Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

P. Schapira

Construction de solutions élémentaires dans le faisceau C de M. Sato

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 11, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A11_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77

(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

CONSTRUCTION DE SOLUTIONS ELEMENTAIRES DANS LE FAISCEAU C DE M. SATO

par P. SCHAPIRA

Exposé N° 11 16 Décembre 1970

§ 0. INTRODUCTION.

Le faisceau C a été introduit par Mikio Sato en 1969 pour l'étude des équations aux dérivées partielles. Son originalité tient à ce qu'il est défini sur le fibré en sphères cotangentes à une variété analytique réelle, et permet d'interpréter dans ce fibré les singularités d'une hyperfonction.

Sato utilise pour cela la représentation des hyperfonctions comme valeurs au bord de fonctions holomorphes, mais Hörmander [1] a récemment développé une théorie analogue à l'aide de la transformée de Fourier.

La construction de Sato du faisceau C est difficile : elle utilise des méthodes de la géométrie algébrique (éclatements, image directe de faisceaux). Nous avons préféré donner une construction "à la main" de ce faisceau, mais nous nous plaçons pour cela sur $\mathbb{R}^n$. Nous donnons aussi une représentation de ce faisceau, obtenue à l'aide de l'intégrale de Cauchy-Fantappié, représentation qui semble utile pour l'étude des opérateurs pseudo-différentiels [2].

Faute de documents (la plupart des articles sont écrits en japonais), ou faute de temps, le texte qui suit doit être considéré comme provisoire, et les théorèmes sont annoncés avec réserve.

§ 1. HYPERFONCTIONS.

Nous désignerons par $\mathcal{Q}$ le faisceau des fonctions analytiques (à valeurs complexes) sur $\mathbb{R}^n$ et par $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^n$. Le faisceau B des hyperfonctions sur $\mathbb{R}^n$ est caractérisé par les deux propriétés :

1) le faisceau B est flasque

2) pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_K(\mathbb{R}^n, B) = \mathcal{Q}'(K)$, ce dernier espace désignant l'espace des fonctionnelles analytiques portables par K (pour plus de détails cf. [8], [4], [10]).

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\tilde{\Omega}$ un voisinage de Ω dans $\mathbb{C}^n$ on a un isomorphisme

$$B(\Omega) \simeq H^n_\Omega(\tilde{\Omega}, \mathcal{O})$$

(c'est en fait ainsi que Sato définit les hyperfonctions).
Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert $\mathcal{O}$-acyclique (i.e. : par des ouverts d'holomorphie) de $\tilde{\Omega}-\Omega$, le théorème de Leray nous donne un isomorphisme

$$H^{n-1}(\mathcal{U},\mathcal{O}) \simeq H^{n-1}(\tilde{\Omega} - \Omega, \mathcal{O})$$

d'où si n est plus grand que 1 et si $\tilde{\Omega}$ est un ouvert d'holomorphie, des isomorphismes :

$$H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \underset{\lambda}{\rightarrow} H^{n-1}(\tilde{\Omega} - \Omega, \mathcal{O}) \underset{\delta}{\rightarrow} H^n_\Omega(\tilde{\Omega}, \mathcal{O}) \underset{\rho}{\rightarrow} B(\Omega) .$$

§ 2. VALEURS AU BORD DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

Soit Γ un cône ouvert convexe épointé de $\mathbb{R}^n$, f une fonction holomorphe dans un tube $(\Omega \times i\,\Gamma) \cap \tilde{\Omega}$. Nous allons définir $b(f) \in B(\Omega)$, valeur au bord de f.

En faisant un changement linéaire de coordonnées on peut supposer que Γ contient le cône $y_1 > 0, \dots, y_n > 0$. Soit alors $\mathcal{U}$ le recouvrement de $\tilde{\Omega} - \Omega$ par les ouverts $\{y_i \neq 0\} \cap \tilde{\Omega}$ $(i = 1, \dots, n)$. Posons

$$\tilde{\Omega} \# \Omega = \bigcap_{i=1}^{n} (\tilde{\Omega} \cap \{y_i \neq 0\}) .$$

On définit $\tilde{f} \in H^0(\tilde{\Omega} \# \Omega, \mathcal{O})$ en posant

$\tilde{f} = f$ sur $\tilde{\Omega} \cap \{y_1 > 0, \dots, y_n > 0\}$
$\tilde{f} = 0$ sur les autres composantes connexes de $\tilde{\Omega} \# \Omega$.

