Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Magnier

Mesures de Radon à valeurs vectorielles

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. n° 24, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A24_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

MESURES DE RADON A VALEURS VECTORIELLES

par P. MAGNIER

Exposé N° 24   21 Avril 1971

§ 0. INTRODUCTION

Dans sa thèse de 1969, Erik Thomas étudie l'intégration des fonctions à valeurs réelles par rapport à une mesure de Radon à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe.

Dans les parties que nous présentons au cours de cet exposé, la plupart des définitions et démonstrations sont données tout d'abord dans le cas où cet espace est un espace de Banach, puis ensuite généralisées aux espaces vectoriels topologiques localement convexes ; nous restreindrons l'exposé au premier cas, à savoir où l'espace d'arrivée est un espace de Banach.

Notons simplement sans y revenir par la suite que la généralisation est obtenue en utilisant la remarque suivante :

Tout espace vectoriel topologique localement convexe complet est limite projective d'une famille d'espaces de Banach.

Après avoir, dans une première partie, donné des définitions et étudié quelques propriétés simples, nous rechercherons les mesures par rapport auquelles les fonctions intégrables sont "suffisamment nombreuses", c'est-à-dire pour lesquelles toute fonction borélienne bornée à support compact est intégrable et nous terminerons par l'étude des espaces où toutes les mesures à valeurs dans ces espaces jouissent de cette propriété.

Notations :

Soit T un espace topologique séparé supposé localement compact, Ω désignera la famille des ouverts de T, Γ celle des compacts et $\mathcal{B}$ celle des parties boréliennes de T ; K(T) sera l'espace des fonctions continues réelles à support compact dans T, J^+ ou $J^+(T)$ celui des fonctions réelles positives semi-continues inférieurement.

E étant un espace de Banach, et E' son dual topologique, $|\ |$ désignera indifféremment la norme dans E et dans E', B et B' seront les boules unités respectives de E et E'.

Si μ est alors une mesure de Radon définie sur T à valeurs dans E, c'est-à-dire une application linéaire continue de K(T) dans E, nous noterons :

$$\mu_{x'} = x' \circ \mu$$

la mesure de Radon réelle obtenue en composant μ avec une forme linéaire continue x' sur E, et $|\mu_{x'}|$ la mesure de Radon positive, variation de $\mu_{x'}$. Plus généralement α étant une mesure de Radon réelle, $|\alpha|$ sera la mesure de Radon positive variation de α.

§ 1. PREMIERE PARTIE : DEFINITIONS ET GENERALITES

Définition 1.1 : Mesure de Radon.
Soient T un espace topologique localement compact et E un espace de Banach; on appelle mesure de Radon définie sur T et à valeurs dans E, toute application linéaire continue de K(T) dans E.

Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E. Alors, pour tout compact K de T, il existe une constante positive M_K telle que :

$$|\mu(\varphi)| \leq M_K \|\varphi\| \qquad \text{avec} \qquad \|\varphi\| = \sup_{t\in T} |\varphi(t)|$$

pour toute fonction φ de K(T) à support dans K.

Définition 1.2 : Semi-variation.
Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach E; nous définirons comme suit, pour toute fonction positive définie sur T, la semi-variation $\mu^{\bullet}$ de la mesure μ :

1) $\forall f \in J^{+}$

$$\mu^{\bullet}(f) = \sup_{\substack{|\varphi|\leq f \\ \varphi\in K(t)}} |\mu(\varphi)|$$

2) Si g est positive et à support compact :

$$\mu^{\bullet}(g) = \operatorname*{Inf}_{\substack{g\le f \\ f\in J^+}} \mu^{\bullet}(f)$$

3) Si h est positive arbitraire :

$$\mu^{\bullet}(h) = \operatorname*{Sup}_{g\le h} \mu^{\bullet}(g)$$

g étant positive à support compact.

On vérifie que cette définition est cohérente, en particulier :

$$\forall\ f \in J^+ \qquad \mu^{\bullet}(f) = \sup_{|\varphi|\le f} \mu^{\bullet}(\varphi)$$

φ étant positive et dans K(T).

