Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Karl H. Hofmann

Théorie directe des groupes de Lie, IV

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, nº 1 (1973-1974), exp. nº 4, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_1_A4_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
27e année, 1973/74, nº 4, 15 p.

8 avril 1974

THEORIE DIRECTE DES GROUPES DE LIE, IV.

par Karl H. HOFMANN

Sommaire

1. Les préalables utilisés. Autres définitions.

On a vu, dans le cours de ces exposés, que la théorie totale de base des groupes de Lie peut se développer à partir de notre définition, sans recours à la théorie des variétés analytiques ou différentiables et à la théorie des équations différentielles ; les méthodes qu'on a utilisées sont celles de l'algèbre et de la topologie. Pour être précis, l'analyse se présente ici d'abord à propos des séries formelles (Chap. I, §1-3) et de leur convergence dans les espaces de Banach (Chap. II, §1) ; ensuite on trouve l'utilisation de théorèmes élémentaires comme le théorème de l'inversion locale des fonctions différentiables (théorème des fonctions implicites), si on insiste, on démontre les théorèmes puissants (II.22 et III.91 ((1) $\Leftrightarrow$ (3)), III.90), ce qui n'est pas absolument nécessaire pour la théorie de base, bien que le théorème fondamental du groupe de commutateurs (III.93) en dimensions finies repose, moyennant sa version locale (II.28), sur II.23. D'ailleurs, on a eu besoin de l'analyse spectrale des algèbres de Banach commutatives pour la démonstration du théorème III.75 sur la relation entre les automorphismes et les dérivations ; pour des versions moins précises et générales (notamment pour le cas des dimensions finies) des méthodes plus simples et directes suffisent. Dans le cas des dimensions infinies, on a appliqué librement des résultats fondamentaux de la théorie des espaces de Banach comme, par exemple, le théorème des applications ouvertes (III.38) ; dans le cas des dimensions finies, ce n'est jamais nécessaire.

Les méthodes provenant de l'algèbre pure, préalables pour notre présentation, ont été explicitées en détail, et complètement, dans le chapitre I (§1-4, 6) afin qu'on puisse voir précisément ce qu'il faut pour formuler la définition principale des groupes de Lie (III.14), à savoir, l'appareil de la formule de Campbell-Hausdorff. Pour conclure que chaque algèbre de Lie de dimension finie est globale (cf. III.53), nous avons cité, sans démonstration, le théorème d'Ado (III.96) pour lequel nous ne pouvons pas offrir une démonstration alternative dans le cadre de ces exposés (voir

BOURBAKI [L-B], chap. 1).

Après l'examen des outils, passons à la comparaison de notre présentation avec des définitions plus traditionnelles. Si $\mathbf{A}$ est une catégorie avec des produits finis et un objet 1 (tel que $\mathbf{A}(X\ ,\ 1)$ et $\mathbf{A}(1\ ,\ X)$ possèdent précisément un élément), nous disons que G est un *objet groupe* dans $\mathbf{A}$, si l'objet G de $\mathbf{A}$ est muni d'un morphisme dit *multiplication* $G \times G \to G$, un morphisme $1 \to G$ dit *élément-identité*, et un morphisme $G \to G$ dit *inversion* tels que tous les diagrammes commutent qui caractérisent, si $\mathbf{A} = \mathbf{Ens}$ = la catégorie des ensembles, les groupes dans le sens conventionnel. Par exemple, si $\mathbf{A} = \mathbf{Top}$ est la catégorie des espaces topologiques (et des fonctions continues), alors un objet-groupe dans $\mathbf{Top}$ est exactement un groupe topologique. En ces termes, si $\mathbf{An}$ est la catégorie des variétés analytiques et des applications holomorphes, on peut exprimer la définition la plus universellement utilisée comme suit.

IV.1. DÉFINITION. - *Un groupe de Lie est un objet de groupe dans* $\mathbf{An}$.

On trouve que $\mathbf{An}$ est fréquemment remplacée par la catégorie $\mathbf{C}^{\infty}$ des variétés et des applications (infiniment) différentiables ; dans pratiquement le même cadre, on peut utiliser en fait la catégorie C^2 des variétés et fonctions au moins deux fois différentiables. La différence par rapport à la définition IV.1 est d'un caractère technique, et non pas fondamentale. Il faut ajouter quelques raisonnements de réduction au cas de IV.1.

Après le livre de PONTRJAGIN, très répandu [L-P], c'était le traité de CHEVALLEY [L-C2] qui, paru peu après la guerre, a synthétisé le développement antérieur et donné le premier texte moderne sur la base de la définition IV.1. Sauf des exceptions isolées (COHN [L-C3], NOMIZU [L-N]), il se produit une pose dans la littérature des textes sur le sujet, jusqu'aux années soixante ; notons deux exceptions importantes : Premièrement, le séminaire Sophus Lie [L-S3] qui est précurseur (et probablement source influente) d'une foule de livres, monographies, "lecture notes", sur les groupes de Lie qui devaient suivre depuis environ 1962 (L-F1, L-T1, L-H2, L-H6, L-S4, L-M2, L-H4, L-T, L-H7, L-F2, L-A, pour noter seulement la génération des textes des années soixante).

Deuxièmement, en 1955, on a la parution du livre abondamment cité de MONTGOMERY et ZIPPIN [L-M1], qui présentait, pour la première fois, sous la forme d'un livre, la solution finale d'un problème célèbre de HILBERT : le n° 5 dans sa liste des problèmes fameux. Cette solution, due aux efforts joints de GLEASON, MONTGOMERY et YAMABE après 1950, permet en fait de donner, pour les groupes de Lie de dimension finie, une définition "simple" qui n'utilise que des termes purement topologiques.

