PHILIPPE REYOY

Formes alternées et puissances divisées

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A8_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 8, 10 p.

12 mars 1973

FORMES ALTERNÉES ET PUISSANCES DIVISÉES

par Philippe REVOY

Soit A un anneau commutatif et unitaire ; si R est une matrice alternée d'ordre pair, le déterminant de R est le carré du pfaffien de R [4]. Nous nous proposons de replacer ce résultat dans un cadre plus général et d'en tirer certaines conséquences pour les formes alternées.

Tous les modules considérés sont unitaires ; si M est un A-module et $\Lambda(M)$ son algèbre extérieure, on notera $\Lambda'(M)$ la sous-algèbre commutative de $\Lambda(M)$, somme directe des $\Lambda^{2p}(M)$, $p \in \mathbb{N}$. Dans la première partie on montre qu'il existe sur $\Lambda'(M)$ une structure naturelle d'algèbres à puissances divisées ou PD-algèbre. On utilise cette construction ensuite pour définir des invariants d'une forme alternée, en particulier le pfaffien, sur un module projectif de type fini, et on donne quelques propriétés simples qui s'en déduisent.

1. Puissances divisées dans $\Lambda'(M)$.

1.1. - Rappelons [6] qu'une algèbre à puissances divisées S est une algèbre commutative prégraduée $S_0 \oplus S_+$, où S_0 est une sous-algèbre unitaire et S_+ un idéal muni d'applications $\gamma_n : S_+ \dashrightarrow S$, définies de la façon suivante :

(i) $\gamma_0(s) = 1$, $\gamma_1(s) = s$ et $\gamma_n(s) \in S_+$ $(n \geqslant 2,\ s \in S_+)$

(ii) $\gamma_n(st) = s^n \gamma_n(t)$ $(s \in S,\ t \in S_+,\ n \geqslant 0)$

(iii) $\gamma_n(s)\, \gamma_m(s) = C^m_{m+n}\, \gamma_{n+m}(s)$ $(s \in S_+,\ n \geqslant 0,\ m \geqslant 0)$

(iv) $\gamma_n(s + t) = \sum_{k=0}^n \gamma_k(s)\, \gamma_{n-k}(s)$ $(s,\ t \in S_+ ;\ n \geqslant 0)$

(v) $\gamma_p \circ \gamma_q(s) = (pq)!/(p!(q!)^p)\, \gamma_{pq}(s)$ $(s \in S_+,\ p,\ q \geqslant 0)$

Les applications γ_n constituent un système de puissances divisées sur S. On a aisément $s^n = n!\, \gamma_n(s)$ et donc, si S est une $\mathbb{Q}$-algèbre, il existe un système, et un seul, de puissances divisées sur S, défini par $\gamma_n(s) = s^n/n!$, $s \in S_+$, $n \geqslant 0$. Les PD-algèbres forment une catégorie, et le noyau d'un morphisme de PD-algèbres est un idéal $I = I_0 \oplus I_+$ tel que, si $s \in I_+$, $\gamma_n(s) \in I_+$ pour tout $n \geqslant 1$: un tel idéal sera appelé divisé.

1.2. - Si $(X_i)_{i\in I}$ est un ensemble d'indéterminées, on note $A\{X_i\}_{i\in I}$ le quotient de l'algèbre des polynômes $A[X_i]_{i\in I}$ par l'idéal engendré par les éléments X_i^2, prégraduée en prenant pour $A_+\{X_i\}$ l'idéal d'augmentation de $A\{X_i\}$ sur A.

LEMME. - *La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}\{X_i\}$ possède un système unique de puissances divisées.*

Remarquons que $\underset{\sim}{Z}\{X_i\}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\underset{\sim}{Q}\{X_i\}$ et que cette dernière possède un système unique de puissances divisées donné par $\gamma_n(s) = s^n/n!$. En vertu de [6] (§ 3. Prop. 1), il suffit de montrer que $\underset{\sim}{Z}\{X_i\}$ est une sous-PD-algèbre de $\underset{\sim}{Q}\{X_i\}$ et, pour cela, que $\gamma_n(X_i) \in \underset{\sim}{Z}\{X_i\}$ pour tout entier n. Or

$$(1)\qquad \gamma_n(X_i) = \frac{1}{n!} X_i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ X_i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

En conséquence, $\underset{\sim}{Z}\{X_i\}$ est une PD-algèbre, ce qui démontre le lemme, les puissances divisées y étant données par le système (1).

