Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Robert D. Macpherson

Les classes caractéristiques et le théorème de Riemann-Roch pour les variétés singulières

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A1_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 1, 5 p.

21, 28 octobre et 4 novembre 1974

LES CLASSES CARACTÉRISTIQUES ET LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH POUR LES VARIÉTÉS SINGULIÈRES

par Robert D. MACPHERSON

Plusieurs travaux récents ont pour but de trouver les bonnes généralisations aux variétés singulières des classes caractéristiques classiques des variétés lisses.

Nous décrirons ici la classe de Chern pour les variétés algébriques complexes [4] et la classe de Todd pour les variétés projectives [1].

Nous ne parlerons pas (puisque ces théories sont de nature topologique) de la classe de Whitney pour un espace d'Euler mod 2 [5], ni de la classe L de Hirzebruch pour les espaces orientés qui sont stratifiés par strates de dimension paire [3].

Dans toutes ces théories, on voit que les classes caractéristiques d'un espace se trouvent dans l'homologie de l'espace. Ce fait est surprenant car l'on sait bien que les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel ont leurs valeurs dans la cohomologie de la base : elles satisfont à une naturalité des foncteurs contravariants.

Pour un espace lisse, nous définirons ses classes caractéristiques comme étant les duales de Poincaré des classes caractéristiques correspondantes de l'espace fibré tangent. Mais si l'espace en question n'est pas lisse, il peut arriver que ses classes caractéristiques ne soient pas même dans l'image de l'application de dualité de Poincaré :

$$H^*(X) \xrightarrow{\cap [X]} H_*(X)$$

(où $[X]$ est la classe d'homologie fondamentale de X ; $[X]$ existe pour tous les espaces des théories précédemment citées, bien que $\cap [X]$ ne soit en général pas un isomorphisme). On peut prendre, pour homologie de la variété X, le groupe de Chow de X des cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle [2].

La propriété la plus importante des classes de Chern et de Todd est leur naturalité covariante. Pour la classe de Todd, cette naturalité est donnée par le théorème de Grothendieck-Riemann-Ruch généralisé aux variétés singulières. Pour la classe de Chern, cette naturalité n'était jusqu'ici pas connue, même dans le cas des variétés lisses.

1. La classe de Chern.

Il nous faut d'abord définir un foncteur $\underset{\sim}{F}$ de la catégorie des variétés algébriques complexes, avec comme morphismes les applications propres, dans la catégorie des groupes abéliens. La valeur $\underset{\sim}{F}(X)$ du foncteur $\underset{\sim}{F}$ en X est le groupe de toutes les fonctions constructibles $\alpha : X \longrightarrow \underset{\sim}{Z}$, à valeurs dans les entiers. (Une partie d'une variété est dite constructible si elle peut être définie, à partir de sous-variétés algébriques, par un nombre fini d'unions, d'intersections et de passages au complément. Une fonction α , définie sur X , à valeurs entières, est dite constructible si, pour tout $i \in \underset{\sim}{Z}$, l'image réciproque $\alpha^{-1}(i)$ est un sous-ensemble constructible.)

Si V est une sous-variété de X , on note 1_V sa fonction caractéristique (Elle prend la valeur 1 sur V et 0 ailleurs). Les fonctions caractéristiques des sous-variétés de X forment une base du groupe $\underset{\sim}{F}(X)$. La valeur f_* de $\underset{\sim}{F}$ en f , où f est une application propre de X dans Y , est définie par l'équation :

$$f_*(1_V)(p) = \chi(f^{-1}(p) \cap V)$$

où $p \in Y$ et où χ désigne la caractéristique d'Euler topologique.

Le théorème suivant a été conjecturé par P. DELIGNE et A. GROTHENDIECK :

THÉORÈME 1 [4]. - <u>Pour toute variété</u> X , <u>il existe une, et une seule transformation,</u>

$$c_* : \underset{\sim}{F}(X) \longrightarrow H_*(X ; \underset{\sim}{Z})$$

<u>ayant les propriétés suivantes</u> :

1° $c_*(\alpha + \beta) = c_*(\alpha) + c_*(\beta)$ (<u>additivité</u>)

2° $f_* \, c_* \, \alpha = c_* \, f_* \, \alpha$ (<u>naturalité</u>)

3° <u>Si</u> X <u>est lisse</u>, $c_*(1_X) = c(TX) \cap [X]$ (<u>normalisation</u>).

Ici $c(TX) = 1 + c_1(TX) + c_2(TX) + \ldots$ est la classe totale de Chern classique du fibré tangent à X .

<u>Définition</u>. - Si X est une variété, $c_*(1_X)$ sera appelée la classe de Chern d'homologie de X ; on la notera aussi $c_*(X)$.