IV.2. DÉFINITION. - *Un groupe de Lie (de dimension finie) est un objet-groupe dans la catégorie des variétés topologiques de dimension finie (et des fonctions continues).*

Rappelons ici, sous une forme concentrée, notre définition afin de comparer convenablement, dans le paragraphe suivant, les trois définitions données.

IV.3. DÉFINITION (Voir III.14). - Un groupe de Lie est un groupe topologique séparé muni d'une fonction exponentielle qui satisfait localement l'équation fonctionnelle de Campbell et Hausdorff.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES PURES
INSTITUT FOURIER

2. Comparaison.

Nous avons déjà formulé dans l'introduction des "critères d'économie" que l'on pourrait postuler pour n'importe quelle théorie pour mesurer l'efficacité des définitions sur lesquelles elle repose (cf. introduction, p. 1-02, 1°-5°). Nous allons discuter ces critères vis-à-vis des trois définitions de la section précédente.

Le haut degré de complication du concept même de groupe de Lie est mis en évidence par le fait que, pour chaque définition, au moins un des critères est en défaut. On peut subordonner les groupes linéaires à toutes les définitions IV.1-2-3 avec facilité (pour IV.3, voir III.15 mais aussi III.77, ce qui est un peu plus profond) ; en fait, quelques auteurs restreignent leur traitement des groupes de Lie à la classe des groupes de Lie linéaires (FREUDENTHAL [L-F2]). En tout cas, le critère 3° est bien satisfait pour toutes les définitions également. Le critère 2° est optimalement vérifié dans la définition IV.2, parce que les concepts dont on a besoin, dans la formulation, sont véritablement simples : la notion d'espace euclidien et la notion de groupe topologique. Cependant, le critère 1° est tellement violé que la définition IV.2 ne peut pas être réellement considérée comme une alternative pour la fin de l'enseignement des groupes de Lie. Le chemin qui mène de cette définition à la théorie riche de la structure des groupes de Lie est long et ardu. C'est enfin une conjecture de HILBERT, exprimée au début du siècle, qui fut enfin résolue cinquante ans plus tard ; la démonstration originale apparemment n'était pas susceptible d'une amélioration ou simplification (MONTGOMERY-ZIPPIN [L-M1], KAPLANSKY [L-K]). De plus, les méthodes de démonstration ne contribuent pas à la théorie des groupes de Lie. Donc la réduction de cette définition au point de départ conventionnel est le sujet d'un cours différent qui curieusement, a peu à voir avec la théorie de Lie propre. En outre, la définition IV.2 exclut le cas des dimensions infinies, désavantage qui contredit le critère 4°.

La définition courante IV.1 n'est bien compatible ni avec le critère 1°, ni avec le critère 2°. La définition d'une variété analytique est elle-même non triviale, notamment si elle est exprimée, comme il convient, dans le langage des faisceaux ; ce langage a été indiqué par CHEVALLEY [L-C2], et complètement développé par HOCHSCHILD [L-H4] pour formuler la définition IV.1. La définition faite, il faut encore travailler avant de pouvoir exploiter la riche structure donnée par la relation donnée par la fonction exponentielle entre les algèbres et les groupes de Lie ; en fait, il faut étudier des champs de vecteurs, établir l'existence des intégrales en résolvant des systèmes d'équations différentielles, déterminer leur dépendance de paramètres et valeurs initiales, etc. Quand tout cela est achevé, et quand on développe la théorie de base, comme il était indiqué dans ces exposés, on note qu'on ne se réfère plus à cet appareil analytique. (Evidemment, cela change si on cherche la connexion de la théorie avec la géométrie différentielle, par exemple.) C'était la motivation d'introduire la définition IV.3 qui rend inutile le besoin d'un appareil qui n'intervient plus dans le développement de la théorie de base, en tant que théorie de structure d'une classe de groupes topologiques. On a ici en outre l'avantage de pouvoir traiter, sans aucune modification, les groupes de Birkhoff (groupes de Lie de dimension infinie, [A-B]), et le passage au cas des autres corps de base (comme par exemple le corps complexe ou les corps p-adiques) est possible sans efforts extraordinaires.

Cependant, on se souvient que la définition IV.3 demande tout d'abord la compréhension de la nature algébrique de la fonction exponentielle jusqu'à la formule de Campbell-Hausdorff dans la forme donnée par DYNKIN (I.14) ; mais accentuons ici le fait que ces informations sont fréquemment et essentiellement utilisées dans la théorie suivante. Ce qui est nécessaire pour préparer la théorie formelle de la fonction exponentielle est entièrement présenté dans le chapitre I.

Notons aussi que le critère 5° n'est pas un invariant : cela dépend du programme des études qui varie selon le système, le pays et même la formation individuelle. Les programmes d'études aux Etats-Unis (graduate programs) comportent normalement au moins des cours d'algèbre (basique, linéaire et multilinéaire, catégories de base), de la topologie générale, topologie algébrique, analyse fonctionnelle, donc contiennent tout ce qu'il faut pour réaliser un cours sur la théorie de Lie du type proposé ici. Il en est de même en France, au niveau du troisième cycle.

