

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ANDRÉ UNTERBERGER

Espaces de Sobolev d'ordre variable et applications (fin)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 6, p. 0-6

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A6_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUB DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 0 - 1 9 7 1

ESPACES DE SOBOLEV D'ORDRE VARIABLE ET APPLICATIONS (fin)

par André UNTERBERGER

§ 1. OPERATEURS DIFFERENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS SUR \mathbb{R}^2 .

$$\text{On pose } D_1 = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} , \quad D_2 = \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} ,$$

$$\partial = D_1 - i D_2 \quad \text{et} \quad \bar{\partial} = D_1 + i D_2 .$$

Les symboles de ces quatre opérateurs sont respectivement ξ_1 , ξ_2 , $\bar{\zeta}$ et ζ , en posant $\zeta = \xi_1 + i \xi_2$; D_1 et D_2 sont autoadjoints ; ∂ et $\bar{\partial}$ sont les adjoints l'un de l'autre.

.../...

VI.1

Soit $P(\partial, \bar{\partial})$ un opérateur différentiel sur \mathbb{R}^2 à coefficients constants arbitraire, d'ordre m . On peut toujours supposer, moyennant un changement linéaire de coordonnées, que le coefficient de ∂^m dans $P(\partial, \bar{\partial})$ est non nul, et même égal à 1.

Le symbole principal de l'opérateur s'écrit alors

$$P_m(\bar{\zeta}, r) = \prod_{k=1}^m (\bar{\zeta} - \alpha_k \zeta)$$

où les α sont des coefficients complexes.

L'opérateur $\partial^m P(\partial, \bar{\partial})$ (de degré $2m$), peut s'écrire $Q(\partial, \bar{\partial})$, où $Q(\bar{\zeta}, \tau)$ est un certain polynôme de degré $2m$, possédant un terme $\bar{\zeta}^{2m}$ et dont tous les termes ont un "poids" au plus égal à $2m$, en attribuant à $\bar{\zeta}$ le poids 1 et à τ le poids 2. Notons que le symbole de $\partial\bar{\partial}$, soit $|\zeta|^2$, est réel positif pour toute valeur de $\xi = (\xi_1, \xi_2)$: $\partial\bar{\partial}$ n'est autre que l'opérateur $-\frac{\Delta}{4\pi^2}$, Δ étant le laplacien ordinaire.

En utilisant un développement de Puiseux, on peut écrire, pour τ assez grand :

$$Q(\bar{\zeta}, \tau) = \prod_{j=1}^{2m} \left(\bar{\zeta} - \sum_{n=-s}^{+\infty} b_n^j (\tau^{-\frac{1}{p}})^n \right),$$

où p est un certain entier positif.

L'entier s est choisi le même pour tous les facteurs, de façon que l'un au moins des coefficients b_{-s}^j soit non nul. On a nécessairement $\frac{s}{p} \leq \frac{1}{2}$: en effet, s'il en était autrement, en prenant dans chacun des facteurs de $Q(\bar{\zeta}, \tau)$ le terme non nul de poids maximum, on obtiendrait un terme non nul de poids strictement supérieur à $2m$.

On peut écrire

$$Q(\bar{\zeta}, \tau) = \prod_{j=1}^{2m} (\bar{\zeta} - \beta_j \sqrt{\tau} + g_j(\tau)) ,$$

où, pour tout j , $g_j(\tau)$ est une fonction analytique de $\tau^{-\frac{1}{p}}$ pour τ assez grand, satisfaisant l'inégalité $|g_j(\tau)| \leq C \tau^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$ pour une constante C bien choisie.

En collectant les termes de poids $2m$ exactement, on obtient l'identité

$$\bar{\zeta}^m P_m(\bar{\zeta}, \zeta) = \prod_{j=1}^{2m} (\bar{\zeta} - \beta_j \sqrt{\zeta\bar{\zeta}}), \quad \text{soit} \quad \prod_{k=1}^m (\bar{\zeta}^2 - \alpha_k \zeta\bar{\zeta}) = \prod_{j=1}^{2m} (\bar{\zeta} - \beta_j \sqrt{\zeta\bar{\zeta}}).$$

En introduisant l'indertéminée $\eta = |\zeta|$, on obtient l'identité

$$\prod_{k=1}^m (\bar{\zeta}^2 - \alpha_k \eta^2) = \prod_{j=1}^{2m} (\bar{\zeta} - \beta_j \eta)$$

entre deux polynômes en $(\bar{\zeta}, \eta)$, d'où il résulte qu'à chaque facteur $\bar{\zeta} - \alpha_k \zeta$ de $P_m(\bar{\zeta}, \zeta)$ correspondent, dans $Q(\bar{\zeta}, \tau)$, deux facteurs commençant par $\bar{\zeta} - \sqrt{\alpha_k} \eta$ et $\bar{\zeta} + \sqrt{\alpha_k} \eta$ respectivement, en désignant par $\sqrt{\alpha_k}$ l'une quelconque des racines carrées de α_k .