On considère alors $\tilde{f}$ comme une n-1 cochaîne fermée du recouvrement $\mathcal{U}$ à valeur dans $\mathcal{O}$ et on pose $\tilde{f} = \mu(f)$,

$$b(f) = \left(\frac{2}{i}\right)^n \rho \circ \delta \circ \lambda \circ \mu(f) .$$

On vérifie ([5], [10]) que si f se prolonge continuement à Ω, b(f) coïncide avec la restriction de f à Ω, et même que si $f(x+iy)$ a une limite $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ quand y tend vers 0 en restant dans des cônes Γ' dont les traces sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$ sont relativement compactes dans Γ, $b(f) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $b(f) = T$.

§ 3. REPRESENTATION DES HYPERFONCTIONS.

Soit S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. A toute partie I de S^{n-1} on associe :

$$\Gamma(I) = \{\lambda \eta \mid \lambda \in \mathbb{R}^+ , \eta \in I\}$$

$$d(I) = \overset{o}{\bigcap_{\eta \in I}} \{z \in \mathbb{C}^n \mid <\mathrm{Im}\, z, \eta> > 0\} .$$

On dit que I est convexe (resp. propre) si $\Gamma(I)$ est convexe (resp. ne contient aucune droite).

Théorème 1 : Soit $S^{n-1} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ un recouvrement fini de S^{n-1} par des parties convexes fermées propres.

1) $\exists\, \tilde{\Omega}$ $\forall\, T \in B(\Omega)$, $\exists\, f_\alpha \in H^0(\tilde{\Omega} \cap d(I_\alpha), \mathcal{O})$

$$T = \sum_\alpha b(f_\alpha)$$

2) $\forall\, \tilde{\Omega}$ $\exists\, \tilde{\Omega}'$ tels que si $f_\alpha \in H^0(\tilde{\Omega} \cap d(I_\alpha), \mathcal{O})$ et si

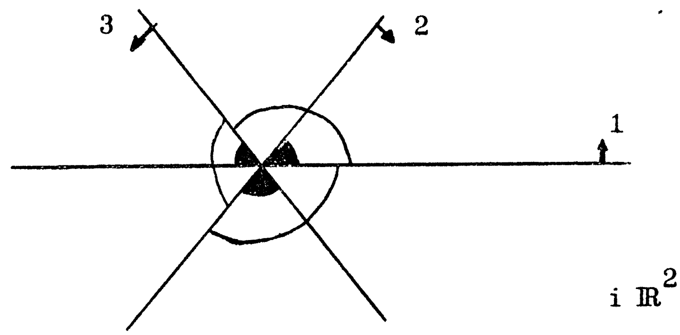
$$\sum_\alpha b(f_\alpha) = 0$$

$\exists\, g_{\alpha,\beta} \in H^0(\tilde{\Omega}' \cap d(I_\alpha \cap I_\beta), \mathcal{O})$ $(\beta \neq \alpha)$ avec

$$f_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} g_{\alpha,\beta} .$$

La deuxième partie de ce théorème n'est autre que le théorème du Edge of the Wedge de Martineau [6].

Exemple [5] : Considérons le recouvrement de S^1 par trois fermées délimitées par les intersections deux à deux de trois demi-espaces (cf. la figure). Les $d(I_\alpha)$ sont représentés, à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ près par les angles pleins. Le théorème 1 ne fait que traduire dans ce cas particulier le fait que l'application de $H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O})$ dans $B(\Omega)$ est un isomorphisme, si $\mathfrak{U}$ est le recouvrement de $\tilde{\Omega}-\Omega$ par les trois demi-espaces notés 1→, 2→, 3→, sur la figure.



§ 4. LE FAISCEAU C.