Enfin, notons que les trois définitions données plus haut sont équivalentes, au moins dans le cas des dimensions finies. Dans ce cas, IV.1 $\Rightarrow$ IV.2 $\Leftarrow$ IV.3 sont des implications immédiates. L'implication IV.1 $\Rightarrow$ IV.3 est donnée dans la plupart des textes sous une forme ou une autre (cf. BOURBAKI [L-B], chap. 2 et 3, HAUSNER-SCHWARZ [L-H1], HOCHSCHILD [L-H4]), et cette implication ne dépend pas de la dimention. L'implication IV.2 $\Rightarrow$ IV.1, est la solution du problème n° 5 de Hilbert qu'on trouve dans MONTGOMERY-ZIPPIN [L-M1] et, présentation plus récente, dans KAPLANSKY [L-K]. Finalement, il faut observer que IV.3 $\Rightarrow$ IV.1 (sans restriction des dimensions). Indiquons la démonstration : On prend des linéarisations (B , V) et (C , V) d'un groupe de Lie connexe G (au sens de IV.3) tel que $C * C \subseteq B$. On considère la famille $\{gV \; ; \; g \in G\}$ et la famille des fonctions $\{f_g \; ; \; g \in G\}$,

$$f_g : gV \to C \subseteq L(G) \ , \ f_g(x) = \log g^{-1} x \ .$$

Soit $D = gV \cap hV$; $D \neq \emptyset$, $g^{-1} h \in V$, donc $t = \log g^{-1} h \in C$. Soit

$$\varphi_{gh} : f_h(D) \to f_g(D)$$

la fonction définie par $\varphi_{gh}(x) = t * x$. Alors φ_{gh} est une fonction bijective donnée dans B par une série absolument convergente de termes qui sont multilinéaires continus dans x, et satisfait $\varphi_{gh} f_h = f_g$. Donc la collection des $\{gV , f_g ; g \in G\}$ est un système de coordonnées locales d'une structure analytique sur G. D'après la définition, il est clair que toutes les translations à gauche $x \longmapsto gx$ de G sont des isomorphismes de la structure analytique. On démontre que toutes les translations à droite par des éléments assez petits, donc (par composition) par des éléments arbitraires, sont des isomorphismes de la structure analytique ; puis, la même conclusion vaut pour les automorphismes intérieurs. On utilise ces informations pour démontrer l'analyticité de la multiplication et l'inversion, en utilisant la connaissance de l'analycité de ces opérations près de l'identité.

3. Commentaire bibliographique.

Il n'y a, dans ces exposés, que des résultats bien connus et standard. Signalons-en ici quelques autres qui sont probablement moins familiers ou nouveaux. En même temps, nous indiquons où on peut trouver, dans la littérature, des compléments.

Chapitre I : On trouvera, dans le même séminaire, des exposés par VIENNOT [A-V4], qui donnent des informations sur les algèbres libres qu'on utilise pour démontrer la formule de Campbell-Hausdorff. Pour une discussion alternative de la théorie algébrique de la formule de Campbell-Hausdorff, voir CARTIER [A-C1]. On trouve plus d'information sur les coefficients de la formule de Campbell-Hausdorff dans l'article de GOLDBERG [A-G1]. MICHEL a fait des calculs récents sur ordinateur (cf. [A-M2] ils paraissent être différents de ceux de HAWTHORNE [A-H2]. Dans ce livre de HAUSNER et SCHWARTZ [L-H1], on donne une formule présentée sous forme d'une intégrale :

$$(1) \qquad x * y = x + \int_0^1 p(e^{\mathrm{ad}\, x}\, e^{t\ \mathrm{ad}\, y})\, y\, dt\ , \qquad p(z) = (z-1)^{-1} z \log z\ .$$

(Voir loc. cit. p. 65). En ce qui concerne des démonstrations du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on trouve la plus courante dans BOURBAKI [L-B] (Chap. 1), JACOBSON [L-J] ; CARTIER a démontré comment on peut dériver le résultat de la formule de Campbell-Hausdorff [A-C1], et WALLACE donne une démonstration différente et directe du résultat, dans la forme I.31, qui fournit, en conjonction avec I.29, la forme usuelle [A-W]. Les méthodes du §6 (I.32-I.36) sont nouvelles ; le théorème I.36 est nouveau, le corollaire I.37 est probablement connu.

Chapitre II : Les calculs de II.3 sont pour la plupart bien familiers ; la définition du rayon de convergence proposée ici n'est pas conventionnelle, donc on ne fait pas normalement le calcul pour démontrer que $(1/2) \log 2$ est le rayon précis dans notre sens. Pour les résultats plus précis sur la convergence de la série de Campbell-Hausdorff, voir l'exposé de MICHEL [A-M2] ; on trouve des renseignements proches aussi dans LAZARD-TITS [A-L3]. Le théorème II.15 et son corollaire sont particuliers à notre présentation. Les résultats du §4 sont plus difficiles que les autres. C'est un théorème de Yamabe qui est à leur origine [A-Y] ; la première démonstration complète, et compréhensible, n'était publiée que récemment par GOTO [A-G3] ; la version présentée ici est une variante locale. L'exemple II.11 est probablement connu ; il est très utile pour illustrer les complications qui peuvent se présenter dans le cas des dimensions infinies.

Chapitre III : Le théorème III.9 qui joue un rôle important n'est généralement pas connu ; par exemple, la démonstration simple du théorème III.10, qui en résulte est nouvelle. Je ne sais pas ce qui est généralement connu du théorème de l'application ouverte pour des groupes de Lie connexes III.37-40 ; je n'ai pas encore vu l'exemple III.40, qui illustre bien les limitations du théorème III.38 et du théorème III.79 qui est nouveau. Le traitement des sous-groupes analytiques III.43-48 est caractéristique pour notre présentation, en produisant des sous-groupes analytiques "sans analyse" (i. e. sans intégrer des champs de vecteurs, etc.).

