Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

André Unterberger

Espaces de Sobolev d'ordre variable et applications

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 5, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1970-1971

ESPACES DE SOBOLEV D'ORDRE VARIABLE ET APPLICATIONS

par André UNTERBERGER

Exposé N° 5

28 Octobre 1970

§ 1. DEFINITIONS ET PROPRIETES GENERALES.

On conserve les notations des exposés 3 et 4.

Soit $\rho \in \mathcal{S}_{\infty}(X;\mathbb{R}) = \mathcal{S}(X;\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$, espace des fonctions sur X à valeurs réelles qui sont sommes d'une constante et d'un élément de $\mathcal{S}(X)$; soit k un nombre réel.

Définition (I.1) : On désigne par $S^{\rho,k}$ l'espace des fonctions a de classe C^{∞} sur $X \times \Xi$, à valeurs complexes, satisfaisant les conditions suivantes :

1) $\forall\, p, q \in \mathbb{N}^n$, $\forall\, M \in \mathbb{N}$, $\exists\, C > 0$ telle que

$$(1+|x|^2)^{M|p|}\,|D_x^p \partial_\xi^q a(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\rho(x)-|q|)}[1+\mathrm{Log}(1+|\xi|^2)]^{k+|p|}$$

2) il existe une fonction de classe C^{∞} sur Ξ, notée $a(\infty,\xi)$, telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}^n$, $\partial_\xi^q a(x,\xi)$ tende vers $\partial^q a(\infty,\xi)$ lorsque $|x| \to \infty$, et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\partial^q a(\infty,\xi)| < C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(\rho(\infty)-|q|)}[1+\mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^{k} .$$

Remarques : $\rho(\infty)$ désigne bien sûr la limite de $\rho(x)$ quand $|x| \to \infty$.

Cette classe est introduite en vue de permettre la considération du symbole

$$a_{\rho,k}(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{\rho(x)}{2}}\,[1+\mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^k .$$

On notera que la fonction a elle-même et ses dérivées par rapport à ξ ne sont pas supposées être à décroissance rapide en x.

Enfin, dans le cas où ρ est constante, on distinguera l'espace $S^{\rho,0}$ et l'espace S^{ρ} qui a été introduit dans l'exposé N°3 : on a bien l'inclusion $S^{\rho} \subset S^{\rho,0}$, mais non l'égalité.

<u>Proposition (I.1)</u> : <u>Soient</u> m <u>et</u> M <u>deux nombres réels satisfaisant les inégalités</u> $m < \inf \rho \leq \sup \rho < M$. <u>Alors</u> $S^m \subset S^{\rho,k} \subset S^M$ <u>pour tout k réel</u>.

Le seul point non trivial concerne la deuxième inclusion, et en fait seulement l'estimation de $\partial^q a(\infty,\xi) - \partial_\xi^q a(x,\xi)$ lorsque $|x| \to \infty$. Posons $x = (x_1, x')$ avec $x' = (x_2,\ldots,x_n)$; choisissons M' vérifiant $\sup \rho < M' < M$; soit $K \in \mathbb{N}$ et supposons par exemple $x_1 > 0$.

On écrit alors

$$|\partial^q a(\infty,\xi) - \partial^q a(x,\xi)| = \left| \int_{x_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_1} \partial_\xi^q a(y_1, x', \xi)\, dy_1 \right|$$

$$\leq C \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{(1+|x'|^2 + y_1^2)^K} (1+|\xi|^2)^{\frac{M'-|q|}{2}} [1 + \mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^{k+1}\, dy_1$$

et on conclut par l'inégalité

$$\int_{x_1}^{\infty} \frac{dy_1}{(1+|x'|^2+y_1^2)^K} \leq \min\left((1+|x'|^2)^{\frac{1}{2}-K}, \frac{x_1^{1-2K}}{2K-1} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{2K-1}}\, x_1^{\frac{1}{2}-K} (1+|x'|^2)^{\frac{1}{4}-\frac{K}{2}}.$$

<u>Proposition (I.2)</u> : <u>Si</u> $a \in S^{\rho,k}$ <u>et</u> $b \in S^{\sigma,j}$, <u>alors</u> $D_x^p \partial_\xi^q a \in S^{\rho-|q|,k+|p|}$ <u>et</u> $ab \in S^{\rho+\sigma,k+j}$. <u>De plus</u>. $a \# b \in S^{\rho+\sigma,k+j}$ <u>et</u> $a_* \in S^{\rho,k}$ <u>(cf. exposé N°4 pour la définition de l'opérateurs de composition #, ainsi que pour celle de l'opérateur</u> $_*$).