Cette classe de Chern d'homologie concerne la propriété suivante de la classe de Chern duale classique : son degré en dimension zéro est la caractéristique d'Euler de X . En effet, si l'application f envoie X sur le point p , on a

$$\begin{aligned} \deg_0 c_*(X) &= \deg_0 f_* \, c_*(1_X) = \deg_0 c_* \, f_*(1_X) \\ &= \deg_0 c_*(\chi(X).1_p) = \chi(X) \deg_0 c_*(1_p) = \chi(X) \, \chi(p) = \chi(X) . \end{aligned}$$

2. La classe de Todd et le théorème de Riemann-Roch.

Soit K_0 le foncteur covariant de Grothendieck, défini sur la catégorie des variétés projectives sur un corps algébriquement clos, avec comme morphismes les applications propres, à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens ; si X est une variété, $K_0(X)$ est le groupe de Grothendieck des faisceaux algébriques cohérents sur X ; si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre, et si $\mathcal{S}$ est un faisceau sur X, alors :

$$f_!(\mathcal{S}) = \sum (-1)^i R^i f_* \mathcal{S} .$$

On peut dire que le foncteur K_0 est au genre arithmétique $\chi(X ; \mathcal{O}_X)$ (i. e. à la caractéristique d'Euler de la cohomologie de X à coefficient dans le faisceau $\mathcal{O}_X$) ce que le foncteur $\underset{\sim}{F}$ du §1 est à la caractéristique d'Euler topologique.

THÉORÈME 2 [1] (Théorème de Riemann-Roch pour les variétés éventuellement singulières). – Pour toute variété X, il existe une, et une seule transformation,

$$\tau_* : K_0(X) \longrightarrow H_*(X ; \underset{\sim}{Q})$$

ayant les propriétés suivantes :

1° $\tau_*(a + b) = \tau_*(a) + \tau_*(b)$ (additivité)

2° $f_* \tau_*(a) = \tau_* f_!(a)$ (naturalité)

3° Si E est un fibré vectoriel, $\tau_*(E \otimes a) = \mathrm{ch}(E) \cap \tau_*(a)$ (propriété de module)

4° Si X est lisse, $\tau_*(\mathcal{O}_X) = \mathrm{td}(TX) \cap [X]$ (normalisation).

Ici, $\mathrm{td}(TX) = 1 + \mathrm{td}_1(TX) + \mathrm{td}_2(TX) + \ldots$ est la classe de Todd totale classique du fibré tangent de X.

Définition. – Pour toute variété X, on appelle $\tau_*(\mathcal{O}_X)$ la classe de Todd d'homologie de X ; on la note aussi $\tau_*(X)$.

Comme pour la classe duale de Todd classique, on a $\deg_0 \tau_*(X) = \chi(X ; \mathcal{O}_X)$; la démonstration est la même que celle de la propriété analogue pour la classe de Chern (§1). De plus, comme dans le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch, on peut exprimer $\chi(X ; E)$ pour n'importe quel fibré vectoriel E à l'aide de $\tau_*(X)$:

$$\chi(X ; E) = \deg_0 \mathrm{ch}\, E \cap \tau_*(X) .$$

3. Remarques sur les démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Supposant l'existence des transformations c_* et τ_*, leur unicité est facile à démontrer : toute fonction constructible $\alpha : Y \longrightarrow \underset{\sim}{Z}$ peut être exprimée par :

$$\alpha = f_* 1_X ,$$

où f est une application d'une variété lisse X (résolution des singularités) dans Y ; on déduit alors des propriétés 2° et 3° du théorème 1 que

$$c_*(\alpha) = f_* c(TX) \cap [X] .$$

Une idée analogue permet de montrer l'unicité de τ_*.

Une autre démonstration, valable aussi en caractéristique positive, n'utilise la propriété 4 que pour X réduit à un point.

La partie difficile des démonstrations est la construction des transformations c_* et τ_* satisfaisant aux propriétés des théorèmes 1 et 2. Dans les deux cas, on plonge X dans une variété lisse, et on fait la construction par des opérations géométriques dans des fibrés grassmanniens.

Nous décrirons la construction de τ_* après une digression sur la localisation des classes caractéristiques.

4. Localisation des classes caractéristiques.

Une classe caractéristique est dite additive (resp. multiplicative) si

$$cl(E \oplus F) = cl(E) \cup cl(F) \quad (\text{resp. } cl(E \oplus F) = cl(E)\, cl(F)) .$$

Si un faisceau $\mathbb{S}$ sur Y admet une résolution par des faisceaux localement libres (i. e. des fibrés vectoriels) :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} E_1 \xrightarrow{d_1} E_0 \longrightarrow \quad \longrightarrow 0$$

et si cl est additive (resp. multiplicative), alors $cl(\mathbb{S})$ est bien définie et est donnée par

$$cl(\mathbb{S}) = \Sigma(-1)^i\, cl(E_i) \quad (\text{resp. } cl(\mathbb{S}) = \frac{\prod cl(E_{2i})}{\prod cl(E_{2i+1})}) .$$

Soit X , $X \subset Y$, le support de $\mathbb{S}$. On aimerait localiser $cl(\mathbb{S})$ à X , c'est-à-dire écrire $cl(\mathbb{S})$ comme la valeur en une classe d'homologie dans X de l'homomorphisme de Gysin (Umkehrhomomorphismus).