Soit CP la famille des parties convexes fermées propres de S^{n-1}. Si $I \in CP$ on pose

$$C_{\Omega \times I} = \varinjlim_{\tilde{\Omega} \supset \Omega} H^0(\tilde{\Omega} \cap d(I)\ ,\ \mathcal{O}).$$

Si I_1, I_2, $I_1 \cup I_2 \in CP$ on a

$$d(I_1 \cap I_2) = d(I_1) \cup d(I_2)$$

et si $\tilde{\Omega}$ est un ouvert d'holomorphie, $H^i(\tilde{\Omega} \cap d(I), \mathcal{O}) = 0 \quad i > 0$. On en conclut que dans ces conditions la suite

$$0 \to C_{\Omega \times (I_1 \cap I_2)} \to C_{\Omega \times I_1} \oplus C_{\Omega \times I_2} \to C_{\Omega \times (I_1 \cup I_2)} \to 0$$

est exacte.

Cela nous permet de poser, si $I_1 \in CP$, $I_2 \in CP$

$$C_{\Omega\times(I_1 \cup I_2)} = \frac{C_{\Omega\times I_1} \oplus C_{\Omega\times I_2}}{C_{\Omega\times(I_1 \cap I_2)}} .$$

On définira de même $C_{\Omega\times I}$ si I est réunion finie d'éléments de CP.

Nous dirons qu'un ouvert de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ est élémentaire s'il est de la forme $\Omega \times \omega$ où $\bar{\omega} \in CP$ et $\partial\omega$ est réunion finie d'éléments de CP. De tels ouverts forment une base de la topologie de $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ et l'on définit un préfaisceau de cette base en posant :

$$C(\Omega\times \omega) = \frac{C_{\Omega\times\bar{\omega}}}{C_{\Omega\times\partial\omega}} .$$

<u>Définition</u> : Le faisceau C est le faisceau associé au préfaisceau

$$\Omega\times\omega \to C(\Omega\times\omega)$$

défini sur les ouverts élémentaires.

<u>Théorème 2</u> (Sato [9], Morimoto [7], Kashiwabara) :

1) Le faisceau C est flasque.
2) Si $\Omega\times\omega$ est élémentaire

$$\Gamma(\Omega\times\omega, C) = C(\Omega\times\omega) .$$

3) Si I est convexe propre fermé

$$\Gamma_{\Omega\times I}(\Omega\times S^{n-1}, C) = \varinjlim_{\tilde{\Omega}\supset\Omega} \frac{H^0(\tilde{\Omega}\cap d(I), \mathcal{O})}{H^0(\tilde{\Omega}, \mathcal{O})} .$$

§ 5. VALEURS AU BORD DES SECTIONS DE C.

Soit $S^{n-1} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ un recouvrement fini de S^{n-1} par des parties convexes fermées propres.

Soient $f_\alpha \in H^0(\tilde{\Omega} \cap d(I_\alpha), \mathcal{O})$ et $\dot{f}_\alpha \in \Gamma_{\Omega \times I_\alpha}(\Omega \times S^{n-1}, C)$ son image dans le faisceau C. Supposons que

$$\sum_\alpha \dot{f}_\alpha = 0 \quad (\text{dans } \Gamma(\Omega \times S^{n-1}, C)) \ .$$

Posons

$$T_\alpha = b(f_\alpha)$$

$$T = \sum_\alpha T_\alpha .$$

Pour tout $\eta \in S^{n-1}$ il existe des parties $(I_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ convexes fermées en nombre fini, des fonction $g_{\alpha,\beta} \in H^0(\tilde{\Omega}' \cap d(I_{\alpha,\beta}), \mathcal{O})$ telles que :

$$\eta \notin I_{\alpha,\beta} \quad \forall \alpha, \beta$$

$$f_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha,\beta}$$

ceci d'après la construction du faisceau C.

Donc pour tout $\eta \in S^{n-1}$, T peut être obtenue comme valeur au bord de fonctions holomorphes dans des tubes $\Omega \times i\Gamma$ contenus dans le demi-espace $<\mathrm{Im}\, z, \eta> < 0$. Cela entraîne que T est analytique sur Ω (c'est une conséquence du théorème du Edge of the Wedge).