PROPOSITION 1. - <u>Sur l'algèbre prégraduée</u> $A\{X_i\}$, <u>il existe un système unique de puissances divisées.</u>

En effet, $A\{X_i\}$ est produit tensoriel des algèbres prégraduées A et $\underset{\sim}{Z}\{X_i\}$, la première étant prégraduée trivialement, i. e. $A_0 = A$ et $A_+ = 0$. La proposition est donc conséquence du théorème 3, p. 90, de [6], et du lemme 1.

1.3. - Soit M un A-module, et considérons la A-algèbre $A\{X_{x,y}\}$, $(x , y) \in M \times M$. Comme $(x \wedge y) \wedge (x \wedge y) = 0$ dans $\Lambda^\cdot(M)$, l'homomorphisme $u : A[X_{x,y}] \longrightarrow \Lambda^\cdot(M)$, défini par u, $(X_{x,y}) = x \wedge y$ induit un homomorphisme $\Phi : A\{X_{x,y}\} \longrightarrow \Lambda^\cdot(M)$ qui est surjectif et compatible avec les prégraduations. Soit alors J l'idéal de $A\{X_{x,y}\}$ engendré par les éléments

$$(2)\quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & X_{x+x',y} - X_{x,y} - X_{x',y} \\ \text{(ii)} & X_{\lambda x,y} - \lambda . X_{x,y} \\ \text{(iii)} & X_{x,y+y'} - X_{x,y} - X_{x,y'} \\ \text{(iv)} & X_{x,x} \\ \text{(v)} & X_{x,y} . X_{y,z} \end{array}$$

, où x , y , z , x' , y' sont dans M , et λ dans A.

PROPOSITION 2. - <u>L'idéal</u> J <u>est le noyau de</u> Φ ; <u>c'est un idéal divisé.</u>

Il est clair que J est contenu dans $\operatorname{Ker} \Phi$; pour montrer l'inclusion opposée, nous allons construire l'inverse $\Psi : \Lambda^\cdot(M) \longrightarrow A\{X_{x,y}\}/J$ de $\bar{\Phi}$ homomorphisme induit par Φ.

Désignant par $\bar{X}_{x,y}$ l'image de $X_{x,y}$ dans $A\{X_{x,y}\}/J$, considérons l'application de M^{2p} dans $A\{X_{x,y}\}$, définie par $(x_1 , \ldots , x_{2p}) \longrightarrow \bar{X}_{x_1,x_2} \ldots \bar{X}_{x_{2p-1}x_{2p}}$. Le système (2) montre que cette application est multilinéaire alternée. En conséquence, cette application induit $\Psi_p : \Lambda^{2p}(M) \longrightarrow A\{X_{x,y}\}/J$; posons $\Psi = \bigoplus_{p\geq 0} \Psi_p$ avec $\Psi_0 = 1_A$. On vérifie aisément que Φ et Ψ sont des homomorphismes inverses l'un de l'autre, d'où le premier résultat.

La seconde assertion signifie que, si $u \in J$, $\gamma_n(u) \in J$. Il suffit de le vérifier sur le système de générateurs de J donné par (2). Montrons-le par exemple pour (i) : soit

$$z = X_{x+x',y} - X_{x,y} - X_{x',y} .$$

On a $\gamma_n(z) = 0$ si $n \geqslant 4$; il suffit donc de le vérifier pour $n = 2$ et 3.

$$\gamma_2(z) = X_{x,y} . X_{x',y} - X_{x+x',y}(X_{x,y} + X_{x',y}) .$$

Or, d'après (iv), $X_{x,y} = - X_{y,x}$ mod J ; donc $\gamma_2(z) \in J$.

$\gamma_3(z) = X_{x+x',y} . X_{x,y} . X_{x',y}$ est dans J car le produit des deux derniers termes s'y trouve.