Les deux premiers points se prouvent sans difficulté. Pour les deux derniers, il est inutile de refaire une démonstration : on écrit "assez loin" les développements asymptotiques de $a \# b$ et de a_* qui ont été établis dans l'exposé N°4, et on se sert de la proposition (I.1) et de la première moitié de la proposition (I.2)

Lemme (I.1) : Posons

$$a_{\rho,k}(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{\rho(x)}{2}} [1 + \mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^{-k} .$$

Il existe une suite $(b_j)_{j\geq 0}$, $b_j \in S^{-\rho-j,-k+j}$, telle que, pour tout j, on ait

$$(b_0 + \dots + b_{j-1}) \# a_{\rho,k} - 1 \in S^{-j,j} .$$

La preuve est immédiate par récurrence.

On pose $b_0 = a_{-\rho,-k}$ et, si

$$c_j = (b_0 + \dots + b_{j-1}) \# a_{\rho,k} - 1 \text{ , on pose } b_j = -c_j b_0 .$$

Lemme (I.2) : Soit $a \in S^{\rho,k}$, et supposons que l'opérateur $\mathrm{Op}\,(a)$ soit autoadjoint. Alors $\mathrm{Im}\, a \in S^{\rho-1,k+1}$.

Cela résulte de l'unicité du symbole d'un opérateur pseudo-différentiel, et de la formule qui donne le développement du symbole $(\overline{a})_*$ de l'adjoint de $\mathrm{Op}\,(a)$.

Lemme (I.3) : Soit $a \in S^{2\rho,2k}$, et supposons que l'opérateur $A = \mathrm{Op}\,(a)$ soit autoadjoint. Supposons de plus qu'il existe $C > 0$ et $R > 0$ telles que

$$\mathrm{Re}\, a(x,\xi) \geq C(1+|\xi|^2)^{\rho(x)} [1 + \mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^{2k} \text{ pour } |\xi| \geq R .$$

Il existe alors une suite $(b_j)_{j\geq 0}$, $b_j \in S^{\rho-j,k+j}$, telle que, si l'on pose $B_j = \mathrm{Op}(b_j)$, et si l'on appelle B_j^* l'adjoint de B_j, le symbole de l'opérateur $A - (B_0^* + \dots + B_{j-1}^*)(B_0 + \dots + B_{j-1})$ appartienne à $S^{2\rho-j,2k+1}$ pour tout $j \geq 1$. En particulier, quel que soit $K \in \mathbb{N}$, il existe $C_1 > 0$ telle que l'on ait, quelle que soit $u \in \mathcal{S}(X)$:

$$\mathrm{Re}\, (Au,u) \geq -C_1 \|u\|^2_{-K} .$$

La deuxième partie du lemme est une conséquence immédiate de la première.

La première partie se prouve par récurrence.
On choisit $b_o(x,\xi) = [\mathrm{Re}\ a(x,\xi)]^{1/2}$ en dehors d'un certain voisinage de $\xi = 0$, avec un prolongement convenable dans ce voisinage.
Puis, si c_j est le symbole de $A - (B_o^* + \dots + B_{j-1}^*)(B_o + \dots + B_{j-1})$, on posera $b_j = \frac{c_j}{2b_o}$ en dehors d'un voisinage de $\xi = 0$; on se servira pour conclure du lemme (I.2).

Définition (I.2) : Soient $\rho \in \mathcal{S}_\infty(X;\mathbb{R})$, et $k \in \mathbb{R}$.
On désigne par $H^{\rho,k}(X)$ l'espace des distributions $u \in H^{-\infty}(X)$ telles que $A^{\rho,k}u$ appartienne à $L^2(X)$, $A^{\rho,k}$ étant l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $a_{\rho,k}(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{\rho(x)}{2}}\ [1 + \mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^k$.