Soit maintenant $\dot{f} \in \Gamma(\Omega \times S^{n-1}, C)$. Comme le faisceau C est flasque il existe une décomposition

$$\dot{f} = \sum_\alpha \dot{f}_\alpha \qquad \dot{f}_\alpha \in \Gamma_{\Omega \times I_\alpha}(\Omega \times S^{n-1}, C) \ .$$

On pose

$$b(f) = \sum_\alpha b(f_\alpha) \ [\mathcal{a}(\Omega)] \ .$$

Théorème 3 : L'application b :

$$\Gamma(\Omega \times S^{n-1}, C) \to B/\mathcal{A}(\Omega)$$

est un isomorphisme.

Ce théorème résulte immédiatement du théorème 1.

§ 6. FORMULE DE CAUCHY-FANTAPPIE.

Soit $\eta \in S^{n-1}$. La fonction

$$z \to \frac{1}{<z\ ,\ \eta>^n}$$

est holomorphe dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid <\mathrm{Im}\, z\ ,\eta>>0\}$.

Soit ω la forme différentielle sur S^{n-1} :

$$\omega(\eta) = \frac{(n-1)!}{(-2i\pi)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j\, \eta_j\, d\,\eta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\,\eta_j} \wedge \cdots \wedge d\,\eta_n\ .$$

Théorème 4 : Soit $S^{n-1} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ un recouvrement fini de S^{n-1} par des parties convexes fermées propres telles que $I_\alpha \cap I_\beta$ soit de mesure nulle pour $\alpha \neq \beta$.
Soit

$$g_\alpha = \int_{I_\alpha} \frac{\omega(\eta)}{<z\ ,\ \eta>^n}\ .$$

Alors $g_\alpha \in H^0(d(I_\alpha), \mathcal{O})$ et

$$\sum_\alpha b(g_\alpha) = \delta$$

(δ : masse de Dirac à l'origine dans $\mathbb{R}^n$).

Démonstration : Soient A et ε deux nombres positifs.
Soient

$$\omega_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{C}^n \mid |x| < A,\ |y| < \varepsilon\}$$

$$\Sigma_\varepsilon^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^n \times S^{n-1} \mid |x| = A,\ |y| < \varepsilon,\ z = \frac{x}{|x|}\}$$

$$\Sigma_\varepsilon^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^n \times S^{n-1} \mid |x| < A,\ |y| = \varepsilon,\ z = \frac{y}{|y|}\}$$

$$\Sigma_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon^1 \cup \Sigma_\varepsilon^2 .$$

La variété Σ_ε est isomorphe à $\partial\omega_\varepsilon - \partial\partial\omega_\varepsilon$.

Soit $\pi(z) = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. Il résulte de la formule de Cauchy-Fantappié [3] que si f est holomorphe au voisinage de $\bar{\omega}_\varepsilon$ on a :

$$f(0) = \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{f(z)}{\langle z , \eta \rangle^n} \omega(\eta) \wedge \pi(z) .$$

Faisons tendre ε vers 0 dans cette formule :

$$f(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \leq A} f(x) \int_{S^{n-1}} \frac{\omega(\eta)}{(\langle x, \eta \rangle + i\varepsilon)^n} .$$

Soit

$$g_\alpha(x,\varepsilon) = \int_{I_\alpha} \frac{\omega(\eta)}{(\langle x, \eta \rangle + i\varepsilon)^n} .$$

Il est facile de voir que $g_\alpha(x,\varepsilon)$ a une limite T_α dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ quand ε tend vers 0. On en déduit

$$\delta = \sum_\alpha T_\alpha .$$

Soit $g_\alpha(z) = \int_{I_\alpha} \frac{\omega(\eta)}{\langle z, \eta \rangle^n}$ et soit Γ_α un cône convexe ouvert qui coupe S^{n-1} suivant une partie relativement compacte de $d(I_\alpha)$. Il est clair que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, g_\alpha(x,\varepsilon)\, dx = \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta\in\Gamma_\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, g_\alpha(z)\, dx \quad .$$

Cela entraîne donc

$$\sum_\alpha b(g_\alpha) = \delta \quad .$$

<u>Corollaire</u> : Soit $u \in \mathcal{Q}'(\mathbb{R}^n)$. Soit $S^{n-1} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ un recouvrement de S^{n-1} vérifiant les hypothèses du théorème 4.
Posons

$$u_\alpha(z) = \int_{I_\alpha} \left(u * \frac{1}{<z,\eta>^n}\right) \omega(\eta) \quad .$$

Alors $u_\alpha \in H^0(d(I_\alpha),\mathcal{O})$ et $\sum_\alpha b(u_\alpha) = u$.