Le théorème central ici est le III.43, qui repose sur III.9 ; le théorème III.46 montre encore une fois le rôle joué par la condition de la séparabilité. Le concept d'une algèbre de Dynkin globale est introduit dans III.53 ; c'est une algèbre de Dynkin L qui est l'algèbre de Lie $L(G)$ d'un groupe de Lie. La question de la nature des algèbres globales est touchée plusieurs fois dans la suite du chapitre (III.54, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 78, 85, et remarques qui suivent, 97). On trouvera des caractérisations cohomologiques des algèbres locales dans les travaux de VAN EST, et VAN EST et KORTENHAGEN [A-V1, A-V2] ; SWIERCZKOWSKI a démontré que chaque algèbre de Dynkin résoluble est globale [A-S2]. La construction des algèbres enveloppantes $U(L , \nu)$ a été proposée récemment par VASILESCU [A-V3]. Le théorème III.75, qui donne des relations entre les automorphismes et les dérivations d'un espace de Banach avec multiplication, est nouveau, et complète un théorème de Bourbaki ([L-B], Chap. 3, §6, n° 9, Cor. 2). Dans le contexte de I.32-36 et III.72-76, je remercie J. DIXMIER pour ses remarques.

4. Développements ultérieurs, généralisations.

C'est un autre critère pour la "praticabilité" de la définition IV.3, que nous venons de proposer, de voir en quelle mesure on peut la prendre comme un point de départ pour les théories généralisées, qui sont désirables du point de vue des applications. J'en envisage deux : Premièrement les groupes de Lie généralisés, deuxièmement les demi-groupes de Lie.

(A) Groupes de Lie généralisés. - La motivation de généraliser le concept d'un groupe de Lie est ici fondée sur le désir de traiter un groupe localement compact quelconque globalement dans le cadre d'une théorie de Lie. Il y a de tels efforts dans le travail de LASHOF [A-L1], dans mes notes [L-H7] et, plus récemment, dans l'article de CHEN et YOH [A-C2]. L'idée est la suivante :

Quel que soit le groupe topologique G , on peut lui associer l'espace

$$L_{cc}(G) = \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{R} , G)$$

de tous les sous-groupes à un paramètre, muni de la topologie de la convergence compact ; le monoïde multiplicatif $\underset{\sim}{R}$ opère sur $L_{cc}(G)$ continument de façon que

$(r.f)(s) = f(rs)$ et que $0.f = 0$ où on note par 0 le sous-groupe à un paramètre dégénéré (constant). Evidemment, L_{cc} est un foncteur de la catégorie des groupes topologiques dans la catégorie des $\underset{\sim}{R}$-espaces munis d'un point de base (On pourrait les appeler des "espaces avec une multiplication scalaire"). Si on appelle $f \longmapsto f(1) : L_{cc}(G) \to G$ la fonction exponentielle $\exp_G$ de G, alors $\exp_G$ est continue ; en fait, la fonction $(f, r) \longmapsto f(r) : L_{cc}(G) \times \underset{\sim}{R} \to G$ même est continue. Il y a maintenant deux possibilités d'introduire une structure additionnelle dans $L_{cc}(G)$:

(L1) Avec sa structure de topologie et de multiplication scalaire, $L_{cc}(G)$ est en outre une algèbre réelle de Lie, topologique, localement convexe, dont la topologie est définie par une famille $\{\| \|_j : j \in J\}$ des semi-normes telles que la série de Campbell-Hausdorff converge absolument par rapport à $\| \|_j$, $j \in J$, si on substitue aux variables des éléments f, g avec $\|f\|_j$, $\|g\|_j < \rho_j$ où $\{\rho_j : j \in J\}$ est une famille de nombres positifs convenablement choisis ; en outre, pour ces f, g, on a $(f * g)(t) = f(t)\, g(t)$ quel que soit $t \in [-1, 1]$.

(L2) Quels que soient $f, g \in L_{cc}(G)$, les limites suivantes existent

$$\text{(i)} \quad (f + g)(t) = \lim(f(\tfrac{t}{n})\, g(\tfrac{t}{n}))^n, \qquad t \in \underset{\sim}{R},$$

$$\text{(ii)} \quad [f, g](t) = \lim(f(\tfrac{t}{n})\, g(\tfrac{t}{n})\, f(\tfrac{-t}{n})\, g(\tfrac{-t}{n}))^{n^2}, \qquad t \in \underset{\sim}{R};$$

ils définissent sur $L_{cc}(G)$ la structure d'une algèbre de Lie.

Comme dans II.6, on voit que (L1) entraîne (L2) ; je ne sais rien de la réciproque, même si on suppose, en addition à (L2), que la topologie sur $L_{cc}(G)$ est localement convexe et que l'addition et la multiplication sont continues. Selon des préférences individuelles, on peut appeler un groupe topologique un <u>groupe de Lie généralisé</u> s'il satisfait à (L1) ou à (L2) (ou même à une variante convenable de (L1) et (L2)). On peut montrer que tout groupe localement compact vérifie (L1) (CHEN-YOH [A-C2], LASHOF [A-L1], HOFMANN [L-H7] (pour G compact)), et on peut développer une théorie de propriétés fonctorielles de L_{cc} (CHEN-YOH [A-C2]). En ce qui concerne (L2) (i), (ii), pour des groupes à un paramètre fortement continus d'isométries sur un espace de Banach, on trouve des renseignements dans un travail de GOLDSTEIN [A-G2].

(B) <u>Demi-groupes de Lie</u>. - La discipline des demi-groupes topologiques est plus récente que celle des groupes topologiques ; on a appris que les demi-groupes topologiques ont des applications importantes dans l'analyse. La structure des demi-groupes topologiques est généralement beaucoup plus compliquée que celle des groupes, comme il apparaît même dans le cas compact (HOFMANN-MOSTERT [L-H8]). On a souvent posé la question d'une théorie des demi-groupes de Lie ; on a même donné des applications dans ce cadre ([L-H8], p. 92 et p. 206), et on connait des travaux plus ou moins isolés. Mais il peut être curieux qu'il n'existe pas une théorie systématique et générale des demi-groupes de Lie. Pour la situation commutative, on a au moins l'étude de KEIMEL [A-K2], mais, pour la situation non commutative, il manque notamment une théorie locale ; j'ai suggéré des tentatives dans HAUSDORFF [A-H1].

