SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. GEYMONAT

Transposition des problèmes aux limites elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 27, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A27_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

TRANSPOSITION DES PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

par G. GEYMONAT

Exposé N° 27 — 19 Mai 1971

§0. INTRODUCTION

Dans cet exposé sont résumés des résultats obtenus par Baouendi-Geymonat [1] dans le cas analytique.

Pour simplifier l'exposé on se limite au cas du problème de Dirichlet pour le laplacien ; les résultats restent valables pour des problèmes aux limites plus généraux (voir par ex. Lions-Magenes [2] chap.8).

Notations : Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ soit une variété à bord analytique dont le bord est Γ.

$\mathcal{D}_0(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des $f \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ plates au bord Γ, muni de la topologie induite par $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$; $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega})$.

$\mathcal{D}'_0(\overline{\Omega})$ est l'espace des distributions dans Ω prolongeables à $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie de dual fort de $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega})$.

$\mathcal{a}(\Gamma)$ est l'espace des fonctions analytiques réelles sur Γ muni de la topologie usuelle : $\mathcal{a}(\Gamma) = \lim\limits_{M \to +\infty} \text{ind}\ \mathcal{a}_M(\Gamma)$; $\mathcal{a}'(\Gamma)$ en est le dual fort.

§1. L'ISOMORPHISME DE DEPART.

1.1 Introduisons les espaces suivants

$$\mathcal{G}_\Delta(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) ; \Delta v \in \mathcal{D}(\Omega), \gamma_0 v \in \mathcal{a}(\Gamma)\}$$

$$\mathcal{K}_\Delta(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) ; \Delta v \in \mathcal{D}_0(\overline{\Omega}), \gamma_0 v, \gamma_1 v \in \mathcal{a}(\Gamma)\}$$

munis des topologies naturelles ; leurs duals forts seront notés par $\mathcal{G}'_\Delta(\Omega)$ et $\mathcal{K}'_\Delta(\Omega)$.

Remarquons que grace au théorème de Morrey-Nirenberg d'analitycité locale, il résulte :

(1.1) $\mathcal{G}_\Delta(\Omega) \subset \mathcal{K}_\Delta(\Omega)$ <u>avec injection continue</u>.

Du théorème de Cauchy-Kowalewska on déduit immédiatement:

(1.2) <u>L'application linéaire et continue</u> $v \mapsto (\gamma_0 v, \gamma_1 v)$ <u>de</u> $\mathcal{G}_\Delta(\Omega)$ <u>dans</u> $\mathcal{A}(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma)$ <u>est surjective et pour tout</u> $M > 0$ <u>il existe un relèvement linéaire et continu</u> $(\varphi_0, \varphi_1) \mapsto r_M(\varphi_0, \varphi_1)$ <u>de</u> $\mathcal{A}_M(\Gamma) \times \mathcal{A}_M(\Gamma)$ <u>dans</u> $\mathcal{G}_\Delta(\Omega)$.

Pour la démonstration du résultat suivant voir Baouendi-Geymonat [1].

<u>Lemme 1.1</u> : <u>L'application linéaire et continue</u> $v \mapsto (\gamma_0 v, \gamma_1 v)$ <u>de</u> $\mathcal{K}_\Delta(\Omega)$ <u>dans</u> $\mathcal{A}(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma)$ <u>est surjective et admet un relèvement</u> $\mathcal{R} : (\varphi_0, \varphi_1) \mapsto \mathcal{R}(\varphi_0, \varphi_1)$ <u>linéaire et continue</u>.

1.2 Désignons par $\mathfrak{D}_\Delta(\bar{\Omega})$ l'espace suivant :

$$\mathfrak{D}_\Delta(\bar{\Omega}) = \{ f \in \mathfrak{D}_0(\bar{\Omega}) \; ; \; f = \Delta u \text{ avec } u \in \mathfrak{D}(\bar{\Omega}), \; \gamma_0 u = 0 \text{ et } \gamma_1 u \in \mathcal{A}(\Gamma) \}$$

muni de la topologie limite projective naturelle.

Soit K l'application linéaire et continue

$$(1.3) \quad \begin{cases} \varphi \mapsto K\varphi = \Delta \mathcal{R}(0, \varphi) \\ \mathcal{A}(\Gamma) \to \mathfrak{D}_\Delta(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

On peut alors démontrer le théorème suivant

<u>Théorème 1.1</u> : <u>L'application</u>

$$(1.4) \quad \begin{cases} (u, \varphi) \to \Delta u + K\varphi \\ \mathfrak{D}_0(\bar{\Omega}) \times \mathcal{A}(\Gamma) \to \mathfrak{D}_\Delta(\bar{\Omega}) \end{cases}$$

<u>est un isomorphisme algébrique et topologique</u>.