Propriétés de la semi-variation

On vérifie que la semi-variation $\mu^{\bullet}$ de la mesure μ est

- croissante
- positivement homogène
- dénombrablement sous-additive

et que de plus :

$$\boxed{\forall\ f \in J^+ \ ; \quad \mu^{\bullet}(f) = \sup_{x'\in B'} |\mu_{x'}|(f)}$$

En effet :

$$\mu^{\bullet}(f) = \sup_{\substack{|\varphi|\le f \\ \varphi\in K(T)}} |\mu(\varphi)| = \sup_{x'\in B'} \sup_{\substack{|\varphi|\le f \\ \varphi\in K(T)}} <\mu(\varphi)\ |x'>$$

$$= \sup_{x'\in B'} |\mu_{x'}|(f)$$

Lorsque A est une partie de T, si χ_A désigne sa caractéristique, nous noterons

$$\mu^{\bullet}(A) = \mu^{\bullet}(\chi_A)$$

et nous dirons qu'une fonction f (resp. une partie A de T) est μ-négligeable lorsque

$$\mu^{\bullet}(|f|) = 0 \qquad [\text{resp. } \mu^{\bullet}(A) = 0]$$

<u>Définition 1.3</u> : <u>Espace $\mathfrak{I}^{\bullet}(\mu)$</u>

Nous définissons l'espace $\mathfrak{I}^{\bullet}(\mu)$

$$\boxed{\mathfrak{I}^{\bullet}(\mu) = \{f \in \mathbb{R}^T : \mu^{\bullet}(|f|) < +\infty\}}$$

Cet espace est semi-normé par la semi-normé $\mu^{\bullet}(|\ |)$ et contient K(T) et l'injection μ:K(T) dans $\mathfrak{I}^{\bullet}(\mu)$ est continue, car :

$$\forall K \in \Gamma \qquad \mu^{\bullet}(\overset{o}{K}) = \sup_{|\varphi| \leq \chi_{\overset{o}{K}}} |\mu(\varphi)| \leq +\infty$$

et donc :

$$\mu^{\bullet}(|\varphi|) \leq \mu^{\bullet}(\overset{o}{K}) \, \|\varphi\| \qquad \forall \varphi \in K(\overset{o}{K})$$

<u>Définition 1.4</u> : <u>Espace $\mathcal{L}^1(\mu)$</u>

Par définition l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ ou espace des fonctions μ-intégrables est l'adhérence dans $\mathfrak{I}^{\bullet}(\mu)$ de K(T).

$\mathcal{L}^1(\mu)$ est donc semi-normé par $\mu^{\bullet}(|\ |)$ et l'espace quotient de $\mathcal{L}^1$ par le sous espace $\{\mu^{\bullet}(|f|) = 0\}$ est l'espace séparé associé; nous désignerons par $L^1(\mu)$ cet espace normé des μ-classes de fonctions intégrables.

<u>Propriétés de $\mathcal{L}^1(\mu)$</u>

Si f est intégrable, f^+, f^- est $|f|$ le sont aussi.

Si f est intégrable et ϕ continue et borné, $f\phi$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Si f est positive et intégrable, pour tout α réel positif, $\text{Inf}(\alpha, f)$ est intégrable.

<u>Théorème 1.5</u> : L'espace $\mathfrak{I}^{\cdot}(\mu)$ et par suite les espaces $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $L^1(\mu)$ sont complets.

Il suffit de montrer que toute série normalement convergente est convergente.

En effet soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série d'éléments de $\mathfrak{I}^{\cdot}(\mu)$ telle que :

$$\sum_{n\in N} \mu^{\cdot}(|f_n|) < +\infty$$

Posons alors $g = \Sigma|f_n| \geq 0$. On a alors :

$$\mu^{\cdot}(g) \leq \Sigma\ \mu^{\cdot}(|f_n|) < +\infty$$

et donc $\qquad 0 \leq g < +\infty \quad \mu pp.$

Et donc il existe une fonction f définie μpp par :

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$$

donc telle que : $|f| \leq g$ et donc $f \in \mathfrak{I}^{\cdot}(\mu)$ et d'autre part :

$$\mu^{\cdot}(f - \sum_{i=1}^{n} f_i) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^{\cdot}(|f_i|)$$

ce qui assure la convergence de la série vers f dans $\mathfrak{I}^{\cdot}(\mu)$.

