Yves Matras

T-opérateurs sur un groupoïde

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 6, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A6_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 6, 6 p.

26 février 1973

T-OPÉRATEURS SUR UN GROUPOÏDE

Yves MATRAS

Γ étant un groupoïde multiplicatif, nous appellerons transformation de Γ une application de Γ dans lui-même. L'ensemble des transformations de Γ sera noté $\mathfrak{A}(\Gamma)$.

Définition. - Un élément f de $\mathfrak{A}(\Gamma)$ vérifiant

$$f(xf(y)) = f(x)\, f(y) \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } y \text{ de } \Gamma$$

sera appelé T-opérateur à gauche sur Γ , et leur ensemble sera désigné par T .

Exemples.

(a) Toute translation à gauche de Γ (c'est-à-dire toute transformation f de Γ telle que $f(xy) = f(x)\, y$ pour tout x et tout y de Γ) est un élément de T.

(b) Si $a \in \Gamma$, la transformation μ_a de Γ (définie par $\mu_a(x) = a$ pour tout x de Γ) est dans T si, et seulement si, $a = a^2$.

(c) Soient $A \subseteq \Gamma$ et $u \in \Gamma$ tels que $xa = u$ pour tout x de Γ et tout a de A . Toute transformation f de Γ , vérifiant $f(u) = u$ et $f(\Gamma) \subseteq A$, est un élément de T .

1. Composition des T-opérateurs et T_g-familles.

En général T n'est qu'un groupoïde partiel : le composé de deux éléments de T peut ne pas être dans T . On a cependant toujours le résultat suivant.

PROPOSITION. - *Soient* f *et* g *dans* T , *et* λ *une translation à gauche de* Γ . *Alors* :

(i) $f \circ \lambda \in T$.

(ii) $f \circ g = g \circ f$ *implique* $f \circ g \in T$.

(iii) *Si* $f(\Gamma)$ *est contenu dans* $g(\Gamma)$, *on a*

$$g(xf(y)) = g(x)\, f(y) \quad \textit{pour tout } x \textit{ et tout } y \textit{ de } \Gamma ;$$

de plus, $f \circ g \in T$.

Définition. - Une famille $\{f_u\}_{u \in U}$ d'éléments de T sera appelée T_g-famille sur Γ si $f_u(xf_v(y)) = f_u(x)\, f_v(y)$ pour tout x et pour tout y de Γ , tout u et tout v de U . Si les f_u sont deux à deux distincts, on parlera de T_g-ensemble sur Γ .

Une condition suffisante pour que $\{f_u\}_{u \in U}$ soit une T_g-famille sur Γ est que $f_u(\Gamma) = f_v(\Gamma)$ pour tout u et tout v de U .

La propriété d'être une T_g-famille est conservée par isomorphisme : soit ζ un isomorphisme d'un groupoïde Γ sur un groupoïde Γ', et $\{f_u\}_{u\in U}$ une T_g-famille sur Γ. Alors $\{\zeta \circ f_u \circ \zeta^{-1}\}_{u\in U}$ est une T_g-famille sur Γ'. L'étude du groupoïde partiel T peut être facilitée par les résultats suivants.

THÉORÈME.

(i) La famille des T_g-ensembles sur Γ est U-inductive.

(ii) Tout élément de T est contenu dans un T_g-ensemble maximal sur Γ.

(iii) Le sous-demi-groupe de $\mathfrak{a}(\Gamma)$, engendré par un T_g-ensemble sur Γ, est un T_g-ensemble sur Γ.

(iv) Un T_g-ensemble maximal sur Γ est un sous-demi-groupe du groupoïde partiel T.