Pour que la transposition de l'isomorphisme de départ (1.4) soit intéressante il faut que $\mathfrak{D}_\Delta(\bar{\Omega})$ soit un espace normal de distributions de telle sorte que le dual fort soit un espace de distributions sur Ω.

<u>Théorème 1.2</u> : $\mathcal{D}(\Omega)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{D}_\Delta(\overline{\Omega})$

Pour la démonstration voir Baouendi-Geymonat [1].
On a donc les injections continues avec image dense

(1.5) $$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}_\Delta(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{D}_o(\overline{\Omega})$$

Si nous désignons par $\mathcal{D}'_\Delta(\overline{\Omega})$ le dual fort de $\mathcal{D}_\Delta(\overline{\Omega})$ on en déduit par transposition

(1.6) $$\mathcal{D}'_o(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{D}'_\Delta(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$ <u>avec injections continues</u>.

Du théorème 1.2 on déduit aussi le corollaire suivant

(1.7) $\mathcal{G}_\Delta(\Omega)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{K}_\Delta(\Omega)$.

Par transposition du théorème 1.1 on obtient le corollaire

(1.8) <u>L'application</u>

$$\begin{cases} u \to (\Delta u, K^* u) \\ \mathcal{D}'_\Delta(\overline{\Omega}) \to \mathcal{D}'_o(\overline{\Omega}) \times \mathcal{A}'(\Gamma) \end{cases}$$

<u>est un isomorphisme algébrique et topologique</u>.

Pour interpréter $K^* u$ nous allons nous restreindre à des sous-espaces F convenables de $\mathcal{D}'_o(\overline{\Omega})$.

<u>§2. UNE FORMULE DE GREEN.</u>

2.1 Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé vérifiant

(2.1) $$\begin{cases} L^2(\Omega) \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) & \text{avec injections continues} \\ L^2(\Omega) \text{ dense dans } F . \end{cases}$$

Si F' désigne le dual fort de F la condition (2.1) entraine

(2.2) $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow F' \hookrightarrow L^2(\Omega)$ <u>avec injections continues</u> .

Soit

$$Y = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \ : \ \Delta u \in F\}$$

muni de la topologie du graphe. On a

(2.3) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>est dense dans Y</u> .

Considérons maintenant deux conditions portant sur l'espace F :

(α) <u>L'injection canonique et continue de</u> $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>dans</u> $\mathcal{G}'_{\Delta}(\Omega)$, <u>définie pour</u> $f \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>par</u>

$$v \mapsto \int_{\Omega} f \ \bar{v} \ dx \qquad \text{pour tout } v \in \mathcal{G}_{\Delta}(\Omega),$$

<u>se prolonge dans une application linéaire et continue</u> $G : F \to \mathcal{G}'_{\Delta}(\Omega)$.

(β) <u>L'application</u> $u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ <u>définie dans</u> $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>se prolonge en une application linéaire et continue de Y dans</u> $\mathcal{A}'(\Gamma) \times \mathcal{A}'(\Gamma)$ <u>encore désignée par</u> $u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$.

Il est clair que $L^2(\Omega)$ vérifie la condition (α) et que l'on peut remplacer $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par $L^2(\Omega)$ dans cette condition.

<u>Proposition 2.1</u> : <u>Supposons les conditions</u> (2.1),(α) <u>et</u> (β) <u>vérifiées. On a alors la formule de Green suivante pour tout</u> $u \in Y$ <u>et</u> $v \in \mathcal{G}_{\Delta}(\Omega)$

(2.4)
$$< G(\Delta u), v >_{\mathcal{G}'_{\Delta}(\Omega) \times \mathcal{G}_{\Delta}(\Omega)} - < u, \Delta v >_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$$

$$= < \gamma_1 u, \gamma_0 v >_{\mathcal{A}'(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma)} - < \gamma_0 u, \gamma_1 v >_{\mathcal{A}'(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma)} .$$

La formule est vraie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et on la prolonge par densité en utilisant les hypothèses.

<u>Théorème 2.1</u> : <u>Supposons la condition</u> (2.1) <u>vérifiée. Alors les conditions</u> (α) <u>et</u> (β) <u>sont équivalentes</u>.

Pour la démonstration de ce théorème voir Baouendi-Geymonat [1].

2.2 Si l'on suppose que F est <u>réflexif</u> alors (2.1) est <u>équivalent</u> à

(2.5) $\qquad \mathcal{D}(\Omega) \subsetneq F' \subsetneq L^2(\Omega)$ $\qquad$ avec injections continues et images denses.

Dans ce cas la condition suivante :

(α') <u>L'espace</u> F' <u>contient algébriquement et topologiquement l'espace</u> $\mathcal{G}_\Delta(\Omega)$.

est équivalente à la condition (α).

