de $\bar{\Omega}$ soit non caractéristique en ses points d'appui. Alors l'opérateur P de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.

<u>Corollaire 5.2</u> : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, de classe C^1 et dont la frontière est non caractéristique. Si de plus $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$, l'opérateur P est d'indice fini de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

<u>Démonstration du théorème 5.1</u> : Considérons le préfaisceau défini par : $\omega \rightsquigarrow \mathcal{O}(\Omega \cap \omega)$. C'est évidemment un faisceau que nous noterons $\mathcal{O}^+$. Nous désignerons d'autre part par $\mathcal{O}_P$ le faisceau des germes de solutions holomorphes de l'équation $Pf = 0$.

Il résulte du théorème de Cauchy Kowalewsky que la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \to 0$$

est exacte en chaque point de $\partial\Omega$.

D'autre part, les théorèmes 4.1 et 4.2 expriment que la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}^+ \xrightarrow{P} \mathcal{O}^+ \to 0$$

est aussi exacte en chaque point de $\partial\Omega$.

On en conclut que la suite

$$0 \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0$$

est exacte en tout point de U, le faisceau $\mathcal{O}^+/\mathcal{O}$ étant porté par $\partial\Omega$.

De la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^+ \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0$, on déduit :

$$0 \to H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}) \to H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}^+) \to H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}^+/\mathcal{O}) \to H^1(\bar{\Omega},\mathcal{O}) = 0$$

d'où
$$H^0(\bar{\Omega},\mathcal{O}^+/\mathcal{O}) = \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega}).$$

L'opérateur P définit donc un isomorphisme de $\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sur lui-même. Rappelons que les espaces $\mathcal{O}(\Omega)$ et $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sont respectivement munis de topologies naturelles du type Frechet-Schwartz et dual de Frechet-Schwartz. Sur l'espace $\mathcal{O}_P(\Omega) = \mathcal{O}_P(\bar{\Omega})$, ces deux topologies coïncident d'après le théorème du graphe fermé et cet espace est donc de dimension finie.

Considérons d'autre part l'application de $\mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f,g) \rightsquigarrow Pf + g$. Elle est surjective. L'espace $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ étant limite inductive dénombrable des espaces de Frechet $\mathcal{O}(\Omega')$ pour Ω' voisinage de $\bar{\Omega}$, il existe un de ces voisinages Ω' tel que la restriction de l'application à $\mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{O}(\Omega')$ soit surjective [3]. Soit maintenant l'application de $\mathcal{O}(\Omega)\times\mathcal{O}(\Omega')$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f,g) \to -g$. C'est une application compacte et un théorème classique de L. Schwartz [12] assure que la somme des deux applications précédentes a une image fermée de codimension finie, ce qui achève la démonstration.

Remarque : On a en fait démontré que P considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans lui-même ou considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans lui-même, avait mêmes noyaux et conoyaux, et que ces espaces étaient de dimension finie.

Exemple : Dans $\mathbb{C}^2$, l'opérateur $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ vérifie les hypothèses du théorème en prenant pour Ω une boule centrée à l'origine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts; C. R. Acad. Sc. Paris , Janvier 1971

[2] J. M. Bony et P. Schapira : Problème de Cauchy, Existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions des équations hyperboliques non strictes; C. R. Acad. Paris, Janvier 1972

[3] A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires; Memoirs of Amer. Math. Soc., Providence, 1955.

[4] L Hörmander : Linear partial differential operators, Springer-Verlag Berlin, 1963

[5] L. Hörmander : An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, 1966

[6] J. Leray : Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy, Bull. Soc. Math. Fr., 85, p.389-429, 1957

[7] L. Schwartz : Homomorphismes et applications complètement continues C. R. Acad. Sc. Paris, 236, p.2472, 1953

[8] M. Zerner : Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles; C. R. Acad. Sc. Paris,272, p.1646 1971.