Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Coueignoux

Théorèmes taubériens et théorie spectrale

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 28, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A28_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

THEOREMES TAUBERIENS ET THEORIE SPECTRALE

par P. COUEIGNOUX

Exposé N° 28

26 Mai 1971

§ 0. INTRODUCTION.

Nous nous proposons de construire un cadre formel pour la théorie spectrale des opérateurs différentiels, en mettant en valeur le recours aux théorèmes taubériens, et de donner quelques résultats connus ou moins connus.

Le cadre initial est simplement heuristique et le catalogue se limite aux théorèmes de Karamata.

§ 1. THEORIE SPECTRALE.

1.1 Notations : Soit H un espace de Hilbert, $[D(A),A]$ un opérateur non borné auto-adjoint sur H : il lui correspond une mesure opérationnelle $\vec{\mu}$ sur $\mathbb{R}$, la mesure scalaire associée μ et une décomposition spectrale de H : $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_{(\lambda)}\, d\,\mu(\lambda)$, telles que :

à un vecteur **x** de H, on associe sa décomposition spectrale :
$x = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} x(\lambda)\, d\,\mu(\lambda)$,

à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, on associe l'opérateur $T = \vec{\mu}(f) = \int f\, d\vec{\mu}$ par : $T_x = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f(\lambda)\, x(\lambda)\, d\,\mu(\lambda)$, où cette expression a un sens.

En particulier l'opérateur de départ A correspond à la fonction identité et l'on définit les opérateurs de projection E_{λ_0} par les fonctions respectives : $\lambda \to 1_{]-\infty,\lambda_0]}(\lambda)$.

Rappelons les formules fondamentales :

$$d\,\vec{\mu}(\lambda) = d(E_\lambda) \qquad (1)$$

$$x(\lambda)\, d\,\mu(\lambda) = d(E_\lambda\, x)\ . \qquad (2)$$

<u>1.2 Problème</u> : Ici H est l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions complexes de carré sommable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, A un opérateur différentiel non borné auto-adjoint sur cet espace et le but recherché d'obtenir des renseignements sur la mesure spectrale $\vec{\mu}$ de A.

La première étape est d'étudier, non pas $\vec{\mu}$ en elle-même, mais son action sur une famille de fonctions tests $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$; autrement dit la famille d'opérateurs $\{G_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ définie par : $G_t = \int f_t \, d\vec{\mu}$, reliée à A par une équation en t (3) dépendant de la famille choisie.

Sous certaines hypothèses sur Ω et A, les opérateurs G_t sont des opérateurs à noyaux "réguliers", et l'on travaillera, non plus sur $\{G_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, mais sur la famille de leurs noyaux.

Formellement, supposons que l'opérateur E_λ admette le noyau $e(\xi,\eta,\lambda)$ défini par :

$$(E_\lambda x)(\xi) = \int_\Omega e(\xi,\eta,\lambda)\, x(\eta)\, d\eta \quad ;$$

de la formule (2) vient :

$$x(\lambda)\, d\,\mu(\lambda) = \int_\Omega d\, e(\xi,\eta,\lambda)\, x(\eta)\, d\eta \quad ,$$

où $d\, e(\xi,\eta,\lambda)$ est la dérivée au sens des distributions, par rapport à λ, du noyau $e(\xi,\eta,\lambda)$ **appelée fonction spectrale de A**,
ainsi que

$$(Tx)(\xi) = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f(\lambda) \int_\Omega d\, e(\xi,\eta,\lambda)\, x(\eta)\, d\eta \quad ,$$

si bien que l'opérateur : $T = \int f\, d\vec{\mu}$, admet le noyau : $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\, e(\xi,\eta,\lambda)$,
l'intégrale vectorielle $\int^{\oplus}$ se ramenant ici à une simple intégrale scalaire.

On étudiera donc la famille des noyaux : $g_t(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}} f_t(\lambda)\, d\, e(\xi,\eta,\lambda)$ des opérateurs G_t , suivant les méthodes propres aux opérateurs différentiels.

La dernière étape permet alors de remonter, à l'aide de théorèmes taubériens, du comportement de la fonction : $t \to g_t(\xi,\eta)$, à celui de la mesure scalaire $d\,e(\xi,\eta,\lambda)$ ou de la fonction de répartition $e(\xi,\eta,\lambda)$.