IV.4. DÉFINITION. - Une demi-sous-algèbre de Dynkin D dans une algèbre de Dynkin L est un cône convexe fermé tel qu'il existe un groupe local B associé à L (cf. 2-05) avec

$$(D \cap B) * (D \cap B) \subseteq D .$$

On rappelle qu'un cône convexe est un sous-ensemble qui est stable pour l'addition et la multiplication par des scalaires non négatifs.

IV.5. DÉFINITION. - Soit L une algèbre de Dynkin et B un groupe local associé. Un sous-ensemble $S \subseteq B$ est appelé un sous-monoïde local de B si

(i) $0 \in S$,

(ii) $(S * S) \cap B \subseteq S$.

On dit que S est divisible, si

(iii) $\frac{1}{n} S \subseteq S$ quel que soit $n = 1 , 2 , 3 , \dots$.

La démonstration de II.8 montre que, pour un sous-monoïde local S de B , les conditions II.8, (i'), (ii)-(v), sont équivalentes. On voit comme, dans II.9, que l'ensemble L_S des $x \in L$, satisfaisant les conditions de II.8, est fermé, stable pour la multiplication par les scalaires non négatifs, et stable pour l'addition. Si S est divisible et fermé dans B , on a évidemment $S \subseteq L_S$. Donc nous avons le théorème suivant (qui améliore le résultat de HAUSDORFF [A-H1]).

IV.6. THÉORÈME. - Soient L une algèbre de Dynkin, B un groupe local associé, et S un sous-monoïde local de B . Alors les conditions suivantes sont équivalentes quel que soit $x \in L$:

(i) $\mathbb{R}^+ x \cap B = \mathbb{R}^+ x \cap \overline{S} \cap B$,

(ii) $(1/n)x \in \overline{S}$ pour n assez grand,

(iii) Il y a une suite $x_n \in S$ telle que $x = \lim n x_n$,

(iv) [resp. (v)] Il y a une suite $x_n \in S$ [resp. $x_n \in \overline{S}$] , telle que $\lim x_n = 0$, et une suite $m_n \in \mathbb{N}$, telle que $x = \lim m_n x_n$.

En outre, l'ensemble L_S des $x \in L$, qui vérifient ces conditions, est un cône convexe fermé dans L . Enfin S est fermé (dans B) et divisible si, et seulement si, $S = L_S \cap B$; en ce cas, L_S est une demi-sous-algèbre de Dynkin de L .

Il n'est pas clair (ni même dans le cas des groupes locaux) que $L_S \neq \{0\}$ même si S est non dégénéré (cf. II.11). Mais, dans le cas localement compact, on a des informations plus précises, même pour les monoïdes locaux.

IV.7. PROPOSITION. - Dans la situation de IV.6, on a $L_S \neq \{0\}$, si S est localement compact et 0 n'est pas isolé dans S . Réciproquement, si 0 est isolé dans S , alors $L_S = \{0\}$.

La démonstration utilise un raisonnement analogue à celui de II.17 ; on peut aussi se référer aux théorèmes d'existence de demi-groupes à un paramètre (cf. HOFMANN-MOSTERT [L-H8]). La réciproque est triviale d'après IV.6.

On peut alors généraliser la définition des groupes de Lie comme suit.

IV.8. DÉFINITION. - Un monoïde de Lie S est un monoïde topologique tel qu'il existe une algèbre de Dynkin L , une demi-sous-algèbre de Dynkin fermée D et une fonction $\exp : D \to S$ satisfaisant les conditions suivantes :

(1) Il existe un groupe local B associé à L et un voisinage ouvert U de 1 dans S tels que $\exp|(B \cap D) : B \cap D \to U$ est un homéomorphisme et

$$\exp(x * y) = \exp x \exp y$$

quels que soient $x , y \in B \cap D$.

(2) $\exp(s + t) x = \exp sx \exp ty$ quels que soient $s , t \in \underset{\sim}{R}^+$, $x \in D$.

On remarque que le sous-groupe G des éléments inversibles d'un monoïde de Lie est un groupe de Lie tel que $L(G) = D \cap - D$ et $\exp_G = \exp|(D \cap - D)$.

Si D est une demi-sous-algèbre de Dynkin dans une algèbre de Dynkin L , alors $D - D$ est une sous-algèbre de Lie de L , et la fermeture $(D - D)^-$ est donc une sous-algèbre de Dynkin. Si $(D - D)^- = D - D$, alors cette algèbre de Dynkin est uniquement déterminée par D , et D est uniquement donné par la définition IV.8. Dans ce cas, on peut écrire $D = D(G)$ et $D - D = L(G)$. Si $\dim D < \infty$, on se trouve dans ces circonstances. Dans les dimensions finies, la fonction

$$S \longmapsto (D(S) , L(S))$$

se prolonge donc en un foncteur de la catégorie des monoïdes de Lie de dimension finie dans la catégorie des paires (D , L) , où D est une demi-sous-algèbre de Dynkin de l'algèbre de Lie de dimension finie L ; les morphismes

$$f : (D_1 , L_1) \to (D_2 , L_2)$$

sont évidemment les morphismes $f : L_1 \to L_2$ d'algèbres de Lie tels que $f(D_1) \subseteq D_2$. On n'a pas d'idées précises sur le comportement fonctoriel de la prescription $S \longmapsto (D(S) , L(S))$ sans restriction de la dimension. Donnons quelques exemples.

IV.8. EXEMPLES.