2. Comportement des T-opérateurs à gauche vis-à-vis des éléments zéro.

Soit f un élément de T, et soit z un zéro à gauche de Γ. Alors $f(z)$ est un idempotent de Γ, et $f(\Gamma)$ est contenu dans $\{x \in \Gamma\ ;\ f(z)\,x = f(z)\}$. Supposons de plus que z soit un zéro bilatère, et notons-le 0. Alors,

$$(f(0) \neq 0) \Rightarrow (0 \notin f(\Gamma)) .$$

D'autre part, $A = \{f_u\}_{u\in U}$ étant une T_g-famille sur Γ, on a $f_u(0) \neq 0$ pour tout u de U, ou bien $f_u(0) = 0$ pour tout u de U. Dans ce dernier cas, $A \cup \{\mu_0\}$ est une T_g-famille sur Γ et, par suite, tout T_g-ensemble maximal sur Γ, contenant un élément qui laisse fixe 0, contient μ_0.

3. Cas d'un zéro bilatère adjoint extérieurement.

Soit Γ un groupoïde sans zéro bilatère. Posons $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{0\}$, et considérons un élément $\overline{f}$ de $\overline{T}$ ($\overline{T}$ étant l'ensemble des T-opérateurs à gauche sur $\overline{\Gamma}$). On peut parler de la restriction f de $\overline{f}$ à Γ si, et seulement si, $\overline{f}(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Ceci se produit uniquement dans deux cas.

Premièrement, si $\overline{f}(0) \neq 0$, et dans ce cas $f \in T$. La réciproque n'est pas vraie en général : on ne peut pas toujours prolonger à $\overline{\Gamma}$ un élément f de T de façon que l'image de 0 ne soit pas 0. Cependant on peut énoncer :

Si $f \in T$ et si e est un élément neutre à droite de Γ vérifiant

$$f(\Gamma) \subseteq \{x \in \Gamma\ ;\ ex = e\} ,$$

la transformation $\overline{f}$ de $\overline{\Gamma}$, définie par

$$\overline{f}(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in \Gamma \quad \text{et} \quad \overline{f}(0) = e ,$$

est dans $\overline{T}$.

Deuxièmement, une transformation $\overline{f}$ de $\overline{\Gamma}$ sera dite restrictible si

$$(\overline{f}(x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0) .$$

Alors un élément f de $\mathcal{C}(\Gamma)$ est un T-opérateur [resp. une translation] à gauche sur Γ si, et seulement si, il est la restriction à Γ d'un T-opérateur [resp. une translation] à gauche restrictible sur $\overline{\Gamma}$.

4. Une configuration particulière.

Considérons le problème suivant : soit à caractériser les éléments de $\overline{T}$, ensemble des T-opérateurs à gauche sur le quotient $\overline{\Gamma} = \Gamma/\Delta$ d'un groupoïde Γ par un idéal premier Δ de Γ. Nous allons définir un certain type de transformation de Γ qu'il sera nécessaire et suffisant de caractériser pour résoudre le problème.

Notons $\overline{x}$ la classe modulo Δ d'un élément x de Γ. Si $x \notin \Delta$, on a $\overline{x}=\{x\}$. Si $x \in \Delta$, on a $\overline{x} = \Delta$ (considéré comme l'élément zéro de $\overline{\Gamma}$, Δ sera noté 0). On dira qu'un élément f de $\mathcal{C}(\Gamma)$ est réductible par Δ si $\overline{x} = \overline{y}$ implique $\overline{f(x)} = \overline{f(y)}$, auquel cas on peut définir un élément $\overline{f}$ de $\mathcal{C}(\overline{\Gamma})$ par $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)}$. On appellera $\overline{f}$ la réduction de f par Δ. L'ensemble des éléments de $\mathcal{C}(\Gamma)$ réductibles par Δ est

$$\mathcal{C}_\Delta(\Gamma) \cup (\bigcup_{a\in\Gamma\setminus\Delta} \mathcal{C}_a(\Gamma)) = \mathcal{R}_\Delta(\Gamma) ,$$

où $\mathcal{C}_\Delta(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) \ ; \ f(\Delta) \subseteq \Delta\}$ et $\mathcal{C}_a(\Gamma) = \{f \in \mathcal{C}(\Gamma) \ ; \ f(\Delta) = \{a\}\}$.