COROLLAIRE. - <u>Dans les hypothèses de la proposition</u> 2, <u>il existe sur</u> $\Lambda'(M)$ <u>un système de puissances divisées, et un seul, tel que</u> Φ <u>soit un homomorphisme de PD-algèbres. Ce système est défini par ses valeurs sur les générateurs de l'idéal</u> $\Lambda'_+(M)$:

$$\gamma_n(x \wedge y) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ x \wedge y & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \tag{3}$$

$(x , y) \in M \times M$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de [6], proposition 5. Les formules (3) proviennent du système (1).

Remarquons que la structure de PD-algèbres, obtenu sur $\Lambda'(M)$, est fonctorielle en M et en A : si $u : M \to N$ est linéaire, $\Lambda'(u) : \Lambda'(M) \to \Lambda'(N)$ est un homomorphisme de PD-algèbres, et on a un résultat analogue pour l'extension des scalaires.

1.4. - Nous allons donner ici quelques propriétés de ces puissances divisées. Soient $u \in \Lambda'_+(M)$ et $u = \sum_{i=1}^{p} u_i$ une décomposition de u en somme de vecteurs décomposables de degré pair. En vertu de (3), $\gamma_n(u_i) = 0$ pour $n \geqslant 2$. Donc

$$\gamma_n(u) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant p} u_{i_1} \ldots u_{i_n}$$

et

$$\gamma_n(u) = 0 \quad \text{si} \quad n > p .$$

Posons alors $P_T(u) = \sum_{n=0} \gamma_n(u) T^n$, où T est une indéterminée (on se trouve en fait dans $\Lambda'(M)[T]$) : la formule (iv) de 1.1, montre que

$$P_T(u + v) = P_T(u) . P_T(v) . \tag{4}$$

Ici on voit donc que

$$P_T(u) = \prod_{i=1}^{p} P_T(u_i) = \prod_{i=1}^{p} (1 + u_i T) .$$

On peut faire $T = 1$ dans la formule (4), et on trouve $P_1(u+v) = P_1(u)\,P_1(v)$; posant $P_1(u) = \exp u$, on voit, comme $P_1(0) = 1$, que $P_1(u)$ est inversible dans $\Lambda'(M)$ d'inverse $P_1(-u)$. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - L'application $u \to \exp u$ est un isomorphisme de $\Lambda'_+(M)$ sur le sous-groupe du groupe des éléments inversibles de $\Lambda'(M)$ dont la composante homogène de degré 0 est 1 .

Nous venons de voir que $u \to \exp u$ est un homomorphisme de groupes. Montrons qu'il est injectif : en effet, si u est homogène de degré p , $\gamma_n(u)$ est de degré np . La composante de degré p de $\exp u$ est donc u . Si $\exp u = 1$, u est nécessairement nul. Dans le cas général, $u = u_1 + \dots + u_q$, où u_i est homogène de degré p_i , avec $p_1 < \dots < p_q$; la composante homogène de degré p_1 de $\exp u$ est $\gamma_1(u_1) = u_1$.

En conséquence, $u \to \exp u$ est injectif.

Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit d'exhiber l'application inverse. Or si $v = 1 - u$, où $u \in \Lambda'_+(M)$, définissons $\log v = -\sum_{n\geq 1} (n-1)!\,\gamma_n(u)$, formule qui a un sens car $\gamma_n(u)$ est nul si n est assez grand. On vérifie alors aisément que $\exp \circ \log(1-u) = 1-u$, d'où la proposition annoncée.

Remarquons que si $\sum_i u_i$ et $\sum_j v_j$ sont deux décompositions de $u \in \Lambda'_+(M)$, en somme d'éléments décomposables et de degré pair de $\Lambda'_+(M)$, alors

$$\sum_{i_1<\dots<i_n} u_{i_1} \dots u_{i_n} = \sum_{j_1<\dots<j_n} v_{j_1} \dots v_{j_n}$$

car c'est tout simplement égal à $\gamma_n(u)$.