Finalement on peut écrire, pour $|\zeta|$ assez grand :

$$\bar{\zeta}^m P(\bar{\zeta}, \zeta) = \prod_{k=1}^m (\bar{\zeta} - \sqrt{\alpha_k} \sqrt{\zeta\bar{\zeta}} + g_k(\zeta\bar{\zeta})) (\bar{\zeta} + \sqrt{\alpha_k} \sqrt{\zeta\bar{\zeta}} + h_k(\zeta\bar{\zeta}))$$

avec

$$|g_k(\zeta\bar{\zeta})| \leq C |\zeta|^{1 - \frac{2}{p}} \quad \text{et} \quad |h_k(\zeta\bar{\zeta})| \leq C |\zeta|^{1 - \frac{2}{p}}$$

D'où $P(\bar{\zeta}, \zeta) = \prod_{k=1}^m (\bar{\zeta} - \alpha_k \zeta + f_k(\bar{\zeta}, \zeta))$, où $f_k(\bar{\zeta}, \zeta)$ est le symbole/opérateur d'un pseudo-différentiel de convolution R^k , d'ordre au plus $1 - \frac{2}{p}$.

On a alors $P(\partial, \bar{\partial}) = \prod_{k=1}^m (\partial - \alpha_k \bar{\partial} + R^k)$ à un opérateur régularisant près.

Chaque fois que $|\alpha_k| \neq 1$, l'opérateur $\partial - \alpha_k \bar{\partial} + R^k$ est elliptique d'ordre 1. Lorsque $\alpha_k = \cos \theta + i \sin \theta$, $\partial - \alpha_k \bar{\partial}$ s'écrit aussi

$$2(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2})(\sin \frac{\theta}{2} D_1 + \cos \frac{\theta}{2} D_2)$$

et $P(\partial, \bar{\partial})$ admet la direction caractéristique $\sin \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Pour les facteurs non elliptiques de $P(\partial, \bar{\partial})$, on a le lemme :

Lemme 4.1 : Soit M l'opérateur $M = \partial - \alpha \bar{\partial} + R_r$, avec $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$, R_r étant un opérateur pseudo-différentiel de convolution d'ordre $r < 1$, et soit ρ une fonction C^∞ à valeurs réelles dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , satisfaisant l'inégalité

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} > 0$$

(autrement dit la dérivée seconde de ρ dans la direction caractéristique

$\sin \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}$ est strictement positive en tout point de Ω) :

Alors pour toute distribution u à support compact dans Ω satisfaisant $Mu \in H_{\text{comp}}^{\rho, s}(\Omega)$ (s étant nombre réel), on a $u \in H_{\text{comp}}^{\rho, s + \frac{1}{2}}(\Omega)$.

Comme M est un opérateur de convolution, il suffit d'obtenir une inégalité $\|Mu\|_{\rho, s} \geq C \|u\|_{\rho, s + \frac{1}{2}}$ pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans un ouvert Ω' relativement compact dans Ω , avec une constante positive C ne dépendant que de Ω' .

On écrit alors $A^{\rho, s} M = L A^{\rho, s}$ à un opérateur régularisant près, où $L = \partial - \alpha \bar{\partial} + R_r - \frac{1}{2}(\partial \rho - \alpha \bar{\partial} \rho)B + S_0$, S_0 étant un opérateur pseudo-différentiel (à coefficients variables) d'ordre 0 : on a posé ici $B = [1 + \text{Log}(1 + |\xi|^2)]$, et $A^{\rho, s} = \text{Op}[(1 + |\xi|^2)^{\rho(x)/2} [1 + \text{Log}(1 + |\xi|^2)]^s]$.

Il s'agit donc d'obtenir, pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω , l'inégalité $\|Lv\|_0^2 \geq C \|v\|_{0, \frac{1}{2}}^2$ pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega')$. A cet effet, on écrit

$$L^* = \bar{\partial} - \bar{\alpha} \partial + R_r^* - \frac{1}{2} B (-\bar{\partial} \rho + \bar{\alpha} \partial \rho) + S_0^*$$

étant donné que B est autoadjoint, et

$$\begin{aligned} \|Lv\|^2 &\geq \|Lv\|^2 - \|L^*v\|^2 \geq -\text{Re}(\partial v - \alpha \bar{\partial} v + R_r v, (\partial \rho - \alpha \bar{\partial} \rho)Bv) + \\ &+ \text{Re}(\bar{\partial} v - \bar{\alpha} \partial v + R_r^* v, B(-\bar{\partial} \rho + \bar{\alpha} \partial \rho)v) - C \|v\|_0^2, \end{aligned}$$

en remarquant que S_0 commute avec tout opérateur d'ordre au plus 1 modulo un opérateur d'ordre négatif, et que B commute avec tout opérateur d'ordre 0 modulo un opérateur d'ordre négatif. En appliquant la même remarque à R_r , on obtient

$$\|Lv\|_0^2 \geq -\operatorname{Re}(\partial v, -\alpha \bar{\partial} v, (\partial \rho - \alpha \bar{\partial} \rho) Bv) + \operatorname{Re}(\bar{\partial} v - \alpha \partial v, B(-\bar{\partial} \rho + \alpha \partial \rho) v) - C \|v\|_0^2,$$