Notons que deux éléments f et g de $\mathcal{R}_\Delta(\Gamma)$ ont même réduction par Δ si, et seulement si, $\Delta_f = \Delta_g$, avec $\Delta_f = \{x \in \Gamma \ ; \ f(x) \in \Delta\}$. T_Δ désignera l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}_\Delta(\Gamma)$ vérifiant les conditions :

(M1) $\Delta_f \, f(\Gamma\setminus\Delta_f) \subseteq \Delta_f$, et

(M2) $f(xf(y)) = f(x)\,f(y)$ pour tout x et tout y de $\Gamma\setminus\Delta_f$.

THÉORÈME. - Un élément f de $\mathcal{C}(\overline{\Gamma})$ qui laisse le zéro fixe est dans $\overline{T}$ si, et seulement si, f est la réduction par Δ d'un élément de T_Δ.

Cas particulier des translations. - Soit T'_Δ l'ensemble des éléments f de T_Δ vérifiant les conditions :

(T1) Δ_f est un idéal à droite de Γ, et

(T2) $f(xy) = f(x)\,y$ pour tout x de Δ_f et tout $y \notin \Delta$.

Alors un élément λ de $\mathcal{C}(\overline{\Gamma})$ est une translation à gauche de $\overline{\Gamma}$ si, et seulement si, λ est la réduction par Δ d'un élément de T'_Δ.

5. Structure de l'ensemble des T-opérateurs sur un groupe et sur un groupe avec zéro.

Soit G un groupe multiplicatif d'élément neutre e. Soit $\overline{G}$ le groupe avec zéro construit sur G : $\overline{G} = G \cup \{0\}$. L'ensemble des T-opérateurs à gauche sur G (resp. $\overline{G}$) sera désigné par T (resp. $\overline{T}$).

Dans [1], nous avons caractérisé les éléments de T et $\overline{T}$; rappelons ce résultat.

Définition. - Un système à gauche sur $\overline{G}$ (resp. G) est un couple (F, I), où F est un sous-groupe de G et I un ensemble non vide et non redondant (resp. non vide, non redondant et complet) de représentants des classes à gauche modulo F. L'associée de (F, I) est la transformation f de G (resp. $\overline{G}$), définie par $f(x) = i^{-1} x$ avec $i \in I$ et $iF = xF$ (resp. $f(x) = i^{-1} x$ s'il existe i dans I tel que $iF = xF$, et $f(x) = 0$ sinon). Un système à gauche sur G (resp. $\overline{G}$), différent de (F, I), ne peut avoir f comme associée. F sera le but de f, I sera le coeur de f, et l'élément de I qui se trouve dans F sera appelé, lorsqu'il existe, pointe de f.

THÉORÈME.

(i) Une transformation f de G est dans T si, et seulement si, elle est l'associée d'un système à gauche sur G.

(ii) μ_0 et μ_e sont dans $\overline{T}$.

(iii) Une transformation f de $\overline{G}$, différente de μ_0 et de μ_e, est dans $\overline{T}$ si, et seulement si, elle est l'associée d'un système à gauche sur $\overline{G}$.

(a) Structure du groupoïde partiel $\overline{T}$.

Nous poserons $\Sigma = \overline{T} \setminus \{\mu_e, \mu_0\}$. F étant un sous-groupe de G, Σ_F représentera l'ensemble des éléments de Σ ayant F pour but. Le théorème suivant fournit une première décomposition de $\overline{T}$.

THÉORÈME 1.

(i) $\{\mu_e\}$ est un T_g-ensemble maximal sur $\overline{G}$.

(ii) Mis à part $\{\mu_e\}$, les T_g-ensembles maximaux sur $\overline{G}$ sont, et ne sont que les $\Sigma_F \cup \{\mu_0\}$. Les Σ_F sont deux à deux disjoints, et leur union, lorsque F parcourt la famille des sous-groupes de G, est Σ.

Choisissons un sous-groupe F de G, et étudions Σ_F.