Proposition (I.3) : Soient ρ, σ, $\tau \in \mathcal{S}_\infty(X;\mathbb{R})$; et soient k, j, ℓ trois nombres réels. Supposons que l'on ait soit $\inf\,(\rho-\sigma-\tau) > 0$, soit $\rho-\sigma-\tau \geq 0$ pour tout $x \in X$ et $k-j-\ell \geq 0$. Alors si $u \in H^{\rho,k}$ et si $a \in S^{\sigma,j}$, $\mathrm{Op}\,(a)u \in H^{\tau,\ell}(X)$.
En particulier on a $H^{\rho,k}(X) \subset H^{\tau,\ell}(X)$ si $\inf\,(\rho-\tau) > 0$ ou bien $\rho-\tau \geq 0$ et $k-\ell \geq 0$.

La deuxième partie de la proposition est un cas particulier de la première. Pour celle-ci, il s'agit de prouver que si $u \in H^{-\infty}(X)$ et si $A^{\rho,k}u \in L^2(X)$, alors $A^{\tau,\ell}\,\mathrm{Op}\,(a)\,u \in L^2(X)$.
Soit B un inverse à gauche de $A^{\rho,k}$ modulo un opérateur "suffisamment améliorant" : B est fourni par le lemme (I.1) et son symbole appartient à $S^{-\rho,-k}$. On est ramené à prouver que $A^{\tau,\ell}\,\mathrm{Op}\,(a)\,B$ opère continûment de $L^2(X)$ dans $L^2(X)$: or le symbole de cet opérateur pseudo-différentiel appartient à $S^{\tau+\sigma-\rho,\ell+j-k}$, et donc à $S^{o,o}$ en vertu des hypothèse faites.
Finalement, on est ramené à montrer qu'un opérateur pseudo-différentiel G de symbole $g \in S^{o,o}$ opère continûment de $L^2(X)$ dans $L^2(X)$. A cet effet, soit C la borne supérieure de la partie réelle du symbole de G^*G, et soit $C_1 > C$.
L'opérateur $C_1 - G^*G$ vérifie les hypothèses du lemme (I.3) et il existe par

conséquent $C_2 > 0$ telle que l'on ait

$$C_1 \|u\|^2 - \|G u\|^2 \geq - C_2 \|u\|^2_{-1}$$

pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(X)$.
Ceci conclut la preuve de la proposition (I.3).

<u>Définition et Proposition (I.4)</u> : <u>Soient</u> $\rho \in \mathcal{S}_\infty(X;\mathbb{R})$, k <u>et</u> m <u>deux nombres réels tels que</u> $m < \inf \rho(x)$. <u>On pose</u>

$$\|u\|^2_{\rho,k} = \|A^{\rho,k}u\|^2_o + \|u\|^2_m$$

<u>pour toute distribution</u> $u \in H^{\rho,k}(X)$.
<u>La norme ainsi définie ne dépend pas de</u> m, <u>à l'équivalence des normes près.</u> <u>Ni l'espace</u> $H^{\rho,k}(X)$ <u>ni sa topologie ne dépendent du choix de la forme quadratique</u> $|\xi|^2$. <u>L'espace</u> $H^{\rho,k}(X)$ <u>est complet</u>. $\mathcal{S}(X)$ <u>y est dense. Enfin, le dual de</u> $H^{\rho,k}(X)$ <u>est</u> $H^{-\rho,-k}(X)$ <u>pour la dualité prolongeant celle entre</u> $\mathcal{D}(X)$ <u>et</u> $\mathcal{D}'(X)$.

Tout ceci se démontre sans peine, en utilisant des lemmes déjà établis, à l'exception de la densité de $\mathcal{S}(X)$ dans $H^{\rho,k}(X)$, laquelle (pas difficile à prouver non plus) nécessite un examen du crochet de l'opérateur $A^{\rho,k}$ et d'un opérateur de régularisation, que nous passons sous silence.

