Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Alain Bigard

Théories de torsion et f-modules

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. nº 5, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A5_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 5, 12 p.

19 février 1973

THÉORIES DE TORSION ET f-MODULES

par Alain BIGARD

L'anneau maximal des quotients d'un f-anneau R a été étudié par ANDERSON [1]. Il a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que cet anneau soit lui-même un f-anneau. Dans [6], STEINBERG a considéré l'enveloppe injective $E(M)$ d'un f-module M, et il a trouvé des conditions assez analogues pour que $E(M)$ soit un f-module. L'introduction des théories de torsion par LAMBEK [5] a permis de poser le problème dans toute sa généralité. La synthèse que nous allons exposer ici est due à GEORGOUDIS [4]. Dans beaucoup de cas, nous donnons des démonstrations nouvelles et des énoncés plus généraux.

1 Préliminaires sur les théories de torsion.

Nous allons décrire très rapidement, et sans démonstration, le cadre dans lequel nous allons nous placer. On trouvera un exposé complet dans le livre de LAMBEK [5].

Soit R un anneau unitaire, et soit $\text{Mod } R$ la classe des R-modules à gauche unitaires. On appelle radical de torsion une application $T : \text{Mod } R \to \text{Mod } R$ qui satisfait aux conditions suivantes :

1° $T(M) \subseteq M$,

2° Si f est un homomorphisme de M dans N : $f(T(M)) \subseteq T(N)$,

3° $T(M/T(M)) = 0$,

4° Si $M \subseteq N$, $T(M) = T(N) \cap M$.

Un module M est dit de torsion si $T(M) = M$, et sans torsion si $T(M) = 0$. Tout sous-module d'un module sans torsion est sans torsion. Si M est sans torsion, son enveloppe injective $E(M)$ est sans torsion.

Supposons $M \subseteq N$. On appelle clôture de M dans N le sous-module

$$\text{Cl}(M) = \{x \in N \mid x + M \in T(N/M)\} .$$

Cl est une fermeture de Moore. M est dit fermé si $\text{Cl}(M) = M$, c'est-à-dire si N/M est sans torsion. M est dit dense si $\text{Cl}(M) = N$, c'est-à-dire si N/M est de torsion.

Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des idéaux à gauche denses de R . Alors $\mathfrak{D}$ possède les propriétés suivantes :

1° Si $D \in \mathfrak{D}$ et $D \subseteq J$, alors $J \in \mathfrak{D}$,

2° Si $D \in \mathfrak{D}$ et $J \in \mathfrak{D}$, alors $D \cap J \in \mathfrak{D}$,

3° Si $D \in \mathfrak{D}$ et [illegible] , alors [illegible] , 4° Si $D \in \mathcal{Q}$ et si, pour tout $d \in D$, $K \cdot d \in \mathcal{Q}$, alors $K \in \mathcal{Q}$.

On appelle <u>filtre idempotent</u> toute famille d'idéaux à gauche possédant ces propriétés. A tout radical de torsion correspond un filtre idempotent. Inversement, si $\mathcal{Q}$ est un filtre idempotent, on peut lui associer un radical de torsion, défini par

$$T(M) = \{x \in M \mid \exists D \in \mathcal{Q}\ ,\ Dx = 0\}\ .$$

Cette correspondance est bijective. En utilisant cette nouvelle expression de $T(M)$, on voit immédiatement que $T(R)$ est un idéal bilatère. Par ailleurs, on démontre sans difficulté que

$$Cl_N(M) = \{x \in N \mid \exists D \in \mathcal{Q}\ ,\ Dx \subseteq M\}\ .$$

Pour un module N, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1° Si $D \in \mathcal{Q}$ et $f \in \mathrm{Hom}(D\ ,\ N)$, il existe $z \in N$ tel que, pour tout $d \in D$, $f(d) = dz$.

2° N est fermé dans $E(N)$.

Un module N est dit <u>divisible</u> s'il vérifie ces deux conditions.

Tout module M admet une enveloppe divisible $D(M)$: c'est la clôture de M dans $E(M)$.

On appelle module des quotients à gauche de M (pour la théorie de torsion donnée) le module $Q(M) = D(M/T(M))$. On démontre que

$$Q(M) = \varinjlim_{D \in \mathcal{Q}} \mathrm{Hom}(D\ ,\ M/T(M))\ .$$

Par ailleurs, $Q(R)$ est un anneau, qui est appelé l'<u>anneau des quotients à gauche de</u> R.