Puisque $\Sigma_F \cup \{\mu_0\}$ est un T_g-ensemble maximal sur $\overline{G}$, c'est un sous-demi-groupe du groupoïde partiel $\overline{T}$. Il est clair que μ_0 est le zéro de ce demi-groupe. Appelons Φ_F l'ensemble des éléments de Σ_F n'ayant pas de pointe. Posons $\Psi_F = \Sigma_F \setminus \Phi_F$. Si $\sigma \in \Sigma$, on désignera par I_σ le coeur de σ, et Z_σ représentera $\sigma^{-1}(0) \setminus \{0\}$. Si $x \in G \setminus Z_\sigma$, on dénotera par x_σ l'unique élément de $I_\sigma \cap xF$. En particulier e_σ sera la pointe de σ, si elle existe.

THÉORÈME 2. - Soient $\sigma \in \Sigma_F$, $\varphi \in \Phi_F$, $\psi \in \Psi_F$. Alors :

(i) $\varphi \circ \sigma = \mu_0$; $Z_{\psi \circ \sigma} = Z_\sigma$; $I_{\psi \circ \sigma} = I_\sigma e_\psi$.

(ii) ψ est idempotent si, et seulement si, $e_\psi = e$.

(iii) $\psi \circ \Phi_F = \Phi_F$; $\psi \circ \Psi_F = \Psi_F$.

THÉORÈME 3. - L'ensemble Π_F des idempotents de Ψ_F est un zéro demi-groupe à droite, et Ψ_F est un groupe droit isomorphe à $\Pi_F \times F$.

L'isomorphisme intéressant est en fait celui qui transforme $\Psi_F \circ \psi$ en F (avec $\psi \in \Pi_F$). Il est défini par

$$(\psi' \circ \psi \in \Psi_F \circ \psi) \longrightarrow (e_{\psi'}^{-1} \in F) .$$

Remarque. - Considérons l'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur Ψ_F par $\psi \mathcal{R} \psi'$ si, et seulement si, $Z_\psi = Z_{\psi'}$. Soit π un idempotent de Ψ_F. Alors, d'après le théorème 2(i), $\Psi_F \circ \pi$ ne peut être à cheval sur deux classes modulo $\mathcal{R}$. Chacune de ces classes est donc un groupe droit dont les sous-groupes maximaux sont isomorphes à F. C'est le cas, en particulier, pour la classe formée de tous les éléments restrictibles (Cf. [1]) de Ψ_F, classe que nous noterons $\Psi_{F,r}$.

THÉORÈME 4. - Soit $\gamma \in \overline{T}$ et $\sigma , \sigma' \in \Sigma$. Alors :

(i) $\mu_0 \circ \gamma = \mu_0$.

(ii) $\gamma \circ \mu_0 = \mu_0$ si $\gamma \neq \mu_e$.

(iii) $\mu_e \circ \gamma = \mu_e$.

(iv) $\gamma \circ \mu_e \in \overline{T}$ si, et seulement si, $\gamma \in \Pi_F$ et, dans ce cas, $\gamma \circ \mu_e = \mu_e$.

(v) $\sigma \circ \sigma' \neq \mu_e$.

(vi) $\sigma \circ \sigma' = \mu_0$ si, et seulement si, $F_{\sigma'} \subseteq Z_\sigma$ et, dans ce cas, σ n'a pas de pointe ($F_{\sigma'}$ représente le but de σ').

(vii) Soient $\psi \in \Psi_F$ et $\sigma \in \Sigma_H$, avec $H \subseteq F$. Alors, si $e_\psi \notin H$, on a $\psi \circ \sigma \notin \overline{T}$; si $e_\psi \in H$, on a

$$\psi \circ \sigma \in T \quad \text{avec} \quad Z_{\psi\circ\sigma} = Z_\sigma \quad \text{et} \quad I_{\psi\circ\sigma} = I_\sigma \, e_\psi .$$

(b) Structure du groupoïde partiel T.