2. Formes alternées.

2.1. - Soit M un A-module . Une forme alternée sur M est une application $\Phi : M \times M \to A$ A-bilinéaire telle que $\Phi(x, x) = 0$ pour tout x dans M . La bi-additivité et la condition précédente entraînent que Φ est antisymétrique ($\Phi(y, x) = -\Phi(x, y)$) et, réciproquement, si 2 est régulier dans A , toute forme bilinéaire antisymétrique est alternée. Une forme alternée Φ sur M correspond donc à une application linéaire $u : \Lambda^2 M \to A$, définie par

$$u(x \wedge y) = \Phi(x, y) ,$$

et il y a isomorphisme entre le module des formes alternées sur M et

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^2 M, A) = (\Lambda^2 M)^* .$$

Soient (M, Φ) et (M', Φ') deux modules munis de formes alternées. Un morphisme $\alpha : (M, \Phi) \to (M', \Phi')$ est une application linéaire $\alpha : M \to M'$, telle que $\Phi'(\alpha(x), \alpha(y)) = \Phi(x, y)$. Cela signifie que si u (resp. u') est l'élément de $(\Lambda^2 M)^*$ (resp. $(\Lambda^2 M')^*$) associé à Φ (resp. Φ') , alors

$${}^t(\Lambda^2 \alpha)(u) = u' .$$

On désignera par $\mathcal{C}_A$ la catégorie dont les objets sont les couples (M , Φ) et les morphismes ceux définis ci-dessus. Un objet de $\mathcal{C}_A$ sera un <u>module alterné</u>. On a un foncteur extension des scalaires.

Soit donc (M , Φ) un objet de $\mathcal{C}_A$. Il lui est associé deux applications linéaires opposées φ_1 et φ_2 de M dans son dual $\mathrm{Hom}(M , A)$ par

$$\varphi_1(x)(y) = \Phi(x , y) ,$$

$$\varphi_2(x)(y) = \Phi(y , x) .$$

On dira que Φ est non dégénérée si φ_1 (où φ_2) est un isomorphisme.

On voit alors, en supposant M de présentation finie, que Φ est non dégénérée si, et seulement si, pour tout idéal premier p de A, la forme Φ_p obtenue par extension des scalaires à l'anneau local A_p est non dégénérée. Ainsi, par exemple, si M est projectif de type fini, et Φ une forme alternée non dégénérée sur M, M est de rang pair en tout point de $\mathrm{Spec}(A)$ car, sur un anneau local [4], les modules libres de rang impair ne possèdent pas de formes alternées non dégénérées.

2.2. DÉFINITION. - <u>Soient</u> (M , Φ) <u>et</u> (M' , Φ') <u>deux objets de</u> $\mathcal{C}_A$. <u>On appelle somme orthogonale de</u> (M , Φ) <u>et de</u> (M' , Φ'), <u>le module alterné</u>

$$(M \oplus M' , \Phi'')$$

<u>où</u> Φ'' <u>est la forme alternée définie par</u> $\Phi''(x + x' , y + y') = \Phi(x,y) + \Phi(x',y')$. <u>On notera ce module alterné</u> $(M , \Phi) \perp (M' , \Phi')$.

L'élément de $(\Lambda^2(M \oplus M'))^*$, associé à Φ'', n'est autre que

$$(u , 0 , u') \in (\Lambda^2 M)^* \oplus (M \otimes M')^* \oplus (\Lambda^2 M')^* ,$$

où u et u' sont les éléments de $(\Lambda^2 M)^*$ et $(\Lambda^2 M')^*$ associés à Φ et Φ' respectivement.

Soit maintenant M un A-module. Sur $M \oplus M^*$, définissons la forme bilinéaire suivante $\Phi_M(x + f , y + g) = g(x) - f(y)$. Il est clair que Φ_M est une forme alternée. L'application $U_M : \Lambda^2(M \oplus M^*) \longrightarrow A$, associée à Φ_M, est l'application $(0 , \mathrm{Tr} , 0) : \Lambda^2 M \oplus (M \otimes M^*) \oplus \Lambda^2 M^* \longrightarrow A$ où $\mathrm{Tr} : M \otimes M^* \longrightarrow A$ est définie par $\mathrm{Tr}(x \otimes f) = f(x)$. L'application linéaire de $M \oplus M^*$ dans son dual $M^* \oplus M^{**}$ est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1_M \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$, où $\tau : M \longrightarrow M^{**}$ est l'homomorphisme naturel $\tau(x)(f) = f(x)$. Ainsi Φ_M est non dégénérée si, et seulement si, τ est un isomorphisme, c'est-à-dire M réflexif. C'est le cas si M est projectif de type fini. On appellera alors $(M \oplus M^* , \Phi_M)$ <u>l'espace hyperbolique</u> de M, et on le notera $H(M)$. Notons que si M et M' sont deux modules réflexifs, $H(M \oplus M')$ est canoniquement isomorphe à la somme orthogonale $H(M) \perp (H(M'))$. On a alors, comme pour les formes quadratiques ([4], § 2) : si (M , Φ) est un objet de $\mathcal{C}_A$, et P un facteur direct réflexif de M totalement isotrope, i. e. $\Phi(x , y) = 0$ pour tout couple (x , y) d'éléments de P, (M , Φ) est somme orthogonale de $H(P)$ et de son orthogonal (M' , Φ'). De même, on peut montrer que si M est un A-