<u>Définition 1.6</u> : <u>L'intégrale</u>.

Remarquons que :

$$\forall\ \varphi \in K(T)\ ; \quad |\mu(\varphi)| \leq \mu^{\cdot}(|\varphi|)$$

ce qui prouve que l'application μ de $K(T)$ dans E est continue pour la topologie induite par $\mu^{\cdot}(|\ \ |)$ dans $K(T)$.

L'intégrale sera alors, par définition, le prolongement par continuité uniforme de cette application à $\mathcal{L}^1(\mu)$ et l'on notera $\int f d\mu$ l'intégrale d'une fonction f de $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Propriétés de l'intégrale.

Soient μ et ν deux mesures de Radon définies sur T et à valeurs dans des espaces de Banach E et F.

Si : $\nu^{\bullet} \leq \mu^{\bullet}$ on a $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\nu)$, l'injection étant continue. En particulier, si u est une application linéaire continue de E dans F et si :

$$\nu = u \circ \mu$$

on a :

$$\mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathcal{L}^1(\nu)$$

et

$$\int f d\nu = u(\int f d\mu) \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Plus particulièrement, μ étant une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach E, pour toute forme linéaire continue x' sur E on a :

$$\mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathcal{L}^1(\mu_{x'}) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}^1(\mu) \subset \bigcap_{x' \in E'} \mathcal{L}^1(\mu_{x'})$$

et

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \int f d\mu_{x'} = \langle \int f d\mu, x' \rangle$$

Fonctions mesurables

Définition 1.7 : Une fonction réelle f définie sur T est μ-mesurable si et seulement si pour tout compact K et pour tout réel ε strictement positif, il existe un compact K_1 contenu dans K tel que

$$\mu^{\bullet}(K - K_1) \leq \varepsilon$$

et tel que la restriction de f à K_1 soit continue.

L'ensemble des fonctions μ-mesurables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^T$ stables pour les opérations classiques (produit, inf., sup.).

Si ν est une mesure de Radon à valeurs dans F et telle que :

$$\nu^{\bullet} \leq \mu^{\bullet}$$

et si f est μ-mesurable, alors f est ν mesurable ; en particulier :

Théorème 1.8 : Toute fonction μ-mesurable est $\mu_{x'}$-mesurable pour toute forme linéaire continue x' sur E.

On démontre alors, de la même façon que pour les mesures réelles les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.9 : Soient f et g deux fonctions réelles telles que f soit μ-mesurable et que :

$$f = g \quad \mu\text{-p.p.}$$

g est alors μ-mesurable.

Théorème 1.10 : Si f est μ-intégrable, alors f est μ-mesurable.

Signalons enfin un troisième théorème plus restrictif que dans le cas de mesures réelles.

Théorème 1.11 : Soit f une fonction μ-mesurable majorée μpp en valeur absolue par une fonction μ intégrable; f est μ-intégrable (*)

En particulier, si f est μ-intégrable et g μ-mesurable et μ-essentiellement bornée, fg est μ-intégrable.

Exemples de mesures de Radon à valeurs dans des Banach

1) μ est l'injection de K(T) dans $C_0(T)$ espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

(*) Contrairement à ce qui est vrai pour les mesures scalaires, il ne suffit pas que f soit μ-intégrable et que $\mu^{\bullet}(|f|)$ soit fini pour que f soit μ-intégrable. L'exemple 1) qui suit le montrera : 1 est continue donc μ-mesurable, $\mu^{\bullet}(1) = 1 < +\infty$, cependant seules les fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sont μ-intégrables.

On a :

$$\mu^{\bullet}(f) = \sup_{t\in T} f(k) \qquad \forall f \geq 0$$

$$\mathcal{L}^1(\mu) = C_0(T)$$

$$\int f d\mu = f \qquad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$f \text{ mesurable} \Leftrightarrow f \text{ continue}$$

L'ensemble vide est le seul ensemble μ-négligeable.