soit

$$\|Lv\|_0^2 \geq -\operatorname{Re}(v, (\partial \bar{\partial} \rho - \alpha \bar{\partial} \partial \rho) Bv) + \operatorname{Re}(\alpha v, (\partial \bar{\partial} \rho - \alpha \bar{\partial} \partial \rho) Bv) - C \|v\|_0^2,$$

ou encore

$$\|Lv\|_0^2 \geq -C \|v\|^2 + \operatorname{Re}(B^{\frac{1}{2}} v, (\bar{\alpha} \partial \bar{\partial} \rho - \alpha \bar{\alpha} \partial \bar{\partial} \rho) B^{\frac{1}{2}} v) - \operatorname{Re}(B^{\frac{1}{2}} v, (\partial \bar{\partial} \rho - \alpha \bar{\partial} \partial \rho) B^{\frac{1}{2}} v).$$

Tout cela domine $C_1 \|v\|_{0, \frac{1}{2}}^2$ pourvu que $\bar{\alpha} \partial \bar{\partial} \rho + \alpha \bar{\partial} \partial \rho + (-1 - |\alpha|^2) \partial \bar{\partial} \rho$ soit positif, soit

$$(-1 + \cos \theta)(D_1^2 \rho) - 2 \sin \theta (D_1 D_2 \rho) - (1 + \cos \theta)(D_2^2 \rho) > 0,$$

ou enfin

$$(1 - \cos \theta) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} - 2 \sin \theta \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1 \partial x_2} + (1 + \cos \theta) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} > 0,$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Théorème 4.1 : Soit $P(D)$ un opérateur différentiel sur \mathbb{R}^2 à coefficients constants, d'ordre m ; soit μ le nombre de facteurs elliptiques de la partie principale de $P(D)$, comptés avec leur multiplicité. Soit ρ une fonction C^∞ à valeurs réelles dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , admettant des dérivées secondes strictement positives dans toutes les directions caractéristiques réelles de $P(D)$.

Alors pour toute distribution u à support compact dans Ω satisfaisant $P(D)u \in H^0(\Omega)$ on a $u \in H^{\rho+\mu, \frac{1}{2}(m-\mu)}(\Omega)$.

Si de plus Ω est ${}^tP(D)$ -convexe, l'équation ${}^tP(D)f = g$ admet une solution $f \in H_{loc}^{-\rho}(\Omega)$ chaque fois que $g \in H_{loc}^{-\rho-\mu, -\frac{1}{2}(m-\mu)}(\Omega)$.

La deuxième partie du théorème résulte de la première par des arguments de dualité.

La première partie s'obtient par applications successives du lemme : bien entendu, en appliquant à une distribution à support compact un produit partiel des facteurs de la décomposition de $P(D)$, on n'obtient pas nécessairement une distribution à support compact, mais il est aisé d'y remédier grâce au caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels.

On peut obtenir aussi par ces méthodes le fait, démontré également par Hörmander, qu'en deux variables tout ouvert P -convexe est fortement P -convexe. On se ramène en effet au problème suivant : soit M l'opérateur $M = \partial - \alpha \bar{\partial} + R$, où R est un opérateur pseudo-différentiel de convolution d'ordre < 1 ; soit K un compact de \mathbb{R}^2 convexe dans la direction caractéristique de l'opérateur $\partial - \alpha \bar{\partial}$ (i.e. les parallèles à cette direction, si elle est réelle, coupent K suivant des segments ; si cet opérateur est elliptique, aucune condition n'est imposée) ; soit enfin u une distribution à support compact dans \mathbb{R}^2 , telle que le support singulier de Mu soit contenu dans K : prouver que le support singulier de u est contenu dans K .

Il suffit alors, en utilisant le lemme, de prouver qu'étant donné un compact K convexe dans la direction caractéristique de l'opérateur $\partial - \alpha \bar{\partial}$, un point x de \mathbb{R}^2 n'appartenant pas à K , et deux nombres réels s et t , il existe une fonction ρ convexe dans la direction envisagée, supérieure à t dans un voisinage de x et inférieure à s sur K : pour démontrer ce point, on peut se ramener au cas où la direction envisagée est la direction $\frac{\partial}{\partial x_1}$, et où le point x est l'origine des coordonnées : d'après la $\frac{\partial}{\partial x_1}$ -convexité de K , l'une des demi-droites issues de 0 parallèles à l'axe des x_1 (disons la direction positive) ne rencontre pas K ; soit $A > 0$ tel que tout point de K ait une abscisse supérieure à $-A$: il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que le cône d'axe $0x_1$, de sommet $(-A, 0)$ et de demi-angle au sommet ε ne rencontre K qu'en des points d'abscisse négative :

VI.6

la fonction $Q(x) = (x_1 + A)^2 \sin^2 \varepsilon - x_2^2 \cos^2 \varepsilon$ est alors égale à A^2 à l'origine, est strictement inférieure à A^2 sur K , et est convexe dans la direction $\frac{\partial}{\partial x_1}$; en la composant avec une fonction linéaire convenable, on obtient la fonction ρ souhaitée.