module projectif de type fini, le module alterné (M , Φ) est non dégénéré si, et seulement si,

$$(M , \Phi) \perp (M , - \Phi) \simeq H(M) .$$

La démonstration est en tout point analogue à celle des formes quadratiques ([2], chap. V).

2.3. *Pfaffien d'une forme alternée.* - Soient M un A-module projectif de type fini et Φ une forme alternée sur M. Identifiant $(\Lambda^2 M)^*$ à $\Lambda^2(M^*)$, considérons l'élément u de $\Lambda^2 M^*$ associé à Φ ; on va s'intéresser aux puissances divisées de u.

DÉFINITION. - *Soit M un A-module projectif de type fini de rang pair $2n$. On appelle pfaffien de Φ, et on note $\mathrm{Pf}\,\Phi$, l'élément $\gamma_n(u)$ de $\Lambda^{2n} M^*$,*

$$\Lambda^{2n} M^* = \text{dét } M^* .$$

Si M est le rang impair, on pose $\mathrm{Pf}\,\Phi = 0$.

Remarque. - Supposons M libre, de rang $2n$, et soit R la matrice de Φ dans une base $\{e_1 , \ldots , e_{2n}\}$, alors $\mathrm{Pf}\,\Phi = \mathrm{Pf}\,R\; e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2n}^*$ [4].

PROPOSITION. - *Pour que Φ soit non dégénérée, il faut et il suffit que $\mathrm{Pf}\,\Phi$ engendre le module projectif de rang 1 dét M^*.*

D'après la remarque qui suit la définition de $\mathrm{Pf}\,\Phi$, la proposition est vraie localement et donc globalement d'après 2.1.

Ainsi on voit que, pour qu'un module projectif de type fini possède une forme alternée non dégénérée, il est nécessaire qu'il soit de rang pair et que son déterminant soit libre, car dét $M \simeq (\text{dét } M^*)^*$. Si par exemple A est un anneau noethérien de dimension de Krull 1, tout module M s'écrit $A^n \oplus \text{dét } M$, et donc les seuls modules projectifs susceptibles de porter des formes alternées non dégénérées sont les modules libres de rang pair. Il est alors facile de voir que nécessairement $(M , \Phi) \simeq H(A^n)$. La proposition précédente se généralise de la façon suivante :

PROPOSITION. - *Soient M un A-module projectif de type fini de rang $2n$, et Φ une forme alternée non dégénérée sur M. Alors si u désigne l'élément de $\Lambda^2 M^*$ associé à Φ, et si p est un entier compris entre 0 et n, l'application de $\Lambda^{n-p} M^*$ dans $\Lambda^{n+p}(M^*)$, définie par $v \mapsto v \wedge \gamma_p(u)$, est un isomorphisme de A-modules.*

Il suffit de vérifier que c'est un isomorphisme localement. Alors $M \simeq A^{2n}$, et on prend pour base de M des vecteurs (ℓ_i), $1 \leqslant i \leqslant 2n$, tels que

$$\Phi(\ell_i , \ell_{i+1}) = 1$$

et tous les autres $\Phi(\ell_i, \ell_j)$ nuls. On a

$$\gamma_p(u) = \Sigma_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n}\, e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p} \wedge e^*_{i_1+n} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p+n} ,$$

et un calcul analogue à celui de [4] (§ 5, Ex. 13d) achève la démonstration. Ainsi on voit le résultat suivant.