2) μ est l'injection de $K(T)$ dans un espace $L^p(\nu)$, ν étant une mesure de Radon réelle, et :

$$1 \leq p \leq +\infty ;$$

pour $1 \leq p < +\infty$, on a :

$$\mu^{\bullet}(f) = [\nu^{\bullet}(f^p)]^{1/p} \qquad \forall f \geq 0$$

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^p(\nu)$$

$$f\ \mu\text{-mesurable} \Leftrightarrow f\ \nu\text{-mesurable}$$

pour $p = +\infty$

$$\mu^{\bullet}(f) = \sup_{t\in T} f(t) \qquad \forall f \geq 0$$

$$\mathcal{L}^1(\mu) = C_0(T)$$

$$f\ \mu\text{-mesurable} \Leftrightarrow f \text{ continue}.$$

Ces deux exemples montrent que pour certaines mesures les fonctions intégrables sont "peu nombreuses" ; nous allons donc rechercher pour quelles mesures, les fonctions boréliennes bornées à support compact sont intégrables, comme pour les mesures réelles.

§ 2. MESURES PROLONGEABLES

Définition 2.1 : Une mesure de Radon est prolongeable lorsque toute fonction borélienne bornée à support compact est intégrable.

Nous nous intéresserons d'abord au cas où l'on peut considérer une mesure de Radon comme une application d'un Banach dans un autre.

Définition 2.2 : Mesures bornées
Une mesure de Radon μ est bornée si elle est continue pour la topologie de la convergence uniforme, ce qui revient à dire que :

$$\mu^{\bullet}(T) < +\infty$$

On a alors : $C_o(T) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ et l'on considère μ comme une application linéaire continue de $C_o(T)$ dans E.

En particulier, si T est compact, toute mesure μ est bornée.

Nous allons voir que dans ce cas les mesures prolongeables coïncident avec les mesures faiblement compactes.

D'après le théorème de Gantmacher, une application linéaire continue d'un Banach dans un autre est faiblement compacte si et seulement si sa transposée est faiblement compacte(•); donc ici μ est faiblement compacte si et seulement si la partie $\{\mu_{x'},\ x' \in B'\}$ est $\sigma(M,M')$ relativement compacte (M étant le dual de C_o).

Nous utiliserons alors des critères de faible compacité démontrés par A. Grothendieck(••) dans les espaces C'_o.

(•) Faiblement et non λ-faiblement, c'est-à-dire pour la topologie affaiblie de la topologie de la norme.

(••) Référence : A. Grothendieck "Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)", Can. J. Math, Vol. 5, pp. 129-173 (1953), théorème 2, p. 146.

Théorème 2.3 : Critères de faible compacité
Une partie Γ d'un espace $C_o'(T)$ (ou $C(K)'$) est faiblement (i.e. $\sigma(C_o', C_o'')$) relativement compacte si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(1) Pour toute suite (φ_n) de fonctions de C_o convergeant faiblement vers 0 (i.e. uniformément bornée et convergeant en tout point vers 0) on a :

$$\lim \alpha(\varphi_n) = 0 \quad \forall \alpha \in \Gamma, \text{ uniformément en } \alpha ;$$

(2) Pour toute suite (ω_n) d'ouverts deux à deux disjoints,
on a :

$$\lim \alpha(\omega_n) = 0, \text{ uniformément lorsque } \alpha \text{ décrit } \Gamma ;$$

(3) $\forall \omega \in \Omega, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists K \in \Gamma : K \subset \omega$ et $|\alpha|(\omega - K) \leq \varepsilon, \ \forall \alpha \in \Gamma$

(4) $\forall A \in \mathcal{A} ; \ \forall \varepsilon > 0 ; \ \left\{ \begin{array}{l} \exists \omega \in \Omega \\ \exists K \in \Gamma \end{array} \right. : K \subset A \subset \omega$
et $|\alpha|(\omega - K) \leq \varepsilon, \ \forall \alpha \in \Gamma$

(5) Il existe une mesure positive λ telle que :

$$\lim_{\lambda(A) \to 0} \alpha(A) = 0, \text{ uniformément lorsque } \alpha \text{ décrit } \Gamma.$$

A décrivant la famille $\mathcal{A}$ des boréliens de T et de plus on peut prendre λ du type $\sum_n C_n |\alpha_n|$ où α_n appartient à Γ et où (C_n) est une suite de réel positifs sommable .