(1) Soit T le monoïde localement compact de toutes les matrices

$$N(a , b , c) = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad a , b , c \in \underset{\sim}{R}^+ .$$

Posons $E_3 = N(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$. T est un monoïde localement compact de Lie, $L(S)$ étant l'algèbre de Heisenberg des matrices $N(a\ ,\ b\ ,\ c) - E_3$, $a\ ,\ b\ ,\ c \in \underset{\sim}{R}$, et $D(S)$ la demi-sous-algèbre des matrices $N(a\ ,\ b\ ,\ c) - E_3$ avec $a\ ,\ b\ ,\ c \in \underset{\sim}{R}^+$; la fonction exponentielle est donnée par la série exponentielle. Notons que T est contractile.

Si on identifie, dans T par une relation R d'équivalence, deux matrices $M(a_j\ ,\ b_j\ ,\ c_j))$, $j = 1\ ,\ 2$, si et seulement si $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ et $c_1 - c_2 \in \underset{\sim}{Z}$, alors R est une congruence, et T/R est un monoïde de Lie localement compact avec $L(T) = L(T/R)$, $M(a\ ,\ b\ ,\ c) - E_3 \in D(T/R)$ si, et seulement si, $a\ ,\ b \in \underset{\sim}{R}^+$. Soit S la compactification de T/R par un seul point ∞ ; on peut prolonger la multiplication sur S en faisant de ∞ un élément zéro. Cela donne un monoïde de Lie S compact, contenant un exemplaire de T/R comme un voisinage ouvert de l'identité ; donc

$$L(S) = L(T/R) = L(T)\ ,\quad D(S) = D(T/R)\ .$$

(2) Soit $G = \underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{R}$ le groupe de Lie de toutes les paires $(c\ ,\ r) \in \underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{R}$ par rapport à la multiplication $(c\ ,\ r)(d\ ,\ s) = (c + e^{ir}\, d\ ,\ r + s)$. On peut montrer, par un calcul explicite, que les sous-groupes à un paramètre sont donnés par $t \longmapsto (tc\ ,\ 0)$, $c \in \underset{\sim}{C}$ et $t \longmapsto (e^{is}\, c - c\ ,\ rs)$, $c \in \underset{\sim}{C}$, $r \in \underset{\sim}{R}$, $r \neq 0$.

Soit T le sous-ensemble des $(c\ ,\ r)$ tels que $|c| \leqslant r$. Alors T est stable pour la multiplication, donc est un sous-monoïde localement compact sur un cône circulaire convexe dans $\underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{R}$. Un calcul direct montre que les points (r,r), $r \neq 0$, $r \in R^+$ ne sont contenus dans aucun sous-demi-groupe à un paramètre du demi-groupe T . Il en résulte que T n'est pas un monoïde de Lie, d'après IV.6 et 8. Par ailleurs, T est une variété (avec bord) telle que la multiplication est une fonction analytique. Notons encore que $L(G) = \underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{R}$, produit semi-direct des algèbres abéliennes telles que $(ad(0\ ,\ 1)(z\ ,\ 0) = (iz\ ,\ 0)$. Si B est un groupe local associé à $L(G)$ et $S \subseteq B$ est tel que $\exp S = T \cap \exp B$, alors S est un sous-monoïde local de B et $L_S = \{(c\ ,\ r) \mid |c| \leqslant r\}$.

Cet ensemble montre un des problèmes qui se posent automatiquement dans n'importe quelle définition des demi-groupes de Lie.

5. Problèmes.

Donnons ici une sélection des problèmes que nous avons rencontrés au cours de ces exposés.

IV.9. PROBLEMES.

(1) (cf. Remarques, qui suivent III.42) : Développer la théorie des groupes de Lie métriques et leurs algèbres de Lie-Banach.

(2) (cf. Exemple 40) : Dans quelle mesure est-ce que l'exemple III.40 est typique pour la pathologie qu'il illustre ? Si $f : G \longrightarrow H$ est un morphisme bijectif de

groupes de Lie connexes, le morphisme $L(f) : L(G) \to L(H)$ est-il nécessairement un plongement fermé ?

(3) (cf. III.62 et III.79) : Ce problème est une variante du problème (2) ci-dessus. Si on suppose que $f : G \to H$ est un morphisme surjectif de groupes de Lie connexes, et que $\pi_1(H)$ est dénombrable, est-ce que $L(f)$ est nécessairement surjectif ? (On a démontré dans III.79 qu'il a une image dense.)

(4) (cf. III.75) : Notre résultat sur la relation entre les automorphismes et les dérivations et celui de BOURBAKI (cf. loc. cit.) ne sont pas des généralisations l'un de l'autre ; pour chacun des deux résultats, il existe des situations qui tombent dans son domaine d'application, mais ne sont pas contenues dans celui de l'autre résultat. On se demande alors s'il existe un théorème qui généralise à la fois les deux.

(5) (cf. III.85) : Etudier la relation précise entre l'injectivité des morphismes $\lambda_{L,\nu} : L \to U(L , \nu)$ et la globalité de L (cf. III.53). Autrement dit, on cherche une version topologique du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Comme nous avons remarqué en suivant III.85, une telle variante doit être plus compliquée que la version discrète (I.29, I.31).

(6) (cf. IV, §4) : Continuer la théorie des groupes de Lie généralisés. On comprend bien le type de groupe de Lie généralisé représenté par les groupes localement compacts. Par contre, on ne comprend guère en quel sens on pourrait considérer par exemple les groupes unitaires de dimension infinie comme groupes de Lie généralisés relatifs à leur topologie forte (cf. GOLDSTEIN [A-G2]).