COROLLAIRE. - <u>Pour qu'un module M projectif, de type fini et de rang $2n$, possède une forme alternée non dégénérée, il est nécessaire que pour tout entier p,</u> $0 \leq p \leq n$,

$$\Lambda^{n-p} M \simeq \Lambda^{n+p} M .$$

2.4. <u>Autres propriétés du pfaffien.</u>

2.4.1. Soit $(M, \Phi) \perp (M', \Phi')$ la somme orthogonale de deux objets de C_A, où M et M' sont projectifs ; on sait que $\text{dét}(M^* \oplus M'^*)$ est $\text{dét}\, M^* \otimes \text{dét}\, M'^*$. L'élément associé à $\Phi \perp \Phi'$ dans $\Lambda^2(M \oplus M')^*$ est $u + u'$, et donc, du fait de la formule (iv) de 1.1., on a

$$\text{Pf}(\Phi \perp \Phi') = \text{Pf}\, \Phi \otimes \text{Pf}\, \Phi' .$$

2.4.2. Soit $H(M)$ l'espace hyperbolique d'un module projectif de type fini. $\text{dét}\, H(M)^* = \text{dét}\, M \otimes \text{dét}\, M^*$ est canoniquement isomorphe à A ; un calcul local montre que $\text{Pf}\, \Phi_M$ est le générateur canonique de $\text{dét}\, (M)^*$ (on est directement ramené au cas où $M = A$).

2.4.3. Soit v un automorphisme linéaire de (M, Φ). Pour que v soit un automorphisme de Φ, il est nécessaire que v conserve $\text{Pf}\, \Phi$, et donc que

$$\Lambda^{2r}({}^t v)(\text{Pf}\, \Phi) = \text{Pf}\, \Phi$$

c'est-à-dire que $\text{dét}\, v = 1$. Ainsi $Sp(\Phi)$ est un sous-groupe de $S\ell(M)$. Si le rang de M est 2, on a egalité, car $u = \gamma_1(u) = \text{Pf}\, \Phi$.

2.4.4. Soit (M, Φ) un module alterné, avec M projectif de rang pair $2n$, et soit $\varphi_1 : M \dashrightarrow M^*$ l'application linéaire définie en 2.1.

Soit $\Lambda^{2n} \varphi_1 : \Lambda^{2n} M = \text{dét}\, M \dashrightarrow \Lambda^{2n} M^* = \text{dét}\, M^*$. C'est un élément du A-module $\text{Hom}(\text{dét}\, M, \text{dét}\, M^*)$ qui est canoniquement isomorphe à $\text{dét}\, M^* \otimes \text{dét}\, M^*$.

PROPOSITION. - $\text{Pf}\, \Phi \otimes \text{Pf}\, \Phi = \Lambda^{2n} \varphi_1 = \Lambda^{2n} \varphi_2$.

Il suffit de le démontrer localement ; pour cela, on utilisera une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, et on est donc ramené à l'égalité $(\text{Pf}(R))^2 = \text{dét}\, R$ ([4], § 5, Prop. 2). Dans le cas où Φ est non dégénérée, on peut prendre une base $(e_i)_{1\leq i\leq 2n}$ avec

$$\Phi(e_{2k-1}, e_{2k}) = 1$$

et tous les autres $\Phi(e_i, e_j)$ nuls. On a alors

$$\text{Pf}(\Phi) = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_{2n}^* .$$

L'application linéaire φ_1 est facile à décrire :

$$\varphi_1(e_{2k-1}) = e^*_{2k} ,$$
$$\varphi_1(e_{2k}) = - e^*_{2k-1} ,$$

et donc

$$\Lambda^2 \varphi_1(e_{2k-1} \wedge e_{2k}) = e^*_{2k-1} \wedge e^*_{2k}$$

et

$$\Lambda^{2n} \varphi_1(e_1 \wedge \dots \wedge e_{2n}) = e^*_1 \wedge \dots \wedge e^*_{2n} ,$$

d'où la relation demandée.

2.4.5. Soient M un A-module libre de rang k muni d'une forme alternée Φ , $\{e_1 , \dots , e_k\}$ une base de M , et r un entier tel que $2r \leqslant k$. Soient u un élément de $\Lambda^2 M^*$ associé à Φ , et $\mathfrak{F}_r$ la famille des sous-modules libres de rang $2r$ de M dont une base est formée de $2r$ vecteurs pris parmi les e_i .