2.3 On peut s'intéresser au prolongement par continuité à Y de l'application $u \mapsto \gamma_o u$ définie pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$; on peut introduire alors la condition suivante :

($\alpha_{\gamma o}$) <u>L'injection canonique et continue de</u> $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ <u>dans X' se prolonge dans une application linéaire continue</u> $G : F \to X'$

où X' est le dual fort de $X = \{v \in \mathcal{G}_\Delta(\Omega) \; ; \; \gamma_o v = o\}$ c. à d. $X = \{v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \; ; \; \Delta v \in \mathcal{D}(\Omega), \gamma_o v = o\}$.

Dans ce cas la donnée d'un espace F réflexif, vérifiant (2.1) et (α_{γ_o}) est équivalente à la donnée d'un espace normal de distributions, réflexif, contenu dans $L^2(\Omega)$ et contenant X. Cette dernière condition est identique à celle de Lions-Magenes [2] chap. 8, section 3.2.

2.4 Se rapportant à (1.8) on peut chercher des conditions sur F pour que l'on ait

$$Y \subset \mathcal{D}'_{\Delta}(\bar{\Omega}).$$

Introduisons alors la condition suivante :

(α1) <u>L'injection canonique et continue de</u> $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ <u>dans</u> $\mathcal{K}'_{\Delta}(\Omega)$ <u>se prolonge dans une application linéaire et continue</u>

$$G_1 : F \to \mathcal{K}'_{\Delta}(\Omega).$$

De (1.7) on déduit immédiatement que (α_1) entraine (α). On a de plus le résultat suivant

<u>Proposition 2.2</u> : <u>Si</u> F <u>vérifie</u> (2.1) <u>et</u> (α_1) <u>alors</u>

$$Y \subset \mathcal{D}'_{\Delta}(\Omega)$$

<u>et pour tout</u> $v \in \mathcal{K}_{\Delta}(\Omega)$ <u>et pour tout</u> $u \in Y$ <u>on a la formule de Green</u>

$$(2.6) \quad < G_1(\Delta u), v >_{\mathcal{K}'_{\Delta}(\Omega) \times \mathcal{K}_{\Delta}(\Omega)} - < u, \Delta v >_{\mathcal{D}'_{\Delta}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{D}_{\Delta}(\bar{\Omega})}$$

$$= < \gamma_1 u \cdot \gamma_0 v >_{\mathcal{A}'(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma)} - < \gamma_0 u \cdot \gamma_1 v >_{\mathcal{A}'(\Gamma) \times \mathcal{A}(\Gamma)}.$$

2.5 Il est facile de donner, dans le cas F réflexif, une condition (α'_1) équivalente à (α_1) et analogue à la condition (α') de 2.2.

De meme on peut énoncer une condition (α_1, γ_0) en remplaçant dans (α_{γ_0}) l'espace X par l'espace

$$X_1 = \{v \in \mathcal{K}_{\Delta}(\Omega) : \gamma_0 v = 0\} = \{v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) ; \Delta v \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}), \gamma_0 v = 0\}$$

2.6 Il est possible de construire de nombreux exemples d'espaces F vérifiant (2.1) et (α_1) : citons en particulier l'espace $\Xi'(\Omega)$ introduit par Lions-Magenes [2], chap 8. L'espace $\mathcal{D}'_0(\overline{\Omega})$ des distributions prolongeables <u>ne vérifie pas</u> la condition (α'_1), mais tout élément de $\mathcal{D}'_0(\overline{\Omega})$ appartient au moins à un espace F vérifiant (α_1).

§3. RETOUR AUX PROBLEMES AUX LIMITES.

Nous pouvons maintenant interprêter l'opérateur K^* lorsque Δu appartient à un espace F vérifiant (2.1) et (α_1) (où même $(\alpha_{1\cdot\gamma_0})$).

De la proposition 2.2 il résulte immédiatement pour tout $u \in Y$

$$K^* u = R^* G_1(\Delta u) + \gamma_0 u \tag{3.1}$$

où $R\varphi = \mathcal{R}(o,\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}(\Gamma), \mathcal{K}_\Delta(\Omega))$ et donc $R^* : \mathcal{K}'_\Delta(\Omega) \to \mathcal{Q}'(\Gamma)$.

On en déduit le théorème suivant.

<u>Théorème 3.1</u> : <u>Soit F un espace vérifiant</u> (2.1) <u>et</u> (α_{1,γ_0}) ; <u>alors pour tout</u> $f \in F$ <u>et pour tout</u> $g \in \mathcal{Q}'(\Gamma)$ <u>il existe</u> $u \in \mathcal{D}'_\Delta(\overline{\Omega})$ <u>unique tel que</u>

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \gamma_0 u = g \end{cases}.$$

<u>De plus</u> u <u>dépend continument des données f et g</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S Baouendi-G.Geymonat. Transposition des problèmes aux limites elliptiques. symposia Mathematica volume IX (à paraitre).

[2] J.L. Lions. E.Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Tomes I.II.III. Dunod 1968-1970.