(7) (cf. IV.4-8) : Développer une théorie des demi-groupes de Lie selon les lignes indiquées dans IV.4-8 (ou, enfin, d'après une modification de la définition, si nécessaire). Il faut peut-être commencer par un effort pour classifier (ou au moins trouver des méthodes de construction générale) des demi-sous-algèbres des algèbres réelles de Lie de dimension finie qui appartiennent aux demi-groupes de Lie admettant une compactification par un élément-zéro. Comme le montre l'exemple des tores, il peut arriver que le demi-groupe engendré par une demi-algèbre ne soit plus représenté localement par la demi-algèbre donnée. Donc il faut prendre les groupes simplement connexes associés à l'algèbre de Lie donnée, et chercher si ce phénomène se présente aussi dans ce cas. De nombreuses questions sont à résoudre dans le contexte de ce problème général.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Mr Paul DUBREIL, qui m'a permis de présenter cette théorie dans le cadre de son séminaire, et qui m'a beaucoup aidé pour la rédaction française de ce texte. Mr Jacques DIXMIER a, par ses critiques dans le contexte des dérivations et automorphismes, contribué à cette partie du travail, et je l'en remercie. Mes remerciements vont également à Mr Gérard VIENNOT, qui a bien voulu m'indiquer quelques références. Enfin, je ne saurais oublier Mlle Lardeux et le secrétariat mathématique de l'Institut Henri Poincaré, qui ont eu la tâche

ingrate de dactylographier ces notes.

BIBLIOGRAPHIE

L = Ouvrages et Recueils (Séminaires, Lecture Notes).

[L-A] ADAMS (J. F.). - Lectures on Lie groups. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

[L-B] BOURBAKI (N.). - Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, Chap. 2-3, (1972) Chap. 4-6 (1968). - Paris, Hermann, 1960, 1972, 1968 (Act. scient. et ind., 1285, 1349, 1337 ; Bourbaki, 26, 37, 34).

[L-C1] CAMPBELL (J. H.). - Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups (Reprint of the 1903 edition). - New York, Chelsea publishing Company, 1966.

[L-C2] CHEVALLEY (C.). - Theory of Lie groups, I. - Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 8).

[L-C3] COHN (P. M.). - Lie groups. - Cambridge, the University Press, 1957 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical physics, 46).

[L-F1] FREUDENTHAL (H.). - Lie groups. - New Haven, Yale University, 1961 (Yale University Lecture Notes).

[L-F2] FREUDENTHAL (H.) and VRIES (H. de). - Linear Lie groups. - New York and London, Academic Press, 1969 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 35).

[L-F3] FRÖHLICH (A.). - Formal groups. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1968 (Lecture Notes in Mathematics, 74).

[L-H1] HAUSNER (M.) and SCHWARTZ (J. T.). - Lie groups, Lie algebras. - New York, London, Paris, Gordon and Breach, 1968 (Notes on Mathematics and its Applications).

[L-H2] HELGASON (S.). - Differential geometry and symmetric spaces. - New York, Academic Press, 1962 (Pures and applied Mathematics. Academic Press, 12).

[L-H3] HERMANN (R.). - Lie algebras and quantum mechanics. - New York, W. A. Benjamin, 1970 (Mathematics Lecture Note Series).

[L-H4] HOCHSCHILD (G.). - The structure of Lie groups. - San Francisco, Holden-Day, 1965 (Holden-Day Series Mathematics).

[L-H5] HOCHSCHILD (G.). - Introduction to affine algebraic groups. - San Francisco, Cambridge, London [etc.], Holden-Day, 1971.

[L-H6] HOFMANN (K. H.). - Einführung in die Theorie der Liegruppen, I, II. Vorlesungen an der Universität Tübingen, Tübingen, 1963/64.

[L-H7] HOFMANN (K. H.). - Introduction to the theory of compact groups. Part I : 1966/67. Part II : 1968/69. - New Orleans, Tulane University, Department of Mathematics.

[L-H8] HOFMANN (K. H.) and MOSTERT (P. S.). - Elements of compact semigroups. - Colombus, C. E. Merrill, Books, 1966.

[L-H9] HUMPHREYS (J. E.). - Introduction to Lie algebras and representation theory. - New York, Heidelberg, Springer-Verlag, 1972 (Graduate Texts in Mathematics, 9).

[L-J] JACOBSON (N.). - Lie algebras. - New York, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 10).

[L-K] KAPLANSKY (I.). - Lie algebras and locally compact groups, Chicago and London, University of Chicago Press, 1971 (Chicago Lectures in Mathematics).

[L-L] LIE (S.). - Theorie der Transformationsgruppen, I-III. - Leipzig, B. 6. Teubner, 1888, 1890, 1893 ; Reprinted New York, 1970.

[L-M1] MONTGOMERY (D.) and ZIPPIN (L.). - Topological transformation groups, 4th printing. - New York, Interscience Publishers, 1966 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 1).

[L-M2] MOSTOW (G. D.). - Lectures on Lie groups and Lie algebras. - New Heaven, Yale University, 1965 (Yale University Lecture Notes).

[L-N] NOMIZU (K.). - Lie groups and differential geometry. - Tokyo, The mathematical Society of Japan, 1956 (Publications of the mathematical Society of Japan, 2).

[L-P] PONTRJAGIN (L. S.). - Topological groups. 2nd edition. - New York, London, Paris, Gordon and Breach, 1966.

[L-S1] SAGLE (A. A.) and WALDE (R. E.). - ntroduction to Lie groups and Lie algebras. - New York, Academic Press, 1973 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 51).

[L-S2] SAMELSON (H.). - Notes on Lie algebras. - New York, Cincinnati, Toronto [etc.], Van Nostrand Reinhold Company, 1969 (Van Nostrand Reinhold mathematical Studies, 23).

[L-S3] Séminaire Sophus Lie, 1ere année, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, topologie des groupes de Lie. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955 (Ecole Normale Supérieure).

[L-S4] SERRE (J.-P.). - Lie algebras and Lie groups. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1965.

[L-S5] SERRE (J.-P.). - Algèbres de Lie semi-simples complexes. - New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1966.