Si M est sans torsion, $E(M)$ est sans torsion, et on en déduit facilement que $\mathrm{Hom}(R/D\ ,\ E(M)) = 0$ pour tout $D \in \mathcal{Q}$.

Inversement, considérons un R-module M, et posons

$$\mathcal{Q} = \{D \mid \mathrm{Hom}(R/D\ ,\ E(M)) = 0\}\ .$$

Alors $\mathcal{Q}$ est un filtre idempotent. La théorie de torsion correspondante s'appelle la théorie engendrée par M. C'est la théorie maximale pour laquelle M est sans torsion.

Soit S une partie stable de R (contenant 1). Posons

$$\mathcal{Q} = \{D \mid \forall r \in R\ ,\ (D \cdot r) \cap S \neq \emptyset\}\ .$$

Alors $\mathcal{Q}$ est un filtre idempotent. La théorie de torsion correspondante est dite engendrée par S.

2. Filtres idempotents sur un anneau filtrant.

Nous supposons R muni d'un ordre filtrant R_i, avec $i \in$ [illegible].

Rappelons qu'un module ordonné est un module M muni d'un ordre M_+ avec $R_+ M_+ \subseteq M_+$.

Un module réticulé M est dit f-module s'il est produit sous-direct de modules totalement ordonnés. Comme nous considérons des modules unitaires, les f-modules sont caractérisés par les propriétés :

$$\text{Pour tout } \; a \in R_+ \; , \quad a(x \vee y) = ax \vee ay \quad \text{et} \quad a(x \wedge y) = ax \wedge ay \; .$$

Pour les propriétés élémentaires des modules réticulés, on pourra se reporter à [2].

Si M est un R-module ordonné, on notera que $RM_+ = M_+ - M_+$ est un sous-module filtrant de M .

Si M est un R-module quelconque, posons :

$$T^*(M) = \{x \in M \mid \exists \, D \in \mathfrak{D} \; , \; D_+ x = 0\} \; .$$

PROPOSITION 1. - $T^*(M)$ <u>est un sous-module de</u> M .

En effet, soient $x \in T^*(M)$ et $a \in R_+$. Il existe un $D \in \mathfrak{D}$ avec $D_+ x = 0$. On a $C = D : a \in \mathfrak{D}$. Si $c \in C_+$, $ca \in D_+$, donc $cax = 0$. Ainsi $C_+(ax) = 0$, donc $ax \in T^*(M)$. Comme R est engendré par R_+ , on voit que $ax \in T^*(M)$ pour tout $a \in R$.

PROPOSITION 2. - <u>Si</u> M <u>est un</u> f-<u>module</u>, $T^*(M)$ <u>est un sous-module solide</u>.

Nous devons démontrer que $|y| \leq |x|$ et $x \in T^*(M)$ impliquent $y \in T^*(M)$. Il existe un $D \in \mathfrak{D}$ avec $D_+ x = 0$. Si $d \in D_+$,

$$|dy| = d|y| \leq d|x| = |dx| = 0 \; ,$$

donc $D_+ y = 0$.

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> R <u>est un anneau à carrés positifs, pour tout</u> R-<u>module</u> M , $2T^*(M) \subseteq T(M)$.

Soit $x \in T^*(M)$. On a $D_+ x = 0$ avec $D \in \mathfrak{D}$. Si $u , v \in D$, on a

$$(u + v)^2 \; , \; u^2 \; , \; v^2 \in D_+ \; ,$$

et par conséquent :

$$0 = (u + v)^2 x = uvx + vux \; .$$

Pour tout $a , b , c \in D$, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= c(abx + bax) + b(cax + acx) \\ &= cabx + cbax + bcax + bacx \\ &= cabx + a(cbx + bcx) + bacx \\ &= cabx + bacx \end{aligned}$$

$$= cabx - bcax$$

$$= 2(cabx) .$$

On a par conséquent $D^3(2x) = 0$, donc $2x \in T(M)$.

COROLLAIRE. - *Si* R *est un anneau à carrés positifs, et si* M *est un* $\underset{\sim}{Z}$*-module sans torsion,* $T^*(M) = T(M)$.

En effet, si $x \in T^*(M)$, $2x \in T(M)$, donc il existe $D \in \mathfrak{D}$ avec $2(Dx) = 0$, ce qui implique $Dx = 0$.