Toutes les notations précédentes sont conservées excepté que, dans ce qui suit, μ_e désignera la transformation de G qui applique tout élément de G sur e.

THÉORÈME 5. - Les T_σ-ensembles maximaux sur G sont, et ne sont que les ensembles $\Xi_F = \{\xi \in T ; \xi(G) = F\}$ lorsque F parcourt la famille des sous-groupes de G. Ces Ξ_F sont deux à deux disjoints et recouvrent T.

Remarquons que $\Xi_{\{e\}} = \{\mu_e\}$ et que Ξ_G coïncide avec l'ensemble des translations à gauche de G.

Tout élément σ de T est la restriction à G d'un élément restrictible $\overline{\sigma}$ de Σ, et l'application $\overline{\sigma} \longrightarrow \sigma$ est un isomorphisme de groupoïdes partiels de Ψ sur T, où Ψ est l'ensemble des éléments restrictibles de Σ. En particulier, Ξ_F est l'image isomorphe de $\Psi_{F,r}$: c'est un groupe droit isomorphe à $\Theta_F \times F$, où Θ_F représente l'ensemble des éléments de Ξ_F qui ont e pour pointe. De la même manière que pour $\bar{G}$, on montre que :

(i) $\mu_e \circ \gamma = \mu_e$ pour tout γ de T.

(ii) $\gamma \circ \mu_e \in T$ si, et seulement si, γ est idempotent et, dans ce cas, on a $\gamma \circ \mu_e = \mu_e$.

Les idempotents de T sont caractérisés par une pointe égale à e. Enfin, si ξ et ξ' sont dans Ξ_F, on a $I_{\xi \circ \xi'} = I_{\xi'} e_\xi$.

Nous allons maintenant compléter l'étude de la structure de T en énonçant une condition nécessaire et suffisante pour que le composé de deux éléments de T soit dans T.

Soient α et β dans T, respectivement associés aux systèmes à gauche (F, I) et (H, J) sur G. Soit E_F la réunion des classes à gauche modulo F qui coupent H. Posons

$$I_H = I \cap E_F \quad \text{et} \quad I_H^0 = I \cap H .$$

Pour un élément donné x de G, nous noterons j_x l'unique élément de $J \cap xH$, et i^x l'unique élément de $I \cap (j_x^{-1} x)F$. Enfin nous noterons π l'équivalence sur G, définie par $x \pi y$ si, et seulement si, $j_x i^x = j_y i^y$. On peut alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - $\alpha \circ \beta \in T$ *si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(1) π *est régulière à gauche.*

(2) $JI_H = JI_F^0$.

Lorsque c'est le cas, le système à gauche sur G, *dont* $\alpha \circ \beta$ *est l'associée est* $(\pi(e), JI_H)$, *où* $\pi(e)$ *est la classe de* e *modulo* π.

Cas particuliers.

(1) Si $I_H = I_H^0$, $\alpha \circ \beta$ est un élément de T associé à $(H \cap F, JI_H)$. La réciproque est d'ailleurs vraie : si $\alpha \circ \beta \in T$ avec $\alpha \circ \beta(G) = H \cap F$, alors on a $I_H = I_H^0$.

(2) Si $F \subseteq H$, alors $\alpha \circ \beta \in T$, et est associée à (F, JI_H).

(3) Si $I_H^0 = \emptyset$, $\alpha \circ \beta$ n'est pas dans T.

(4) Si $H \subseteq F$ et $e_\alpha \notin H$, alors $\alpha \circ \beta$ n'est pas dans T.

(5) Si $H \subseteq F$ et $e_\alpha \in H$, alors $\alpha \circ \beta$ est dans T, et est associée à (H, Je_α).

BIBLIOGRAPHIE

[1] MATRAS (Y.). - Sur l'équation fonctionnelle $f(xf(y)) = f(x) f(y)$, Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sc., Série 5, t. 55, 1969, p. 731-751.

Yves MATRAS
La Galerie
[illegible]