Soit, donc, $\mathbb{S}$ un faisceau sur Y , admettant une résolution par des E_i comme en $(*)$; soit $X \overset{i}{\subset} Y$ le support de $\mathbb{S}$, et soit i_* l'homomorphisme de Gysin. Notons e_i le rang de E_i , $G_{e_i}(E_i \oplus E_{i-1})$ le fibré grassmannien des sous-espaces de rang e_i dans $E_i \oplus E_{i-1}$, et $G = \prod_X G_{e_i}(E_i \oplus E_{i-1})$. Pour tout $\lambda \in \underset{\sim}{A}^1$, $\mathbb{S}_\lambda$ est la section de G qui est donnée dans le facteur $G_{e_i}(E_i \oplus E_{i-1})$ par le graphe de λd_i . Complétons la famille des cycles d'image $\mathbb{S}_\lambda$ paramétrée par $\underset{\sim}{A}^1$ par une famille plate paramétrée par $\underset{\sim}{P}^1$. Le cycle Z_∞ est celui qui est paramétré par $\infty \in \underset{\sim}{P}^1$ (où $\infty = \underset{\sim}{P}^1 - \underset{\sim}{A}^1$) ; Z est la somme de toutes les composantes irréductibles de Z_∞ (avec leurs multiplicités) ayant leur projection dans X . Appelons π la projection de Z dans X . Notons $\xi = \Sigma(-1)^i\, \xi^i$, où ξ^i est le fibré vectoriel canonique sur $G_{e_i}(E_i \oplus E_{i-1})$.

THÉORÈME 3 [1]. - Soit cl une classe caractéristique, additive ou multiplicative ; alors :

$$cl(\mathbb{S}) = i_*[\pi_*(cl(\xi) \cap Z)] .$$

Si $X \overset{i}{\subset} Y$ est une intersection localement complète et si $\mathbb{S} = i_*(E)$, où E est localement libre sur X , on peut calculer explicitement Z et ξ . Le théorème 3 implique alors le théorème de Riemann-Roch sans dénominateur, ce qui donne une formule pour $c(i_*(E))$.

5. Construction de τ_* .

Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau sur X ; pour construire $\tau_* \mathfrak{F}$, nous plongeons X dans une variété lisse $X \overset{i}{\subset} Y$. On peut alors trouver une résolution de $\mathcal{S} = i_* \mathfrak{F}$ par des fibrés vectoriels, et l'on peut donc construire Z et ξ comme au §4.

THÉORÈME 4. - On a

$$\tau_*(\mathfrak{F}) = i^* \operatorname{td}(TX) \cap \pi_*(\operatorname{ch} \xi \cap Z) .$$

Pour démontrer les théorèmes 2 et 4, on montre que l'expression de droite du théorème 4 est indépendante du choix du plongement de X et du choix de la résolution de $\mathcal{S}$. Puis l'on prouve que cette expression satisfait aux propriétés 1-4 du théorème 2. C'est assez long et compliqué [1].

On peut cependant facilement motiver l'expression de droite du théorème 4 à partir du théorème 3 de la manière suivante : Les deux membres de l'égalité du théorème 4 ont même valeur en Y . Les conditions du théorème 2 nous donnent

$$i_*[\tau_* \mathfrak{F}] = \tau_* i_! \mathfrak{F} = \tau_* \mathcal{S} = \operatorname{ch}(\mathcal{S}) \cap \tau_* \mathcal{O}_Y = \operatorname{ch} \mathcal{S} \cap \operatorname{td}(TY) \cap [Y]$$

mais, d'après le théorème 3, et puisque ch est additive, on a :

$$i_*[i^* \operatorname{td} TY \cap \pi_*(\operatorname{ch} \xi \cap Z)] = \operatorname{td} TY \cap i_*[\pi_*(\operatorname{ch} \xi \cap Z)] = \operatorname{td} TY \cap \operatorname{ch} \mathcal{S} \cap [Y] .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUM (P.), FULTON (W.) and MACPHERSON (R.). - Riemann Roch for singular algebraic varieties. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 45).

[2] FULTON (W.). - Rational equivalence on singular varieties. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 45).

[3] GORESKY (R. M.) and MACPHERSON (R.). - Intersection homology theory (à paraître).

[4] MACPHERSON (R.). - Chern classes for singular algebraic varieties, Annals of Math., t. 100, 1974, p. 423-432.

[5] SULLIVAN (D.). - Combinatorial invariants of analytic spaces, "Proceedings of Liverpool singularities symposium, I", p. 165-168. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 192).

(Texte reçu le 8 septembre 1975)

Robert D. MACPHERSON
Department of Mathematics
Brown University
PROVIDENCE, R. I. (Etats-Unis)