1.3 Conclusion : Toute démonstration de ce type résultera d'un compromis sur le choix de la famille $\{f_t\}$: d'un côté ce choix impose l'étude des opérateurs G_t correspondants, qui reste limitée par les connaissances acquises sur les équations aux dérivées partielles, et de l'autre l'existence d'un théorème taubérien emportant la conclusion

1.4 Nature des théorèmes taubériens - Exemples de famille de fonctions tests:

On appelle taubérien tout théorème permettant, à partir de transformées par une mesure de Radon scalaire μ d'une famille de fonctions $\{f_t\}$ dépendant d'un paramètre t, de déduire certaines propriétés de μ.

On peut définir une transformation $\mathcal{T}\{f_t\}$ opérant sur les mesures de Radon à valeurs dans un espace de fonctions du paramètre t par :
$\mathcal{T} : \mu \to \{t \to F(t) = \langle f_t,\mu \rangle\}$, f_t et μ étant pris dans des espaces cohérents. Il s'agit alors d'étudier μ à partir de sa transformée $\mathcal{T}(\mu) = F(t)$.

On comprend qu'il y ait autant de classes de théorèmes taubériens que de famille $\{f_t\}$.

Citons :

$f_t : \lambda \to \frac{1}{\lambda+t}$, engendrant la transformation de Stieltjes ; les opérateurs G_t satisfont alors : (3) $(A + t\,I)G_t = I$, ce sont les résolvantes de A.

$f_t : \lambda \to e^{-\lambda t}$, engendrant la transformation de Laplace; les opérateurs G_t satisfont alors à : (3) $(\frac{\partial}{\partial t} + A)G_t = 0$, où apparaît l'équation de la chaleur associée à A.

$f_t : \lambda \to \lambda^{-t}$, engendrant la transformation de Riemann.

$f_t : \lambda \to e^{-i\lambda t}$, engendrant la transformation de Fourier.

$f_t : \lambda \to \cos t\sqrt{\lambda}$; G_t satisfaisant à l'équation des ondes :

(3) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A\right) G_t = 0 \ .$$

$f_t : \lambda \to 1_{]-\infty, t]}(\lambda)$; G_t étant l'opérateur de projection E_t ...

<u>1.5 Exemple</u> : Cet exemple montrera en particulier comment interpréter la fonction spectrale $e(\xi,\eta,\lambda)$ dans un cas simple où l'on remonte aux valeurs propres de A.

Soient Ω un "bon ouvert" borné de $\mathbb{R}^n$, A un opérateur différentiel à coefficients de classe C^∞ sur $\overline{\Omega}$, elliptique d'ordre $2m > n$ dans Ω ; $A = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha D^\alpha$; et l'on note : $A' = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha D^\alpha$.

L'opérateur $[D(A), A]$ dans $L^2(\Omega)$ satisfait en outre aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} H_0^{2m}(\Omega) \subset D(A) \subset H^m(\Omega) \ . \\ [D(A), A] \text{ est un opérateur auto-adjoint positif dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

A admet d'après ces hypothèses, une suite de valeurs propres positives $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers l'infini avec i et une suite de fonctions propres $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ associées aux λ_i et formant une base orthonormale de $L^2(\Omega)$.

L'opérateur de projection E_λ est défini de la façon suivante : pour $\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \omega_i(\xi)$,

$$(E_\lambda \varphi)(\xi) = \int_\Omega e(\xi,\eta,\lambda)\, \varphi(\eta)\, d\eta = \sum_{i | \lambda_i \ \lambda} \varphi^i \omega_i(\xi) \ .$$

Considérons l'opérateur $\delta_\xi \circ E_\lambda$, ξ étant fixé dans Ω :

$$|\delta_\xi \circ E_\lambda(\varphi)| = |(E_\lambda\varphi)(\xi)| \leq (\sup_{i|\lambda_i\leq\lambda} |\omega_i(\xi)|)(\sum_{i|\lambda_i\leq\lambda} |\varphi^i|)$$

$$\leq \sup_{i|\lambda_i\leq\lambda} |\omega_i(\xi)|)\sqrt{N(\lambda)}\sqrt{\sum_{i|\lambda_i\leq i} |\varphi^i|^2} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

en notant $N(\lambda)$ le nombre, fini, de valeurs propres λ_i non supérieures à λ. $\delta_\xi \circ E_\lambda$ est donc une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$ et se développe sur la base orthonormale des $\bar{\omega}_j(\eta)$

$$e(\xi,\eta,\lambda) = \sum_{j=o}^{\infty} e^j(\xi,\lambda)\,\bar{\omega}_j(\eta) .$$