Nous en déduisons alors le théorème suivant :

Théorème 2.4 : Soit μ une mesure de Radon bornée (ou définie sur un compact) et à valeurs dans un espace de Banach E; elle est faiblement compacte si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

(a) Pour toute suite (φ_n) de fonctions de C_o convergent faiblement vers 0, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\varphi_n) = 0$$

(b) $\forall\, \omega \in \Omega\ ;\ \exists\, x \in E : \int_\omega d\mu_{x'} = \langle x,x'\rangle \quad \forall\, x' \in E'$;

(c) $\forall\, \omega \in \Omega\ ;\ \chi_\omega \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(d) toute fonction borélienne bornée est intégrable [i. e. μ est prolongeable].

(e) Il existe une mesure positive λ telle que :

$$\lim_{\lambda(\alpha)} \mu^{\bullet}(A) = 0$$

et l'on peut prendre alors λ du type $\sum_n C_n |\mu_{x'_n}|$

où x'_n appartient à B' et où C_n est une suite sommable de réels positifs.

En effet :

(a) est l'interprétation du critère C_1 pour la famille

$$\{\mu_{x'} \mid x' \in B'\}$$

(c) provient du critère C_3 en remarquant que

1) $\forall\, \omega \in \Omega\ ;\ \forall\, K \subset \omega$ (K compact) ;

$\exists\, \varphi \in K(T) : \chi_K \leq \varphi \leq \chi_\omega$

2) pour les fonctions de J^+ on a :

$$\forall\, f \in J^+ \ ;\ \sup_{x' \in B'} |\mu_{x'}|(f) = \mu^{\bullet}(|f|)$$

(d) provient de la même façon de C_4 en remarquant en plus que les fonctions boréliennes étagées sont denses pour la topologie de la convergence uniforme et donc pour la topologie de $\mathfrak{J}^{\bullet}(\mu)$ dans l'espace des

fonctions boréliennes bornées (ce qui ramène le problème à démontrer que les caractéristiques des boréliens sont intégrables).
On a alors :

$$(d) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \qquad \text{en prenant } x = \int \chi_\omega \, d\mu \, .$$

Et (b) entraîne que μ est faiblement compacte en utilisant le critère C_2 : soit (ω_n) une suite d'ouverts deux à deux disjoints; pour toute partie P de $\mathbb{N}$, il existe x_P élément de E tel que :

$$\forall x' \in E' \quad : \quad <x_p, x'> \sum_{x \in P} \int_{\omega_n} d\,\mu_{x'} = \int_{\omega_P} d\mu_{x'} \qquad \text{si} \quad \omega_P = \bigcup_{n \in P} \omega_n \, ;$$

et si x_n est défini par :

$$<x', x_n> = \int_{\omega_n} d\mu_{x'} \, , \; \forall x' \in E'$$

la famille x_n est telle que toute ses sous-suites soient faiblement sommables, elle est donc d'après le théorème d'Orlicz-Banach fortement sommable, et donc, en particulier, x_n converge fortement vers 0 dans E.
Or

$$x_n = \sup_{x' \in B'} \int_{\omega_n} d\mu_{x'}$$

d'où le résultat.

Enfin (e) provient du critère C_5, en remarquant que

1) lorsque μ est faiblement compacte,

$$\forall A \in \mathcal{a} \quad ; \quad \chi_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

et donc
$$\mu^{\bullet}(A) = \sup_{x' \in B'} (\mu_{x'})(A)$$

2) pour la réciproque on a a priori :

$$\mu^{\bullet}(A) \geq \sup_{x' \in B'} |\mu_{x'}|(A) \, .$$

<u>Remarque</u> : Lorsqu'une mesure bornée μ est prolongeable, on peut simplifier la recherche des fonctions mesurables en se ramenant au cas des mesure

En effet si f est μ-mesurable, elle est $\mu_{x'}$-mesurable pour tout x' appartenant à E', et réciproquement, μ étant bornée et f $\mu_{x'}$ mesurable pour tout x' de E' (ou ce qui est suffisant pour tout x' de B')

$$\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} C_n |\mu_{x'_n}|$$

étant une mesure positive vérifie la condition (e),
f est alors $|\mu_{x'_n}|$-mesurable et donc λ mesurable et par suite μ-mesurable.
D'où le théorème :

Théorème 2.5 : Soit μ une mesure de Radon bornée (ou définie sur un compact) à valeurs dans un espace de Banach E et prolongeable; pour qu'une fonction f soit μ-mesurable, il faut et il suffit qu'elle soit $\mu_{x'}$-mesurable pour toute forme linéaire continue x' sur E.