Le corollaire précédent s'applique en particulier au cas où R est un f-anneau et M un R-module réticulé. Alors $T(M)$ est solide, et $M/T(M)$ est réticulé.

PROPOSITION 4. - *Pour un filtre idempotent* $\mathfrak{D}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *Si* $D \in \mathfrak{D}$, $RD_+ \in \mathfrak{D}$,

(ii) *Pour tout module* M , $T^*(M) = T(M)$,

(iii) *Si* M *est dense dans* N , RM_+ *est dense dans* RN_+ .

(i) implique (ii), et (iii) implique (i), sont évidents. Montrons que (ii) implique (iii). Si $x \in N_+$, il existe un D tel que $Dx \subseteq M$. On a $D_+ x \subseteq RM_+$. Par suite,

$$T(RN_+/RM_+) = T^*(RN_+/RM_+) = RN_+/RM_+ .$$

On dira que $\mathfrak{D}$ est *positif* s'il vérifie les conditions précédentes.

Si R est totalement ordonné, tout filtre idempotent est positif. Il en va de même si R est un anneau à carrés positifs dans lequel 2 est inversible (d'après la proposition 3).

PROPOSITION 5. - *Soit* R *un anneau filtrant à carrés positifs, et soit* M *un R-module, qui est un* $\underset{\sim}{Z}$*-module sans torsion. La théorie de torsion engendrée par* M *est positive.*

Supposons $D \in \mathfrak{D}$. Soit $f \in \mathrm{Hom}(R/RD_+ , E(M))$. Soit φ l'homomorphisme canonique de R sur R/RD_+ . On a

$$D_+ f(\varphi(1)) = f\varphi(D_+) = 0 ,$$

donc

$$f(\varphi(1)) \in T^*(M) = T(M) = 0 .$$

Par suite, $f = 0$. Donc $RD_+ \in \mathfrak{D}$.

En particulier, si R est un f-anneau, on voit que la théorie de torsion engendrée par R est positive.

PROPOSITION 6. - Supposons $\mathfrak{D}$ positif. Soit M un f-module. Alors M est sans torsion si, et seulement si, toute polaire de M est fermée.

Soit A une polaire. Supposons que $Dx \subseteq A$. Soient $d \in D_+$ et $y \in A^\perp$: On a $dy \in A^\perp$, donc

$$d(|x| \wedge |y|) = |dx| \wedge |dy| = 0 .$$

Par conséquent, $D_+(|x| \wedge |y|) = 0$ et $|x| \wedge |y| = 0$. Il en résulte

$$x \in A^{\perp\perp} = A .$$

Rappelons qu'un sous-module P de M est dit premier si M/P est totalement ordonné.

Nous dirons que $\mathfrak{D}$ est de caractère fini si, pour tout $D \in \mathfrak{D}$, il existe $D' \in \mathfrak{D}$, de type fini, avec $D' \subseteq D$.

Si R est noethérien à gauche, tout filtre idempotent est de caractère fini.

Soit S une partie stable de R, et considérons le filtre $\mathfrak{D}$ engendré par S. Si R vérifie la condition de Ore par rapport à S, c'est-à-dire si, pour tout $x \in R$ et $s \in S$, il existe $y \in R$ et $t \in S$ tels que $tx = ys$, alors $\mathfrak{D}$ est de caractère fini. En effet, tout $D \in \mathfrak{D}$ contient un $s \in S$ et $Rs \in \mathfrak{D}$.

LEMME. - Supposons $\mathfrak{D}$ de caractère fini. Si $(L_i)_{i\in I}$ est une famille filtrante à droite de sous-modules fermés de M, $\bigcup L_i$ est un sous-module fermé.

En effet, si $Dx \subseteq \bigcup_{i\in I} L_i$, soit $D' = Rd_1 + \ldots + Rd_n \in \mathfrak{D}$ tel que $D' \subseteq D$. Il existe un $i(k)$ tel que $d_k x \in L_{i(k)}$. Si L_i contient tous les $L_{i(k)}$, on a $D'x \subseteq L_i$, donc $x \in L_i \subseteq \bigcup_{i\in I} L_i$.

PROPOSITION 7. - On suppose $\mathfrak{D}$ positif de caractère fini. Soient M un f-module L un sous-module solide fermé, et $x \notin M$. Il existe un sous-module premier fermé P tel que $L \subseteq P$ et $x \notin P$.