<u>Remarque</u> : Soit K un compact de X.
Pour définir l'espace $H_K^{\rho,k}(X)$, intersection de $H^{\rho,k}(X)$ avec $\mathcal{E}'_K(X)$, on n'a besoin que de la connaissance de ρ dans un voisinage de K, comme on s'en convainc en utilisant le caractère pseudo-local des opérateurs pseudo-différentiels. Il est facile d'énoncer et de prouver l'invariance des espaces $H_K^{\rho,k}$ par difféomorphisme.
Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, ou plus généralement une variété réelle dénombrable à l'infini, on voit comment définir les espaces $H^{\rho,k}_{comp}(\Omega)$♦, duaux l'un de l'autre, sans faire sur ρ d'autre hypothèse que celle de différentiabilité indéfinie (bien entendu, dans le cas d'une variété il faut consi-

♦ ou $H^{-\rho,-k}_{loc}(\Omega)$

dérer des espaces de section de certains fibrés ou bien introduire une métrique riemannienne pour définir cette dualité).

§ 2. UNE NORME "A LA HÖRMANDER" SUR LES ESPACES $H^{\rho,k}$.

Tout ce paragraphe sera consacré à la démonstration du fait suivant :

Théorème (II.1) : Soient $\rho \in \mathcal{S}_\infty(X;\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, à valeurs réelles, vérifiant les propriétés suivantes :

a) il existe $M>0$, $M>\sup \rho$, tel que

$$\hat{\varphi}(\xi) = 0(|\xi|^{2M}) \quad \text{quand} \quad |\xi| \to 0$$

b) $\hat{\varphi}$ ne s'annule identiquement sur aucune demi-droite issue de l'origine.

Pour tout t réel >0, on pose $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)$.
Soit enfin $a<\frac{1}{2}$.
Il existe alors trois constantes positives C_1, C_2, C telles que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(X)$, on ait :

$$C_1 \int_0^{1/2} \left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |(\varphi_t * u)(x)|^2 dx \leq \|u\|^2_{\rho,k}$$
$$\leq C_2 \int_0^{1/2} \left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t}\right)^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} |(\varphi_t * u)(x)|^2 dx + C\,\|u\|^2_{\rho-a} .$$

Remarques : Les restrictions $M>0$ et $2M>\sup\rho$ sont essentielles ; la condition $M>\sup\rho$ ne l'est pas, mais simplifiera la démonstration d'un lemme à la fin.

Par ailleurs en appliquant plusieurs fois la deuxième inégalité annoncée, on voit qu'on peut remplacer le terme complémentaire $\|u\|^2_{\rho-a}$ par $\|u\|^2_{-N}$ aussi grand que soit N.

Enfin, on remarquera en cours de démonstration qu'on peut remplacer la borne supérieure $\frac{1}{2}$ de l'intégrale par n'importe quel nombre positif inférieur à 1 : ceci permet d'utiliser les mêmes estimations si ρ n'est définie et C^{∞} que dans un ouvert Ω de X (sans conditions de croissance vers le bord), pourvu qu'on se limite aux fonctions $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, K étant un compact fixe de Ω.

Lemme (II.1) : Posons $\psi = \varphi * \check{\varphi}$, d'où $\hat{\psi} = |\hat{\varphi}|^2$, et

$$f(x,\xi) = \int_0^{1/2} (\mathrm{Log}\,\frac{1}{t})^{2k}\, t^{-2\rho(x)}\, \hat{\psi}(t\,\xi)\, \frac{dt}{t} .$$

Il existe deux constantes $C > 0$ et $R > 0$ telles que l'on ait

$$\frac{1}{C}\, f(x,\xi) \leq (1+|\xi|^2)^{\rho(x)}[1+\mathrm{Log}(1+|\xi|^2)]^{2k} \leq C\, f(x,\xi)$$

pour $|\xi| \geq R$.

De plus, l'opérateur S défini par

$$S\,u(x) = \int f(x,\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi = \int_0^{1/2} (\mathrm{Log}\,\frac{1}{t})^{2k} t^{-2\rho(x)} (\psi_t * u)(x)\, \frac{dt}{t}$$

opère continûment de $H^{2M}(X)$ dans $L^2(X)$.

Remarquons d'abord que l'intégrale qui définit $f(x,\xi)$ est convergente pour $\xi \neq 0$ en vertu de l'inégalité $\hat{\psi}(t\,\xi) \leq C\, t^{2M}\, |\xi|^{2M}$.