Alors si $P \in \mathfrak{F}_r$, il existe un homomorphisme $\varphi_P : \Lambda^{2r} P^* \longrightarrow \Lambda^{2r} M^*$ (lié au choix de la base), et on a

$$\gamma_r(u) = \textstyle\sum_{P\in\mathfrak{F}_r} \varphi_P(\mathrm{Pf}(\Phi_P)) .$$

La démonstration est facile. Il suffit de regarder comment s'obtient $\gamma_r(u)$ dans la base de $\Lambda^{2r} M^*$ formée des $e^*_{s(1)} \wedge \dots \wedge e^*_{s(2r)}$, où s décrit l'ensemble des applications injectives croissantes de $\{1 , \dots , 2r\}$ dans $\{1 , \dots , k\}$. Supposons alors M de rang pair $2n$, Φ et Ψ deux formes alternées sur M , u et v les éléments associés dans $\Lambda^2 M^*$, et T une indéterminée. Du fait de la formule (iv) de 1.1., on a

$$\mathrm{Pf}(\Phi + T\Psi) = \textstyle\sum_{r=0}^{n} T^r \gamma_r(v)\, \gamma_{n-r}(u)$$

ce qui est exactement le théorème de Lieb [5]. Remarquons qu'il n'existe pas en fait de forme alternée canonique sur M , ce qui empêche d'obtenir une meilleure formule. Cependant à une base $\{e_1 , \dots e_{2n}\}$ de M , on peut associer Ψ définie par

$$v = \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq 2n}(- 1)^{i+j-1} e^*_i \wedge e^*_j ,$$

de sorte que

$$\gamma_r(v) = \textstyle\sum_s e^*_{s(1)} \wedge \dots \wedge e^*_{s(2r)} ,$$

où s décrit l'ensemble des applications injectives croissantes de $\{1 , \dots 2r\}$ dans $\{1 , \dots , 2n\}$. Ainsi

$$\gamma_{n-r}(u).\gamma_r(v) = A_{n-r}\, e^*_1 \wedge \dots \wedge e^*_{2n} ,$$

où A_{n-r} est la somme des pfaffiens (scalaires) des sous-matrices alternées d'ordre $2(n - r)$ de la matrice de Φ dans la base $\{e_1 , \dots , e_{2n}\}$.

2.5. K-<u>théorie alternée</u>. – Les objets dont nous disposons se prêtent tout naturellement à la définition d'un groupe K_0 [2]. Soit $\underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_A$ dont les objets sont les modules alternés $(M\ ,\ \Phi)$, où M est projectif de type fini et Φ non dégénérée. Les objets de $\underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$ sont appelés espaces alternés. La somme orthogonale de deux espaces alternés est encore un espace alterné, et cette somme vérifie les axiomes d'une catégorie avec produits [2]. On obtient ainsi sur l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets d'$\underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$ une structure de monoïde abélien avec élément neutre. Le groupe universel de ce monoïde sera noté $K_0\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}(A)$. Deux objets de $\underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$, $(M\ ,\ \Phi)$ et $(M'\ ,\ \Phi')$, ont même image dans $K_0\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}(A)$ si, et seulement si, il existe $(P\ ,\ \Psi)$ espace alterné tel que

$$(M\ ,\ \Phi) \perp (P\ ,\ \Psi) \simeq (M'\ ,\ \Phi') \perp (P\ ,\ \Psi)\ .$$

Le foncteur $M \xrightarrow{H} H(M)$ de la catégorie $\underset{\sim}{P}(A)$ des A-modules projectifs de type fini (avec pour flèches, les isomorphismes et pour produit la somme directe) dans $\underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$ est un foncteur de catégorie avec produits. Il induit donc un homomorphisme de $K_0\ \underset{\sim}{P}(A)$ dans $K_0\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$. De plus, le foncteur H est cofinal au sens de [2], chapitre I. On a donc la suite exacte à cinq termes

$$K_1\ \underset{\sim}{P}(A) \longrightarrow K_1\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A \longrightarrow K_0\ H \longrightarrow K_0\ \underset{\sim}{P}(A) \longrightarrow K_0\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A\ ,$$

qui est fonctorielle en A .