En effet, compte du lemme, l'axiome de Zorn montre qu'il existe P maximal parmi les sous-modules solides fermés que contiennent L et non x. Considérons M/P. Dans M/P, (0) est inter-irréductible comme sous-module solide fermé. Il en résulte (proposition 6) que M/P n'a pas de polaires propres, donc il est totalement ordonné.

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

PROPOSITION 8. - On suppose $\mathfrak{D}$ positif de caractère fini. Soit M un f-module. $T(M)$ est l'intersection des sous-modules premiers fermés. Par conséquent, M est sans torsion si, et seulement si, il est produit sous-direct de modules sans torsion totalement ordonnés.

3. Extension de l'ordre.

Considérons un module ordonné M. On dira que M est <u>isolé</u> si $D \in \mathcal{D}$ et $D_+ x \subseteq M_+$ impliquent $x \in M_+$. Si M admet un ordre isolé, il est clair que $T^*(M) = 0$.

THEOREME 1. - <u>Supposons</u> M <u>dense dans</u> M', <u>sans torsion. Si</u> P <u>est un ordre isolé sur</u> M,

$$P' = \{x \in M' \mid \exists D \in \mathcal{D} ,\ D_+ x \subseteq P\}$$

<u>est l'unique ordre isolé de</u> M' <u>qui prolonge</u> P. <u>On définit ainsi une bijection entre les ordres isolés de</u> M <u>et les ordres isolés de</u> M'.

Montrons d'abord que P' est un ordre. Si $D_+ x \subseteq P$ et $J_+ y \subseteq P$, on a

$$(D \cap J)_+(x + y) \subseteq P ,$$

donc $x + y \in P'$.

Supposons $a \in R_+$. On a $C = D \therefore a \in \mathcal{D}$ et $C_+ ax \subseteq D_+ x \subseteq P$, donc $ax \in P'$.

Prenons $x \in P' \cap - P'$. Il existe D, $J \in \mathcal{D}$ avec $D_+ x \subseteq P$ et $J_+ x \subseteq P$. En prenant $C = D \cap J$, on a $C_+ x \subseteq P \cap - P = 0$, donc $x \in T^*(M')$. Par ailleurs, il existe un $K \in \mathcal{D}$ avec $Kx \subseteq M$. Comme $T^*(M')$ est un sous-module (proposition 1), on a

$$Kx \subseteq T^*(M') \cap M = T^*(M) = 0 .$$

Finalement $x = 0$, car M' est sans torsion.

Il est clair que $P \subseteq P' \cap M$. Si $x \in P' \cap M$, il existe $D \in \mathcal{D}$ avec $D_+ x \subseteq P$. Comme P est isolé, $x \in P$. On a donc $P' \cap M = P$. Soit P'' un ordre isolé qui prolonge P. Si $x \in P'$, on a $D_+ x \subseteq P \subseteq P''$, donc $x \in P''$. Inversement, soit $x \in P''$. Il existe un $D \in \mathcal{D}$ avec $Dx \subseteq M$. On a $D_+ x \subseteq P'' \cap M = P$, donc $x \in P'$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que la trace sur M d'un ordre isolé de M' est évidemment un ordre isolé de M.

On notera que $x \in P'$ si, et seulement si, $(M \therefore x)_+ x \subseteq P$. En effet, si $x \in P'$, on a

$$(M \therefore x)_+ x \subseteq P' \cap M = P .$$

PROPOSITION 9. - <u>Un</u> f-<u>module</u> M <u>est isolé si, et seulement si,</u> $T^*(M) = 0$.

La condition est évidemment nécessaire. Supposons $T^*(M) = 0$. Soit x tel que $D_+ x \subseteq M_+$. Pour tout $d \in D_+$, on a $d(x \wedge 0) = dx \wedge 0 = 0$. Donc $D_+(x \wedge 0) = 0$ et $x \wedge 0 = 0$, c'est-à-dire $x \in M_+$.

Si M est un f-module, et N un module qui contient M, nous dirons que N est une f-<u>extension</u> s'il existe sur N une structure de f-module telle que M

soit un sous-f-module. Si $T^*(M) = 0$, une telle structure est unique (d'après les deux résultats précédents). Nous allons caractériser les f-modules sans torsion dont le module des quotients est une f-extension.