Par définition de l'opérateur E_λ et de la dualité sur $L^2(\Omega)$:

$$(E_\lambda\,\omega_i)(\xi) = \sum_{j=o}^{\infty} e^j(\xi,\lambda)\,\delta_j^i = \omega_i(\xi) \quad \text{si} \quad \lambda_i \leq \lambda$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad \lambda_i > \lambda \quad ;$$

d'où

$$e(\xi,\eta,\lambda) = \sum_{i|\lambda_i\leq\lambda} \omega_i(\xi)\,\bar{\omega}_i(\eta) . \tag{4}$$

On utilise maintenant la transformation de Stieltjes : pour tout $t \geq 0$, l'opérateur G_t, résolvante de A, admet un noyau de Green $g_t(\xi,\eta)$, $\mathcal{C}^\infty$ en η sur $\Omega - \{\xi\}$ (par hypo-ellipticité de A) et continu et de carré sommable en η sur Ω (lemme de majoration), pour tout ξ fixé dans Ω :

$$g_t(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda+t}\, d\,e(\xi,\eta,\lambda) \tag{5}$$

ou, par (4)

$$g_t(\xi,\eta) = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{\omega_i(\xi)\,\bar{\omega}_i(\eta)}{\lambda_i+t} . \tag{6}$$

Etude locale :

Admettons les résultats suivants, dus aux propriétés "différentielles" de A et de Ω (lemme de majoration) :

soit Ω_1 un ouvert tel que : $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ et $\xi \notin \bar{\Omega}_1$, (7)

alors la fonction : $t \to \sup_{\eta \in \Omega_1} |g_t(\xi, \eta)|$ est à décroissance rapide lorsque $t \to +\infty$.

Le comportement asymptotique sur la diagonale est :

$$g_t(\xi, \eta) \sim (2\pi)^{-n} [\int_{\mathbb{R}} (1+A'(\xi))^{-1} d\xi] t^{-(1-\frac{n}{2m})} \quad \text{quand } t \to +\infty . \tag{8}$$

On en déduit par (6) la proposition suivante qui résume l'étude spectrale :

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour tout } \xi \in \Omega : \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\omega_i(\xi)|}{\lambda_i + t} \sim C\ t^{-(1-\frac{n}{2m})} \quad \text{quand } t \to \infty ; \\ \text{pour } \xi \neq \eta ;\ \xi \text{ et } \eta \in \Omega : \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega_i(\xi)\,\bar{\omega}_i(\eta)}{\lambda_i + t} \text{ à décroissance rapide en } t \\ \text{pour } t \to \infty . \end{array} \right. \tag{9}$$

Un théorème taubérien permet de conclure :

$$\left| \begin{array}{l} \text{pour tout } \xi \in \Omega : \displaystyle\sum_{i | \lambda_i \leq \lambda} |\omega_i(\xi)|^2 \sim C(m,n)\, \lambda^{\frac{n}{2m}} \quad \text{quand } \lambda \to \infty ; \\ \text{pour } \xi \neq \eta ;\ \xi \text{ et } \eta \in \Omega : \displaystyle\sum_{i | \lambda_i \leq \lambda} \omega_i(\xi)\,\bar{\omega}_i(\eta) = 0(\lambda^{\varepsilon}) \text{ quand } \lambda \to \infty,\ \varepsilon \in]0,1[\\ \text{avec : } C(m,n) = (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} [1 + A'(\xi)]^{-1} d\xi \times \frac{2m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2m} . \end{array} \right. \tag{10}$$

Etude globale :

Elle résulte d'une intégration en ξ de la première formule de (9). Sous certaines conditions supplémentaires vérifiées par A et Ω, un lemme de majoration justifie le théorème de Lebesgue qui donne :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i + t} \sim c' \; t^{-(1-\frac{n}{2m})} \quad \text{quand } t \to \infty , \tag{9'}$$

et par le même théorème taubérien :

$$\begin{aligned} &N(\lambda) \sim c'(m,n)\lambda^{\frac{n}{2m}} \text{ quand } \lambda \to \infty \,;\; c'(m,n) = c(m,n) \int_\Omega d\xi \\ \text{soit} \quad &\lambda_i \sim c''(m,n)\, i^{\frac{2m}{n}} \qquad \text{avec} \quad c'(m,n) = [c'(m,n)]^{-\frac{2m}{n}} \end{aligned} \tag{10'}$$

§ 3. THEOREMES TAUBERIENS.