Après le changement de variable défini par $t|\xi| = \theta$, et en posant $\eta = \xi / |\xi|$, on obtient

$$f(x,\xi) = |\xi|^{2\rho(x)} (\mathrm{Log}\,|\xi|)^{2k}\, g(x,\xi) \quad \text{avec}$$

$$g(x,\xi) = \int_0^{\frac{1}{2}|\xi|} \left[1+\frac{\mathrm{Log}\,\frac{1}{\theta}}{\mathrm{Log}\,|\xi|}\right]^{2k} \theta^{-2\rho(x)}\hat{\psi}(\theta\,\eta)\, \frac{d\theta}{\theta} .$$

Dans l'intervalle d'intégration, on a toujours $1 + \dfrac{\mathrm{Log}\,\frac{1}{\theta}}{\mathrm{Log}\,|\xi|} > 0$.

Par ailleurs, si k est ≥ 0, on écrira

$$1+\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{\theta}}{\operatorname{Log}|\xi|} \leq 1+\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{\theta}}{\operatorname{Log} 2} \quad \text{pour } \theta \leq 1, \text{ et } \leq 1 \text{ pour } \theta \geq 1.$$

Si k est <0, on écrira

$$1+\frac{\operatorname{Log}\frac{1}{\theta}}{\operatorname{Log}|\xi|} \geq 1 \quad \text{pour } \theta \leq 1, \text{ et } \geq \frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log}(2\theta)} \quad \text{pour } \theta \geq 1.$$

Dans les deux cas, on conclut par le théorème de convergence dominée que la fonction $g(x,\xi)$ est continue pour $\xi \neq 0$, et tend lorsque $|\xi| \to \infty$, η restant fixe, vers l'intégrale $\int_0^\infty \theta^{-2\rho(x)} \hat{\phi}(\theta\eta) \frac{d\theta}{\theta}$, laquelle est une fonction continue et strictement positive de $\rho(x)$ et de η.

La double inégalité annoncée en résulte.

Pour estimer $\|Su\|$, choisissons M' tel que $\sup \rho < M' < M$, et écrivons

$$(Su, v) = \int_0^{1/2} (\operatorname{Log}\frac{1}{t})^{2k}\, t^{2M-2M'} (t^{-2M}(\phi_t * u), t^{2M'-2\rho(x)} v) \frac{dt}{t} .$$

On a $$\|t^{-2M}(\phi_t * u)\|_0^2 = t^{-4M} \int (\hat{\phi}(t\xi))^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leq C \int |\xi|^{4M} |u(\xi)|^2 d\xi \leq C \|u\|_{2M}^2 .$$

D'où $$|(Su,v)| \leq C \|u\|_{2M} \|v\|_0 \quad \text{et} \quad \|Su\|_0 \leq C \|u\|_{2M} .$$

<u>Lemme (II.2)</u> : <u>Il existe deux constantes</u> $C_1 > 0$ <u>et</u> $C_2 > 0$ <u>telles que l'on ait, pour toute fonction</u> $u \in \mathcal{D}(X)$:

$$\frac{1}{C_1} \operatorname{Re} \int_0^{1/2} (\operatorname{Log}\frac{1}{t})^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} (\phi_t * u)(x)\, \bar{u}(x)\, dx \leq \|u\|_{\rho,k}^2$$

$$\leq C_1 \operatorname{Re} \int_0^{1/2} (\operatorname{Log}\frac{1}{t})^{2k} \frac{dt}{t} \int t^{-2\rho(x)} (\phi_t * u)(x)\, \bar{u}(x)\, dx + C_2 \|u\|_{\rho-a}^2 .$$