Si A est un corps, tout espace alterné est hyperbolique, et on voit aisément que $K_0\ P(A) \longrightarrow K_0\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$ est un isomorphisme. De plus, il est bien connu que le groupe des commutateurs du groupe symplectique est égal au groupe symplectique tout entier, sauf dans trois cas particuliers (cf. ARTIN [2], th. 5.1). Ainsi $K_1\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$ est nul, et $K_0\ \underset{\sim}{H}$ est aussi réduit à zéro. Tout espace alterné est encore hyperbolique si tout module projectif de type fini et de rang constant est libre, la démonstration étant la même que celle pour les corps. Si A est noethérien de dimension de Krull 1, on a vu que, encore dans ce cas, tout espace alterné est hyperbolique, mais $K_0\ \underset{\sim}{P}(A) \longrightarrow K_0\ \underset{\sim}{\mathrm{Alt}}\ A$ n'est plus nécessairement injectif. Si $\underset{\sim}{a}$ est un module projectif de rang 1 non libre, $H(\underset{\sim}{a}) \simeq H(A)$, bien que $\underset{\sim}{a}$ et A ne soient pas égaux dans $K_0\ P(A)$.

2.6. Cas d'un module de rang 2 . - Les résultats donnés ici proviennent de [3], § 4.

Si P est projectif de rang 2 , et Φ une forme alternée sur P , Φ est non dégénérée si, et seulement si, l'élément $u \in \Lambda^2\ P^*$ associé à Φ engendre

$$\Lambda^2\ P^*(u = \mathrm{Pf}(\Phi))\ .$$

En conséquence, P possède une forme alternée non dégénérée si, et seulement si, $\Lambda^2\ P$ est libre de rang 1 . Cette condition réalisée, si e est un générateur de $\Lambda^2\ P$, la forme Φ définie par $x \wedge y = \Phi(x\ ,\ y)e$ est non dégénérée, et changer de générateur revient à multiplier Φ par une constante inversible. L'ensemble des formes alternées non dégénérées sur P est en bijection avec l'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles de A . Le groupe $Gl(P)$ opère sur cet ensemble par

(5) $$\alpha.\Phi = (\text{dét}\ \alpha)\Phi\ .$$

Soit G le sous-groupe de $U(A)$, image de $G\ell(P)$ par l'homomorphisme déterminant. On voit que l'ensemble des classes d'isomorphismes de formes alternées non dégénérées sur $\underset{\sim}{P}$ est en bijection avec le groupe $U(A)/G$, groupe d'exposant 2 , car G contient $U^2(A)$. Ceci montre qu'il peut exister sur un même module de rang 2 des structures symplectiques non isomorphes [3]. Cependant, si P possède une structure hyperbolique, cela signifie qu'il existe $\underset{\sim}{a}$ projectif de rang 1 tel que $P \simeq \underset{\sim}{a} \oplus \underset{\sim}{a}^*$; mais alors $G = U(A)$, et cette structure symplectique est donc unique à isomorphisme près. Réciproquement, si P est décomposable et possède une structure symplectique, elle est unique à isomorphisme près, car $G = U(A)$. De plus si $P = \underset{\sim}{a} \oplus \underset{\sim}{b}$, comme $\Lambda^2 P = A$, $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}^*$, donc on a montré la proposition suivante.

PROPOSITION. - Soit P un module projectif de type fini et de rang 2 qui possède au moins une structure symplectique. P est hyperbolique si, et seulement si, il est décomposable, et il ne possède alors qu'une seule structure symplectique à isomorphisme près.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (E.). - Geometric algebra. - New York, Interscience Publishers, 1957 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 3).

[2] BASS (H.). - Lectures on topics in algebraic K-theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1967.

[3] BASS (H.). - Modules which support nonsingular forms, J. of Algebra, t. 13, 1969, p. 246-252.

[4] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chapitre 9 : Formes sesquilinéaires et formes quadratiques. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1272 ; Bourbaki, 24).

[5] KAHANE (J.). - Grassmann algebras for proving a theorem on pfaffians, Linear algebra and its applications , t. 4, 1971. p. 129-136.

[6] ROBY (N.). - Les règles à puissances divisées. Bull. Sc. math., t. 89, 1965. p. 75-91.

(Texte reçu le 22 mai 1973)

Philippe REVOY
Rue de la Poterie
11130 SIGEAN