Généralisation au cas des mesures non bornées

Nous nous ramènerons au cas des mesures bornées, en utilisant les remarques suivantes :

Soit μ une mesure de Radon définie sur un espace localement compact T et à valeurs dans un Banach E ; soit ω un ouvert relativement compact de T.

A toute fonction f définie sur ω, associons la fonction $\hat{f}$ définie sur T comme suit :

$$\hat{f}(t) = f(t) \qquad \forall t \in \omega$$
$$\hat{f}(t) = 0 \qquad \forall t \in \complement\omega$$

En identifiant f et $\hat{f}$, on a alors :

$$K(\omega) = \{f \in K(t) \ : \ \text{supp } f \subset \omega\}$$

$$J^+(\omega) \subset J^+(T)$$

Si ν est la mesure induite par μ sur ω (i.e. restriction de μ à $K(\omega)$), on a :

$$\nu^{\bullet}(f) = \mu^{\bullet}(\hat{f})$$

$$\mathcal{L}^1(\nu) \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

l'injection étant continue.

Et
$$\int f \, d\nu = \int \hat{f} \, d\mu \qquad \forall\, f \in \mathcal{L}^1(\nu)$$

Nous en déduisons alors les théorèmes suivants :

<u>Théorème 2.6</u> : Soit μ une mesure de Radon définie sur T et à valeurs dans un Banach E ; μ est prolongeable si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est réalisée :

(a) toute restriction de μ à un ouvert relativement compact est faiblement compacte.

(b) pour tout ouvert ω relativement compact, il existe x_ω appartenant à E tel que :

$$\forall\, x' \in E' \; ; \quad \langle x_\omega, x' \rangle = \int_K d\mu_{x'}$$

<u>Théorème 2.7</u> : Soit μ une mesure de Radon prolongeable; pour qu'une fonction soit μ-mesurable il faut et il suffit qu'elle soit $\mu_{x'}$-mesurable pour toute forme linéaire x' continue sur E.

Il existe également un critère analogue au précédent, sur la μ-intégrabilité des fonctions, mais avec une condition supplémentaire :

<u>Théorème 2.8</u> : Soit μ une mesure de Radon prolongeable à valeurs dans un Banach E; une fonction f est μ-intégrable, si et seulement si, pour toute forme linéaire continue x' sur E, f est $\mu_{x'}$-intégrable, et si pour tout ouvert ω, il existe x_ω dans E tel que :

$$\forall\, x' \in E' \; ; \quad \int_\omega f \, d\mu_{x'} = \langle x_\omega, x' \rangle$$

On démontre également, pour les mesures prolongeables, le théorème de convergence dominée, en se ramenant au cas des mesures scalaires (par l'intermédiaire des mesures $\mu_{x'}$) :

Théorème 2.9 : Soit μ une mesure de Radon prolongeable à valeurs dans un espace de Banach E ; soit une suite (f_n) de fonctions μ-intégrables, et majorées en valeur absolue par une même fonction g μ intégrable, convergeant μ-p.p. vers une fonction f; alors f est μ-intégrable ; f_n converge vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, et en particulier

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Remarque : Erik Thomas montre également que les mesures prolongeables sont les seules pour lesquelles ce théorème de convergence dominée est valable dans sa forme classique, sans conditions supplémentaires.

§ 3. ESPACES "FAIBLEMENT Σ-COMPLETS"

Nous allons, pour terminer, chercher à caractériser les espaces de Banach pour lesquels toutes les mesures de Radon à valeurs dans ces espaces sont prolongeables. Le théorème suivant est immédiat :

Théorème 3. 1 : Soit E un espace de Banach ; les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

(a) toute mesure de Radon à valeurs dans E est prolongeable.

(b) toute mesure de Radon à valeurs dans E et définie sur un compact est faiblement compacte.

(c) toute mesure de Radon bornée à valeurs dans E est prolongeable.