.../...

§ 7. REPRESENTATION DU FAISCEAU C.

On désigne par D^+ l'ouvert de $\mathbb{C}^n \times S^{n-1}$ défini par

$$D^+ = \{z,\eta \mid \langle \operatorname{Im} z,\eta \rangle > o\}$$

On désigne encore par $\mathcal{O}$ le faisceau sur $\mathbb{C}^n \times S^{n-1}$ des fonctions holomorphes des variables de $\mathbb{C}^n$, constantes des variables de S^{n-1}.
On désigne par $\mathcal{O}_a^p$ le faisceau sur $\mathbb{C}^n \times S^{n-1}$ des formes différentielles de degré p sur S^{n-1} à coefficients analytiques sur $\mathbb{C}^n \times S^{n-1}$, holomorphes des variables complexes.
On a alors la suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{C}^n \times S^{n-1}$.

$$o \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_a^1 \underset{d}{\to} \cdots \to \mathcal{O}_a^{n-1} \to o$$

où d désigne la différentiation extérieure sur S^{n-1}. Si ω est un ouvert convexe de S^{n-1} tel que $\overline{\omega}$ soit propre on pose :

$$K(\Omega \times \omega) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \tilde{\Omega} \supset \Omega}} \frac{H^o(\tilde{\Omega} \times \omega \cap D^+, \mathcal{O}_a^{n-1})}{dH^o(\tilde{\Omega} \times \omega \cap D^+, \mathcal{O}_a^{n-2})}$$

et on désigne par K le faisceau sur $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ associé au préfaisceau

$$\Omega \times \omega \to K(\Omega \times \omega)$$

ainsi défini sur la base des ouverts de la forme $\Omega \times \omega$, ω convexe, $\overline{\omega}$ propre.

Théorème 5 : (à démontrer)

- Le faisceau K est flasque
- Si ω est convexe, $\overline{\omega}$ propre :

$$\Gamma\ (\Omega \times \omega, K) = K\ (\Omega \times \omega)$$

On définit alors un morphisme Σ de K dans C de la manière suivante : Soit $\dot{f} \in K\ (\Omega \times \omega)$, $f \in H^0(\tilde{\Omega} \times \omega \cap D^+, \mathcal{O}_a^{n-1})$ un représentant de $\dot{f}$. Soit ω' un ouvert convexe de S^{n-1} avec $\omega' \subset\subset \omega$. On pose :

$$(\Sigma\ (\dot{f}\ ))\ |\ \omega' = (\int_{\omega'} f(z,\eta))\ |\ \omega'$$

Le deuxième membre a bien un sens dans $\Gamma\ (\Omega \times \omega', C)$ puisque

$$\int_{\omega'} f(z,\eta) \in H^0(d(\omega') \cap \tilde{\Omega}, \mathcal{O})$$

s'envoie dans $\Gamma_{\Omega \times \overline{\omega'}}\ (\Omega \times S^{n-1}, C)$. Soit ω'' un ouvert convexe de S^{n-1} tel que $\omega'' \subset \omega'$. Il faut vérifier que si $\eta \in \omega''$,

$$\int_{\omega' - \omega''} f\ (z,\eta) \in H^0(d(\omega') \cap \tilde{\Omega}, \mathcal{O})$$

est nul au voisinage de η dans C. Pour cela considérons un recouvrement fini de $\omega'-\omega''$ par des parties $(I\alpha)_\alpha$ dont l'enveloppe convexe ne rencontre pas η. On a :

$$\int_{\omega'-\omega''} \cdots = \sum_\alpha \int_{I\alpha \cap (\omega'-\omega'')} \cdots \qquad \text{et } \eta \notin \operatorname{supp}_C \int_{I\alpha \cap (\omega'-\omega'')} f\ (z,\eta)$$

De même si $f\ (z,\eta) = dg(z,\eta)$ où $g\ (z,\eta) \in H^0(d\ (\omega) \cap \tilde{\Omega}, \mathcal{O}_a^{n-2})$, et si ω' est contenu dans ω a un bord de classe C^1, il résulte de la formule de Stokes que

$$\int_{\omega'} f\ (z,\eta) = \int_{\partial\omega'} g\ (z,\eta)$$

et un raisonnement analogue au précédent montre que l'image de f dans C est nulle au voisinage de η, si $\eta \in \omega'$. Le morphisme Σ est donc bien défini.