[L-S6] STEWART (I.). - Lie algebras. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 127).

[L-T1] TITS (J.). - Liesche Gruppen und Algebren, Vorlesungen an der Universität Bonn, 1963/64.

[L-T2] TITS (J.). - Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 40).

[L-T3] TONDEUR (P.). - Introduction to Lie groups and transformation groups. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1965 (Lecture Notes in Mathematics, 7).

[L-W1] WALLACH (N. R.). - Harmonic analysis on homogeneous spaces. - New York, Dekker, 1973 (Pure and applied Mathematics, Dekker, 19).

[L-W2] WINTER (D. J.). - Abstract Lie algebras. - Cambridge, The MIT Press, 1972.

A = Articles.

[A-B] BIRKHOFF (G.). - Analytical groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 43, 1938, p. 61-101.

[A-C1] CARTIER (P.). - Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 241-249.

[A-C2] CHEN (S. S.) and YOH (R. W.). - The category of generalized Lie groups, Trans. Amer. math. Soc., 1974 (à paraître).

[A-D1] DYNKIN (E. B.). - Computation of the coefficients of the Campbell-Hausdorff formula, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 57, 1947, p. 323-326.

[A-D2] DYNKIN (E. B.). - On the representation of the series $\log(e^x e^y)$ for non-commutative x , y by commutators, Mat. Sbornik, t. 25, 1949, p. 155-162.

[A-D3] DYNKIN (E. B.). - Normed Lie algebras and analytic groups, "Lie groups", p. 470-534. - Providence, American mathematical Society, 1962 (Translations, Series 1, vol. 9) ; [en russe], Uspekhi mat. Nauk, t. 5, 1950, p. 135-186.

[A-G1] GOLDBERG (K.). - The formal power series for $\log e^x e^y$, Duke Math. J., t. 23, 1956, p. 13-21.

[A-G2] GOLDSTEIN (J. A.). - A Lie product formula for one parameter groups of isometries on Banach spaces, Math. Annalen, t. 186, 1970, p. 299-306.

[A-G3] GOTO (M.). - On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Proc. Amer. math. Soc., t. 20, 1969, p. 157-162.

[A-H1] HAUSDORFF (F.). - Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, Leipzig Berichte, Math. Phys. Kl., t. 58, 1906, p. 19-48.

[A-H2] HAWTHORNE (T.). - Computer calculation of the coefficients up to degree 9 of the Campbell-Hausdorff formula in the Dynkin form, Tulane Univ., 1973 (à paraître).

[A-H3] HOFMANN (K. H.). - Die Formel von Campbell-Hausdorff-Dynkin und die Definition Liescher Gruppen, "Theory of sets and topology, Volume in honour of Felix Hausdorff", p. 251-264. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972?

[A-H4] HOFMANN (K. H.). - Analytic groups without analysis, Proceedings of the Conference on topological groups and Lie groups [1974. Rome, Istituto di Alta Matematica] (à paraître).

[A-K1] KAPLANSKY (I.). - Infinite dimensional Lie algebras, Scripta Math., New York, t. 29, 1973, p. 237-241.

[A-K2] KEIMEL (K.). - Eine Exponentialfunktion für kompakte abelsche Halbgruppen, Math. Z., t. 96, 1967, p. 7-25.

[A-K3] KUIPER (N. H.). - The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, Topology, Oxford, t. 3, 1965, p. 19-30.

[A-L1] LASHOF (R. K.). - Lie algebras of locally compact groups, Pacific J. Math., t. 7, 1957, p. 1145-1162.

[A-L2] LAUGWITZ (D.). - Über unendliche kontinuierliche Gruppen, I., Math. Annalen, t. 130, 1955, p. 337-350 ; II., Bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Klasse, Sitzungsberichte, 1956, p. 261-286.

[A-L3] LAZARD (M.) et TITS (J.). - Domaines d'injectivité de l'application exponentielle, Topology, t. 4, 1966, p. 315-322.

[A-M1] MAISSEN (B.). - Lie Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume, Acta Math., Uppsala, t. 108, 1962, p. 229-269.

[A-M2] MICHEL (J.). - Rayons de convergence de la formule de Campbell-Hausdorff, Séminaire Dubreil : Algèbre, 27e année, 1973/74.

[A-M3] MILNOR (J. W.) and MOORE (J. C.). - On the structure of Hopf algebras, Annals of Math., Series 2, t. 81, 1965, p. 211-264.

[A-S1] SCHUE (J. R.). - Hilbert space methods in the theory of Lie algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 95, 1960, p. 69-80.

[A-S2] SWIERCZKOWSKI (S.). - Embedding theorems for local analytic groups, Acta Math., Uppsala, t. 114, 1965, p. 207-235.

[A-V1] VAN EST (W. T.). - Local and global groups, Indag. Math., Amsterdam, t. 24, 1962, p. 391-425.

[A-V2] VAN EST (W. T.) and KORTENHAGEN (T. J.). - Non-enlargible Lie algebras, Indag. Math., Amsterdam, t. 26, 1964, p. 15-31.

[A-V3] VASILESCU (F. H.). - Normed Lie algebras, Canadian J. Math., t. 24, 1972, p. 580-591.

[A-V4] VIENNOT (G.). - Factorisation des monoïdes libres et bases pour des algèbres de Lie libres, Séminaire Dubreil : Algèbre, 27e année, 1973/74.

[A-W] WALLACE (D.). - Permutation groupoids, Dissertation, Tulane Univ., 1974.

[A-Y] YAMABE (H.). - On an arcwise connected subgroup of a Lie group, Osaka Math. J., t. 2, 1950, p. 13-14.

(Texte reçu le 3 avril 1974)

Karl H. HOFMANN
Résidence de l'Ormaille
Pavillon 9
91440 BURES SUR YVETTE