LEMME. - Soit G un groupe réticulé commutatif, et soit x , $y \in G$. Si

$$x_- \wedge y_+ = 0 \quad \text{et} \quad x_+ \wedge y_- = 0 ,$$

alors $(x + y)_+ = x_+ + y_+$.

On a en effet

$$x + y = x_+ - x_- + y_+ - y_- = (x_+ + y_+) - (x_- + y_-)$$

Comme $x_+ \wedge x_- = y_+ \wedge y_- = 0$, il vient $(x_+ + y_+) \wedge (x_- + y_-) = 0$. Ceci implique

$$(x + y)_+ = x_+ + y_+ \quad \text{et} \quad (x + y)_- = x_- + y_- .$$

THÉORÈME 2. - Soit R un anneau filtrant muni d'un filtre idempotent $\mathfrak{D}$ positif. Soit M un f-module sans torsion. Le module des quotients à gauche $Q(M)$ est une f-extension de M si, et seulement si, pour tout $x \in Q(M)$,

$$d_1 , d_2 \in R_+ , \quad d_1 x \in M \quad \text{et} \quad d_2 x \in M \quad \text{impliquent} \quad (d_1 x)_+ \wedge (d_2 x)_- = 0 .$$

La condition est évidemment nécessaire, car on doit avoir :

$$0 \leqslant (d_1 x)_+ \wedge (d_2 x)_- = d_1(x_+) \wedge d_2(x_-) \leqslant (d_1 \vee d_2)(x_+ \wedge x_-) = 0 .$$

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée.

Nous allons montrer que chaque $\mathrm{Hom}(RD_+ , M)$ est un groupe réticulé. Si

$$f \in \mathrm{Hom}(RD_+ , M) ,$$

posons $f \geqslant 0$ si $f(D_+) \subseteq M_+$.

On vérifie facilement que c'est un ordre (car RD_+ est engendré par D_+). Soit $f \in \mathrm{Hom}(RD_+ , M)$. Comme $RD_+ \in \mathfrak{D}$, il existe un $x \in Q(M)$, et un seul, tel que $f(d) = dx$ pour tout $d \in RD_+$. Si d_1 , $d_2 \in D_+$, on a donc

$$f(d_1)_+ \wedge f(d_2)_- = 0 .$$

Pour tout $d \in D_+$, posons $f_+(d) = (f(d))_+$. Pour d_1 , $d_2 \in D_+$, on a, d'après le lemme :

$$f_+(d_1 + d_2) = (f(d_1) + f(d_2))_+ = f(d_1)_+ + f(d_2)_+ = f_+(d_1) + f_+(d_2) .$$

Comme RD_+ est engendré par D_+ , f_+ se prolonge en un homomorphisme de RD_+ dans M , que nous notons de la même façon. Il est clair que f_+ est la borne supérieure de f et de 0 . Par conséquent, $\mathrm{Hom}(RD_+ , M)$ est réticulé.

Comme chaque $D \in \mathfrak{D}$ contient $RD_+ \in \mathfrak{D}$, on a :

$$Q(M) = \varinjlim_{D \in \mathfrak{D}} \mathrm{Hom}(D , M) = \varinjlim_{D \in \mathfrak{D}} \mathrm{Hom}(RD_+ , M) .$$

Ceci montre que $Q(M)$ est un groupe réticulé. L'ordre ainsi introduit sur $Q(M)$ est identique à celui défini dans le théorème 1. Il reste à prouver que $Q(M)$ est un f-module.

Soient $x \in Q(M)$ et $a \in R_+$. Il existe un $D \in \mathfrak{D}$ avec $Dx \subseteq M$. On a

$$C = D \therefore a \in \mathfrak{D} .$$

Si $c \in C_+$, on a $ca \in D_+$, donc

$$cax_+ = (cax)_+ = c(ax)_+ .$$

Par suite, $RC_+(ax_+ - (ax)_+) = 0$, donc $(ax)_+ = ax_+$, et ceci achève la démonstration.

Supposons maintenant que R est un anneau réticulé. Nous dirons qu'un f-module M est distributif si, pour $x \in M_+$, $a, b \in R$, on a

$$(a \vee b)\, x = ax \vee bx \quad \text{et} \quad (a \wedge b)\, x = ax \wedge bx .$$

Ces modules ont été étudiés dans [2].