Théorème 6 : Le morphisme Σ : $K \to C$

est un isomorphisme

Corollaire : Soit I une partie convexe fermée propre de S^{n-1}, d'intérieur non vide. Soit $f \in H^{o}(d\ (I) \cap \tilde{\Omega}, \mathcal{O})$. Il existe $\tilde{\Omega}'$ voisinage de Ω, $g\ (z,\eta) \in H^{o}(\tilde{\Omega}' \times I \cap D^{+}, \mathcal{O}_{a}^{n-1})$ tels que

$$f\ (z) = \int_{I} g(z,\eta)$$

ESQUISSE DE DEMONSTRATION DU THEOREME 6.

Soit β l'application $\quad \mathcal{A}'(\mathbb{R}^{n}) \to \Gamma\ (\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1}, K)$

$$u \to \left(u * \frac{1}{<z,\eta>^{n}}\right)\ \omega\ (\eta)$$

On vérifie que si u est analytique sur un ouvert Ω' de $\mathbb{R}^{n}$, B(u) est nul sur $\Omega' \times S^{n-1}$.

Désignons par $(B/\mathcal{A})_{*}(\mathbb{R}^{n})$ le quotient par $\mathcal{A}\ (\mathbb{R}^{n})$ de l'espace des hyperfonctions sur $\mathbb{R}^{n}$ analytiques en dehors d'un compact et par $K_{*}(\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1})$ (resp. $C_{*}(\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1})$) l'espace des sections à support compact de K (resp. C) sur $\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1}$. L'application β se prolonge en une application de $(B/\mathcal{A})_{*}(\mathbb{R}^{n})$ dans $K_{*}(\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1})$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K_{*}(\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1}) \arrow[rr, "\Sigma"'] & & C_{*}(\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1}) \arrow[dl, "b"] \\
& (B/\mathcal{A})_{*}(\mathbb{R}^{n}) \arrow[ul, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il suffit alors de vérifier que $\beta \circ b$ diminue les supports dans $\mathbb{R}^{n} \times S^{n-1}$, afin de le prolonger en un morphisme de C dans K, inverse de Σ.

§ 8. SOLUTION ELEMENTAIRE.

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit ω un ouvert de S^{n-1} tel que

$$P_m(x,\eta) \neq 0 \quad (x,\eta) \in \Omega \times \omega$$

Soit $\tilde{\Omega}$ un voisinage complexe de Ω sur lequel les coefficients de P sont holomorphes et $P(z,D_z)$ le complexifié de P sur $\tilde{\Omega}$. L'opérateur P définit naturellement un morphisme de C dans C ou de K dans K sur $\Omega \times S^{n-1}$, puisqu'il opère sur les fonctions holomorphes. Nous allons construire un inverse de P au dessus de $\Omega \times \omega$.
Soit $u(z,\eta,p)$ la "solution unitaire du problème de Cauchy".

$$P(z,D_z)\, u(z,\eta,p) = 1 \qquad\qquad u(z,\eta,p) = 0\,(|<z,\eta> - p|^m)$$

u est holomorphe au voisinage de $<z,\eta> = p$ (et ce voisinage est "uniforme" en η) et dépend analytiquement de (z,η,p).