Soit en effet α une fonction de classe C^∞ sur Ξ, à valeurs réelles, égale à 0 pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et à 1 pour $|\xi| \geq 1$. La fonction $h(x,\xi) = \alpha(\xi)\, f(x,\xi)$ (cf. lemme II.1) appartient à l'espace $S^{2\rho,2k}$ comme il résulte facilement du lemme (II.1), et l'inégalité

$$\frac{1}{C}\, h(x,\xi) \leq (1+|\xi|^2)^{\rho(x)} [1+\mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^{2k} \leq C\, h(x,\xi)$$

reste valable pour $|\xi|$ assez grand.
Soit H l'opérateur autoadjoint $\frac{1}{2}[Op(h) + Op\,(h)^*]$: son symbole diffère de $h(x,\xi)$ par un élément de $S^{2\rho-1,2k+1}$: par ailleurs, le symbole de l'opérateur $(\Lambda^{\rho,k})^*\Lambda^{\rho,k}$ diffère de $(1+|\xi|^2)^{\rho(x)}[1+\mathrm{Log}\,(1+|\xi|^2)]^{2k}$ par un élément de $S^{2\rho-1,2k+1}$.
Si $C_1 > C$, et si B est l'un des deux opérateurs $C_1 H - (\Lambda^{\rho,k})^*\Lambda^{\rho,k}$ et $(\Lambda^{\rho,k})^*\Lambda^{\rho,k} - \frac{1}{C_1} H$, il résulte alors du lemme (I.3) que l'on a
$\mathrm{Re}\,(Bu,u) \geq -C_3 \|u\|^2_{\rho-a}$.
Enfin, si $b(x,\xi) \in S^{2\rho-1,2k+1}$, on a

$$|(Op\,(b)\,u,u)| \leq C_4 \|u\|^2_{\rho-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \leq C_4 \|u\|^2_{\rho-a}\,.$$

Il résulte de tout cela que l'on a

$$\frac{1}{C_1}\mathrm{Re}\,(Op(h)u,u) - C_5 \|u\|^2_{\rho-a} \leq \|u\|^2_{\rho,k} \leq C_1\,\mathrm{Re}(Op(h)u,u) + C_5 \|u\|^2_{\rho-a}\,.$$

Comme $Op\,(h) = S\,Op\,(\alpha)$, où S est défini dans le lemme (II.1), et comme $Op\,(\alpha-1)$ opère continûment de $H^{-\infty}(X)$ dans $H^{\infty}(X)$, on voit que pour terminer la preuve du lemme (II.2) il suffit de prouver que pour s entier >0 il existe r tel que S opere continûment de $H^r(X)$ dans $H^s(X)$.
On l'a déjà vu dans le lemme (II.1) pour $s = 0$. En précisant les notations, et en appelant ici $S_{\rho,k}$ l'opérateur que nous avons appelé S, on s'en tire dans le cas général au moyen de la formule $\frac{\partial}{\partial x_j} S_{\rho,k} = S_{\rho,k}\frac{\partial}{\partial x_j} + 2\frac{\partial\rho}{\partial x_j} S_{\rho,k-\frac{1}{2}}$

et de celles qu'on obtient en itérant cette dernière.

En partant du lemme (II.2), en écrivant

$$t^{-2\rho(x)}\varphi_t * u = \check{\varphi}_t * (t^{-2\rho(x)}(\varphi_t * u)) + L_t(t^{-2\rho(x)}\varphi_t * u) \quad ,$$

avec $L_t v = t^{-2\rho(x)}\check{\varphi}_t * (t^{2\rho(x)} v) - \check{\varphi}_t * v$, et en notant que l'adjoint de $\check{\varphi}_t *$ est $\varphi_t *$, on voit que pour terminer la preuve du théorème (II.1) il suffit d'établir le lemme suivant.

<u>Lemme (II.3)</u> : <u>Soit</u> $L_t = t^{-2\rho(x)}\check{\varphi}_t * (t^{2\rho(x)} .) - \check{\varphi}_t *$.
<u>Il existe</u> $\varepsilon > 0$ <u>et une constante</u> $C > 0$ <u>telle que l'on ait, pour tout</u> $t > 0$ <u>assez petit et toute fonction</u> $u \in \mathcal{D}(X)$, <u>l'inégalité</u>

$$\| L_t (t^{-2\rho(x)}\varphi_t * u)\|_{-\rho+a} \leq C \; t^{\varepsilon} \; \|u\|_{\rho-a} \quad .$$

Toutes les constantes qui figurent dans la démonstration de ce lemme seront indépendantes de t $(0 < t < t_o)$.

Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}\,(\frac{1}{2} - a)$. On peut, par une partition finie de l'unité, se ramener au cas où l'oscillation de ρ est strictement inférieure à ε (rappelons que $\rho(x)$ tend vers une constante à l'infini) ; on pose alors $\rho(x) = \rho_o + \sigma(x)$, avec $\sigma(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$ et $\sup \sigma(x) < \varepsilon$.

Ecrivons

$$(L_t v)(x) = \int \varphi_t(y-x)[t^{2\rho(y)-2\rho(x)} - 1]\, v(y)\, dy$$

$$= \int \varphi(z)[t^{2\rho(x+tz)-2\rho(x)} - 1]\, v(x+tz)\, dz \quad .$$

En utilisant l'inégalité $|e^{ab} - 1| \leq |b| e^{|a|}$, valable pour $|b| \leq 1$, avec $b = t \operatorname{Log}\frac{1}{t}$ et $a = \frac{2}{t}(\rho(x) - \rho(x+t\,z))$, on obtient

$$|(L_t v)(x)| \leq C\, t \operatorname{Log}\frac{1}{t} \int |\varphi(z)|\; |v(x+t\,z)|\, dz$$

$$= C\, t \operatorname{Log}\frac{1}{t}\, (\check{\varphi}_t * |v|)(x) \; .$$

D'où $\|L_t v\|_o \leq C\, t \operatorname{Log}\frac{1}{t} \|v\|_o$.
En itérant la formule

$$\frac{\partial}{\partial x_j} L_t = L_t \frac{\partial}{\partial x_j} + 2\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{Log}\frac{1}{t} [L_t + \check{\varphi}_t *]$$
$$- 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t} [L_t + \check{\varphi}_t *] (\frac{\partial\rho}{\partial x_j})$$
$$= L_t \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t} \frac{\partial\rho}{\partial x_j} L_t - 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t} L_t (\frac{\partial\rho}{\partial x_j} .) + 2 \operatorname{Log}\frac{1}{t} M_t \quad ,$$

avec $M_t = \frac{\partial\rho}{\partial x_j} \check{\varphi}_t * - \check{\varphi}_t * (\frac{\partial\rho}{\partial x_j} .)$,
et en tenant compte des inégalités faciles $\|M_t v\|_s \leq C\, t \|v\|_s$, on obtient pour s entier positif l'inégalité

$$\|L_t v\|_s \leq C\, t (\operatorname{Log}\frac{1}{t})^{|s|+1} \|v\|_s \quad .$$

Cette inégalité reste valable pour s entier négatif étant donné que $L_t^* = -[t^{2\sigma(x)} \varphi_t *(t^{-2\rho(x)} .) - \varphi_t *]$, donc pour tout s réel par interpolation.

On peut alors écrire

$$\|L_t v\|_{-\rho+a} \leq \|L_t v\|_{-\rho_o+a} \leq C\, t^{1-\varepsilon} \|v\|_{-\rho_o+a} \quad ,$$

et il ne reste plus qu'à établir l'inégalité

$$t^{1-\varepsilon} \|t^{-2\sigma(x)}(\varphi_t * u)\|_{-\rho_o+a} \leq C\, t^{\varepsilon} \|u\|_{\rho_o-a} \quad ,$$

ou encore

$$\|t^{-2\sigma(x)+2\varepsilon}\, t^{-2\rho_o+1-4\varepsilon} \varphi_t * u\|_{-\rho_o+a} \leq C \|u\|_{\rho_o-a} \quad .$$

Comme $\inf(-2\sigma(x)+2\varepsilon) > 0$, l'opérateur de multiplication par $t^{-2\sigma(x)+2\varepsilon}$ a une norme, en tant qu'opérateur de $H^s(X)$ dans $H^s(X)$ $(s \in \mathbb{R})$ bornée indépendamment de t : cela est évident pour $s = 0$, puis pour s entier positif, d'où l'on conclut par dualité et interpolation. Pour finir, on écrit

$$\|t^{-2\rho_o+1-4\varepsilon}\varphi_t * u\|^2_{-\rho_o+a} = \int (1+|\xi|^2)^{\rho_o-a} |\hat{u}(\xi)|^2 \beta(t,\xi)\, d\xi \quad ,$$

avec $\beta(t,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-2\rho_o+2a}\, t^{-4\rho_o+2-8\varepsilon}\, |\hat{\varphi}(t\,\xi)|^2$, et on utilise l'inégalité $|\hat{\varphi}(t\,\xi)| \leq C\, t^{2(\rho_o-a)}\, |\xi|^{2(\rho_o-a)}$ pour $|\xi| \geq 1$.