En effet d'après les théorèmes sur les mesures prolongeables :

$$(a) \Rightarrow (b) \quad \text{et} \quad (c) \Rightarrow (a)$$

Et l'on déduit :

$$(b) \Rightarrow (c),$$

en considérant le compactifié d'Alexandroff d'un espace localement compact T sur lequel est définie une mesure bornée.

En particulier, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs d'un espace E vérifiant l'une des trois conditions précédentes, la mesure μ définie sur $\mathbb{N}$, de masse x_n au point n, est bornée si et seulement si la suite (x_n) est scalairement sommable, i.e. :

$$\forall\, x'\in E' \ ; \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |< x_n, x'>| \ < +\infty \ ;$$

dans ce cas, μ doit donc être faiblement compacte, et donc :

$$(\exists\, x\in E) \quad (\forall\, x'\in E') \quad : \int_{\mathbb{N}} d\mu_{x'} = <x,x'> \ ,$$

c'est-à-dire :

$$(d) \qquad (\exists\, x\in E) \quad (\forall\, x'\in E') \quad : \sum_n <x_n,x'> \ = \ <x,x'> .$$

Montrons maintenant que, réciproquement, si l'espace E vérifie la condition précédente, il vérifie la condition (c) du théorème précédent.

Soit donc μ une mesure de Radon bornée définie sur un espace localement compact T et à valeurs dans E vérifiant la condition (d)

1) Si T est métrisable, pour tout ouvert ω de T, on a :

$$\chi_\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(t) \qquad \text{avec} \qquad \varphi_n \in C_o(T)$$

et si

$$x = \sum_n \mu(\varphi_n)$$

on a

$$\int_{\chi_\omega} d\mu = x \qquad \text{et} \qquad x\in E$$

c q f d

2) Si T est quelconque, on cherche à vérifier la condition (a) du théorème (2.4).

Soit alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C_o(T)$ faiblement convergente vers zéro, soit alors :

$$\Phi(t) = (\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$$

$\Phi(t)$ est alors un localement compact de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc métrisable, et si ψ_n est la projection de Φ sur la $n^{\underline{\text{ème}}}$ coordonnée de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit une mesure ν induite de μ par :

$$\mu(\varphi_n) = \nu(\psi_n) \text{ ;}$$

ν est faiblement compacte d'après la partie précédente et donc [Cf 2.4(a)]

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\varphi_n) = 0 \text{ dans } E \qquad \text{(c q f d)}$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 3.2 : Soit E un espace de Banach ; toute mesure de Radon à valeurs dans E est prolongeable si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E scalairement sommable [i.e. $\forall\, x' \in E'$; $\Sigma\, |\langle x', x_n\rangle| < +\infty$] est faiblement sommable [i.e. $\exists\, x \in E : \forall\, x' \in E'$; $\Sigma \langle x_n, x'\rangle = \langle x, x'\rangle$].

D'après le théorème d'Orlicz, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors sommable, puisque toutes ses suites partielles sont faiblement sommables. La condition précédente peut aussi s'écrire : toute application linéaire continue de c^o dans E est faiblement compacte ; elle est alors compacte.

Définition 3.3 : un tel espace de Banach est dit "faiblement Σ complet"

Il en est de même en remplaçant la suite (x_n) par une suite $(f(n)\, x_n)$, ce qui se traduit, pour la mesure de masse x_n au point n, par toute fonction scalairement intégrable (i.e. intégrable pour toute mesure $\mu_{x'}$) est μ-intégrable.

Plus généralement, on démontre que :

Théorème 3.4 : Soit E un espace "faiblement Σ-complet", et μ une mesure de Radon à valeurs dans E ; une fonction est μ-intégrable si et seulement si elle est $\mu_{x'}$-intégrable pour toute forme linéaire x' continue sur E, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_{x' \in E'} \mathcal{L}^1(\mu_{x'}) \tag{3.5}$$

Remarquons pour terminer que tout espace faiblement séquentiellement complet est "faiblement Σ-complet". Il en est donc ainsi en particulier des espaces $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $L^1(\mu)$, μ étant une mesure de Radon réelle, et Erik Thomas démontre qu'il en est de même lorsque μ est une mesure de Radon à valeurs dans un Banach.