Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jan R. Strooker

Le groupe fondamental des groupes linéaires GL_n

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, nº 1 (1974-1975), exp. nº 17, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A11_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 17, 2 p.

14 avril 1975

LE GROUPE FONDAMENTAL DES GROUPES LINÉAIRES GL_n

par Jan R. STROOKER

Soit X un espace topologique avec point distingué $*$. Un chemin sur X est une application continue de $I = [0, 1]$ dans X telle que $f(0) = *$. Ces chemins constituent un espace EX avec point distingué $f \equiv *$, qui admet la topologie "compact-ouvert". L'application $f \longmapsto f(1)$ qui projette chaque chemin sur son extrémité détermine une application continue $\varepsilon : EX \longrightarrow X$ d'espaces pointés. De plus, vu l'homéomorphisme $\{I^2 \dashrightarrow X\} \simeq E^2 X$, il existe une application

$$\mu : EX \longrightarrow E^2 X ,$$

définie par $\mu f(x, y) = f(xy)$. Alors les (E, ε, μ) ont les propriétés d'un cotriple dans la catégorie $\underset{\sim}{Top}_*$ des espaces topologiques pointés.

Pour faire le lien avec notre sujet, soit k un anneau commutatif unitaire. L'analogue en algèbre de la catégorie $\underset{\sim}{Top}_*$ étant celle des k-algèbres unitaires augmentées, nous travaillons dans une catégorie équivalente, celle des algèbres non nécessairement unitaires sur k, soient $\underset{\sim}{Alg}_k$. Considérons un cotriple (E, ε, μ) dans $\underset{\sim}{Alg}_k$, et un foncteur F de $\underset{\sim}{Alg}_k$ dans la catégorie des groupes $\underset{\sim}{Gr}$. Dans un mémoire avec O. E. VILLAMAYOR (*), nous considérons le foncteur $FE : \underset{\sim}{Alg}_k \to \underset{\sim}{Gr}$ comme les chemins sur F (ayant leur origine au point distingué 1), et

$$F\varepsilon : FE \longrightarrow F$$

comme l'application qui applique chaque chemin sur son extrimité ; $\operatorname{Im} F\varepsilon$ est "la composante connexe" de F. Ceci nous permet de procéder comme en théorie de l'homotopie et de parler de relèvement de chemins. Ainsi on est amené à définir des revêtements $\lambda : H \longrightarrow F$ de F qui recouvrent sa composante connexe. Chaque foncteur possède un revêtement universel $\hat{F}$, et l'on définit le groupe fondamental (comme on le fait pour les groupes topologiques) par la suite exacte de foncteurs

$$1 \longrightarrow \pi_1 F \longrightarrow \hat{F} \xrightarrow{\lambda} F \longrightarrow \pi_0 F \longrightarrow 1 .$$

Bien entendu, $\pi_0 \hat{F} = \pi_1 \hat{F} = 1$, i. e. $\hat{F}$ est simplement connexe.

Ces notions s'appliquent notamment aux schémas en groupe affines sur k, dont le domaine de définition est élargi à $\underset{\sim}{Alg}_k$. Pour le groupe linéaire stable

$$GL = \lim_{n\to\infty} GL_n ,$$

nous avons démontré que si $k = \underset{\sim}{Z}$ et (E, ε, μ) est le cotriple libre dans $\underset{\sim}{Alg}_{\underset{\sim}{Z}}$, alors $\pi_1 GL$ n'est autre que le foncteur K_2 de Milnor.

(*) STROOKER (J. R.) and VILLAMAYOR (O. E.). - Building K-theories, Advances in Math., t. 15, 1975, p. 232-268.

D'autre part, on sait que chaque groupe (abstrait) G parfait, c'est-à-dire avec $G = [G , G]$ ou $H_1(G , \mathbb{Z}) = 0$, admet une extension centrale qui domine toutes les autres. Cette extension $\varphi : \tilde{G} \to G$ a la propriété que $H_1(\tilde{G} , \mathbb{Z}) = H_2(\tilde{G} , \mathbb{Z}) = 0$, et que $\operatorname{Ker} \varphi = H_2(G , \mathbb{Z})$. Ce noyau s'appelle le multiplicateur de Schur du groupe G :

$$1 \to H_2(G , \mathbb{Z}) \to \tilde{G} \xrightarrow{\varphi} G \to 1$$

est l'extension centrale universelle de G .

Les groupes fondamentaux et les multiplicateurs de Schur se ressemblent donc sous leur aspect formel. Voici un résultat qui précise comment ils sont liés pour les groupes linéaires GL_n . Soient k un corps, et (E , ε , μ) le cotriple libre dans $\underset{\sim}{\mathrm{Alg}}_k$.

THÉORÈME. - Soit A une k-algèbre unitaire et semi-locale. La composante connexe de $GL_n(A)$ est alors son sous-groupe élémentaire $EL_n(A)$; de plus

$$\pi_1 \, GL_n(A) = H_2(EL_n(A) , \mathbb{Z})$$

sauf pour $k = F_2$, F_4 si $n \geq 3$; et $k \neq F_2 , F_3 , F_4 , F_5 , F_9$, $\pi_1 \, GL_n(A)$ est une extension de $H_2(EL_n(A) , \mathbb{Z})$ par un groupe assez grand si $n = 2$.

La démonstration, qui ne pourra être esquissée qu'en partie, repose sur des méthodes et des théorèmes dus à STEINBERG, MATSUMOTO, STEIN, DENNIS, BAK, COHN, SILVESTER et le conférencier. Ces résultats permettent d'identifier, et parfois de présenter, certains groupes qu'on rencontre en cours de route.

Vue la nature assez délicate de ces raisonnements, le rapport entre les groupes fondamentaux et les multiplicateurs de Schur mérite d'être étudié par la suite pour les autres groupes de Chevalley.

(Texte reçu le 14 avril 1975)

Jan R. STROOKER
Mathematisch Instituut
der Rijkuniversiteit
6 Budapestlaan
UTRECHT (Pays-Bas)