Ceci termine la preuve du théorème (II.1).

§ 3. APPLICATION : INEGALITES L^2 ET REGULARITE.

Théorème (III.1) : Soient $P(D)$ et $Q(D)$ deux opérateurs différentiels sur X à coefficients constants, Ω un ouvert de X, ρ une fonction de classe C^∞ sur Ω, à valeurs réelles, et m un nombre réel.
Supposons que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\tau_0 > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout nombre réel $\tau \geq \tau_0$ et toute fonction $u \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on ait l'inégalité

$$\int e^{2\tau\rho(x)}\, |Q(D)\,u(x)|^2\, dx \leq \frac{C}{\tau^m} \int e^{2\tau\sigma(x)}\, |P(D)\,u(x)|^2\, dx \quad .$$

Alors pour toute distribution $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et tout nombre réel k tels que $P(D)u \in H^{\sigma,k}_{comp}(\Omega)$, $Q(D)u$ appartient à $H^{\rho,k+\frac{m}{2}}_{comp}(\Omega)$.

Soit en effet L un compact de Ω ; soit $\varepsilon > 0$ tel que $d(L,\complement\Omega) > \varepsilon$ et soit K l'ensemble compact des points x de X satisfaisant $d(x,L) \leq \varepsilon$.

Choisissons $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ vérifiant les condition du théorème (II.1) et l'estimation $\hat{\varphi}(\xi) = O(|\xi|^{2M})$ quand $|\xi| \to 0$, avec $M > \max(\sup_L \rho\, ,\, \sup_L \sigma)$.
Soit $u \in \mathcal{D}_L(\Omega)$.
En posant $t = e^{-\tau}$ et en appliquant l'inégalité L^2 à la fonction $v = \varphi_t * u$, on obtient

$$\int t^{-2\rho(x)}\, |Q(D)(\varphi_t * u)(x)|^2\, dx \leq C\, (\mathrm{Log}\, \tfrac{1}{t})^{-m} \int t^{-2\sigma(x)} |P(D)(\varphi_t * u)(x)|^2 dx$$

pour $0 < t < e^{-\tau_o}$.

En commutant $\varphi_t *$ avec chacun des opérateurs à coefficients constants P(D) et Q(D), et en intégrant par rapport à la mesure $(\mathrm{Log}\,\frac{1}{t})^{2k+m}\,\frac{dt}{t}$, on obtient, compte tenu du théorème (II.1) :
quel que soit N réel, il existe $C_1 > 0$ tel que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_L(\Omega)$, on ait

$$\|Q(D)\,u\|^2_{\rho,k+\frac{m}{2}} - C_1\ \|Q(D)\,u\|^2_{-N} \leq C\ \|P(D)\,u\|^2_{\sigma,k}\ .$$

On en déduit le théorème (III.1) par régularisation.

Remarque : Plaçons-nous dans le cas fréquent où $\rho = \sigma$ et $Q = 1$. Si Ω est P(-D)-convexe (i.e. $P(-D)\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$), on voit par dualité que pour toute distribution $f \in H^{-\rho,-k-\frac{m}{2}}_{loc}(\Omega)$ il existe $g \in H^{-\rho,-k}_{loc}(\Omega)$ telle que $P(-D)g = f$.
On trouvera de nombreuses inégalités L^2 de ce genre dans le livre de F. Trèves : Linear Partial Differential Equations, publié chez Gordon and Breach.
Le cas le plus intéressant (toujours dans le cas de la remarque) est celui où toute fonction réelle continue dans Ω est majorée par une fonction ρ pour laquelle l'inégalité L^2 est valable : car dans ce cas on en conclut que $P(-D)\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega)$, autrement dit que Ω est fortement P(-D)-convexe.