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im} <z,\eta>$ $\quad \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re} <z,\eta>$ $\quad \alpha$ "proche" de $<z,\eta>$

Posons :

$$v_\alpha(z,\eta,p) = \int_\alpha^{<z,\eta>} \frac{u(z,\eta,t)}{(t-p)^{n+1}}\, dt$$

Pour α fixé v_α est holomorphe dans l'ouvert $< \operatorname{Im} z,\eta > -p < o$ au voisinage de $<z,\eta> = p$.
Si α' est choisi comme α on a :

$$v_\alpha - v_{\alpha'} = \int_{\alpha'}^{\alpha} \frac{u(z,\eta,t)}{(t-p)^{n+1}}\, dt$$

et cette fonction est holomorphe au voisinage de $<z.\eta> = p$.
Enfin

$$P(z,D_z)\, v_\alpha(z,\eta,p) = \int_\alpha^{<z,\eta>} P(z,D_z) \frac{u(z,\eta,t)}{(t-p)^{n+1}}\, dt = -\frac{1}{n} \frac{1}{(<z,\eta>-p)^n}$$

Ceci parce que $u(z,\eta,t)$ s'annule à l'ordre m sur $<z,\eta> = p$.

Posons

$$E_\alpha(z,z',\eta) = -\, n\, v_\alpha(z,\eta,<z',\eta>)\ \omega(\eta)$$

Soit

$$\Delta^a = \{x,x',\eta,\eta' \in \mathbb{R}^{2n}\times S^{2n-1} \mid x = x', \eta = -\eta'\}$$

L'image de E_α par l'application Σ peut être considérée comme un élément de $\Gamma_{\Delta^a}(\Omega \times \Omega \times \omega \times \omega, C)$ (en identifiant $\omega \times \omega$ à son image dans S^{2n-1}).
Soit E cet élément, qui ne dépend pas de α.
M. Sato interprète alors les éléments de $\Gamma_{\Delta^a}(\Omega \times \Omega \times \omega \times \omega, C)$ comme les opérateurs pseudo-différentiels sur $\Gamma(\Omega \times \omega, C)$, et E est alors un inverse à droite de P puisque

$$P(z,D_z)\ E_\alpha(z,z',\eta) = \frac{\omega(\eta)}{<z-z',\eta>^n}$$

d'où

$$P(x,D_x)\ E = \delta\ (x-x')$$

en désignant encore par δ l'image de la masse de Dirac dans $\Gamma(\mathbb{R}^n\times S^{n-1}, C)$.
On construit de même E^* inverse à droite de l'adjoint P^* de P, ce qui par transposition nous donne un inverse à gauche de P. En conclusion :

Théorème 7 : [9]

Si $P_m\ (x,\eta) \neq 0$ sur $\Omega \times \omega$, il existe E et E' appartenant à

$$\Gamma_{\Delta^a}(\Omega \times \Omega \times \omega \times \omega, C)$$

tels que

$$P\ E = E'\ P = \text{Id sur } \Omega \times \omega$$

Corollaire 1 : Soit $\Phi_p = \{x, \eta \in \Omega \times S^{n-1} ; p_m(x, \eta) = 0\}$.

Alors P est un isomorphisme de C au dessus de $\Omega \times S^{n-1} - \Phi_p$.

Corollaire 2 : Supposons P elliptique sur Ω. Alors P est un isomorphisme de $B/_{\Omega}$ au dessus de Ω.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Hormander : Uniqueness theorem and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, preprint.

[2] M. Kashiwabara . T. Kawaï : The sheaf of co-spherical pseudo-differential operators and their calculations, a paraître aux Proceedings of japan academy.

[3] J. Leray : Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, Bull. Soc. Math. France 87 1959 p 81-180.

[4] A. Martineau : Les hyperfonctions de M. Sato, Séminaire Bourbaki, 13e année, 1960-61, n°214

[5] A. Martineau : Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes, Proceedings of the International Summer Institute 1964

[6] A. Martineau : Théorèmes sur le prolongement analytique du type "Edge of the Wedge", Séminaire Bourbaki, 20e année 1967-68, n°340

[7] M. Morimoto : Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect 1, 17.1970 p 215-239.

[8] M. Sato : Theory of hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokio. Sect 1. 8, 1959-60 p 139-193 et p 398-437.

[9] M. Sato : Hyperfonctions and partial differential equations, Congrès Int. Math. Nice 1970, (et communications personnelles)

[10] P. Schapira : Théorie des hyperfonctions, lecture notes in Math. Springer 126, 1970.