Une grande partie des résultats taubériens se démontre à l'aide de simples changements de mesure, par dérivation ou intégration par parties. On est guid' par la forme des résultats directs, plus faciles à obtenir. Donnons ici des résultats plus fins, dus à Karamata.

Soit $\alpha(t)$ une fonction complexe de la variable réelle, nulle sur $\mathbb{R}_-$, à variations bornées sur tout compact : on lui associe une mesure de Radon $d\alpha$, portée par $\mathbb{R}_+$, dont elle est une fonction de répartition.

Transformation de Laplace :

Soit σ_o l'abscisse de semi-convergence de l'intégrale : $f(s) = \int_o^{\to+\infty} e^{-st}\, d\alpha(t)$; et supposons σ_o négative ou nulle. Nous énoncerons :

. S'il existe un réel A, un réel strictement positif γ et un réel K tel que la fonction : $K t^{\gamma} + \alpha(t)$ soit croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors, si $f(s)$ est équivalente à $A s^{-\gamma}$ lorsque s tend vers 0 par valeurs positives (respectivement vers l'infini par valeurs croissantes), $\alpha(t)$ est équivalente à

$\frac{At^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}$ lorsque t tend vers l'infini par valeurs croissantes (respectivement vers 0 par valeurs positives).

Lorsque A est nul, il faut remplacer "équivalente à $As^{-\gamma}$" par "un infiniment petit devant $s^{-\gamma}$", et de même pour At^{γ}.

. Extension : On dit qu'une fonction φ varie lentement à l'infini si, quel que soit le réel strictement positif x, la limite, lorsque t tend vers l'infini par valeurs croissantes, de $\varphi(xt)[\varphi(t)]^{-1}$ existe et est égale à 1.

Dans ce cas, s'il existe un réel A et un réel strictement positif γ, et si la fonction $\alpha(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors si $f(s)$ est équivalente à $As^{-\gamma}\varphi(s^{-1})$ lorsque s tend vers 0 par valeurs positives, $\alpha(t)$ est équivalente à $\frac{At^{\gamma}\varphi(t)}{\Gamma(\gamma+1)}$ lorsque t augmente indéfiniment.

<u>Transformations de Stieltjes</u> :

Nous supposons l'intégrale : $f(s) = \int_0^{\to+\infty} \frac{d\alpha(t)}{s+t}$ semi-convergente

Nous énoncerons :

. S'il existe un réel A et un réel γ strictement positif et inférieur ou égal à 1, et si la fonction $\alpha(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors, si $f(s)$ est équivalente à $As^{-\gamma}$ lorsque s augmente indéfiniment (respectivement lorsque s tend vers 0 par valeurs positives), $\alpha(t)$ est équivalente à $A\,\frac{\sin\pi(1-\gamma)}{\pi(1-\gamma)}\,t^{1-\gamma}$ lorsque t augmente indéfiniment (respectivement lorsque t tend vers 0 par valeurs positives).

Il nous est possible d'en donner des extensions, du type suivant

. S'il existe un réel A non nul tel que $f(s)$ soit équivalente à $A\,s^{-1}\log s$ lorsque s augmente indéfiniment, alors $\alpha(t)$ est équivalent à $A\log t$ lorsque t augmente indéfiniment.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Widder : The Laplace transform (Princeton)
donne les résultats relatifs aux transformations ci-dessus.

Feller : An introduction to probability theory and its applications I et II
donne des exemples de théorèmes taubériens et leurs applications aux probabilités.

Wiener : Selected papers of Norbert Wiener (M.I.T. Press)
retrace les idées originales qui ont conduit Wiener à formuler son théorème, ainsi que de nombreux exemples de résultats taubériens.