THÉORÈME 3. - *Soit R un f-anneau muni d'un filtre idempotent positif $\mathfrak{D}$. Soit M un f-module distributif sans torsion. Pour que $Q(M)$ soit un f-module distributif, il faut et il suffit que :*

1° *Pour* $x \in Q(M)$, $d_1, d_2 \in R_+$ *tels que* $d_1 x, d_2 x \in M$,

$$(d_1 x)_+ \wedge (d_2 x)_- = 0$$

2° *Pour* $0 \leqslant x \in Q(M)$, $d_1, d_2 \in R$ *tels que* $d_1 x \in M$, $d_2 x \in M$ *et* $d_1 \wedge d_2 = 0$

$$d_1 x \wedge d_2 x = 0 .$$

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Inversement, il suffit de montrer que, pour $0 \leqslant x \in Q(M)$ et $a \in R$, on a $(ax)_+ = a_+ x$.

Il existe un $D \in \mathfrak{D}$ tel que $Dx \subseteq M$. Soit

$$J = (D \therefore a_+) \cap (D \therefore a_-) \in \mathfrak{D} .$$

Prenons $t \in J_+$. Comme $ta_+, ta_- \in D$, on a $ta_+ x, ta_- x \in M$. De plus,

$$ta_+ \wedge ta_- = t(a_+ \wedge a_-) = 0 .$$

D'après la condition 2°, il vient $ta_+ x \wedge ta_- x = 0$. Comme

$$tax = ta_+ x - ta_- x ,$$

on a nécessairement $ta_+ x = (tax)_+ = t(ax)_+$. Ainsi $J_+(a_+ x - (ax)_+) = 0$, donc $a_+ x = (ax)_+$.

COROLLAIRE. - *Soit R un f-anneau muni d'un filtre idempotent positif $\mathfrak{D}$. Pour que $Q(R)$ soit un f-anneau (f-extension de $\bar{R} = R/T(R)$), il faut et il suffit que*

1° Pour $x \in Q(R)$; d_1 , $d_2 \in R_+$ tels que $d_1\, x$, $d_2\, x \in \overline{R}$,

$$(d_1\, x)_+ \wedge (d_2\, x)_- = 0$$

2° Pour $0 \leqslant x \in Q(R)$, d_1 , $d_2 \in R$ tels que $d_1\, x$, $d_2\, x \in \overline{R}$, $d_1 \wedge d_2 = 0$

$$d_1\, x \wedge d_2\, x = 0 \, .$$

PROPOSITION 10. - *Si R est un anneau commutatif, les conditions énoncées par les théorèmes 2 et 3 sont satisfaites par tout f-module.*

En effet, supposons que $d_1\, x$, $d_2\, x \in M$ avec d_1 , $d_2 \in R$. Pour tout $d \in (M \therefore x)_+$, on a

$$\begin{aligned} d((d_1\, x)_+ \wedge (d_2\, x)_-) &= d(d_1\, x)_+ \wedge d(d_2\, x)_- \\ &= (dd_1\, x)_+ \wedge (dd_2\, x)_- \\ &= (d_1\, dx)_+ \wedge (d_2\, dx)_- \\ &= d_1(dx)_+ \wedge d_2(dx)_- \\ &= 0 \, . \end{aligned}$$

Comme $M \therefore x \in \mathbb{Q}$, on en déduit $(d_1\, x)_+ \wedge (d_2\, x)_- = 0$.

Supposons maintenant que M est un f-module distributif. Si $0 \leqslant x \in Q(M)$, $d_1\, x$, $d_2\, x \in M$ et $d_1 \wedge d_2 = 0$, on a, pour tout $d \in (M \therefore x)_+$,

$$\begin{aligned} d(d_1\, x \wedge d_2\, x) &= dd_1\, x \wedge dd_2\, x \\ &= d_1\, dx \wedge d_2\, dx \\ &= (d_1 \wedge d_2)\, dx \\ &= 0 \, . \end{aligned}$$

Par conséquent, $d_1\, x \wedge d_2\, x = 0$.

Il existe d'autres anneaux pour lesquels ces conditions sont automatiquement satisfaites. Citons notamment les anneaux réguliers [4]. La condition 2° du théorème 3 est toujours satisfaite lorsque R est totalement ordonné.

4. Propriétés de transfert.

Nous dirons qu'un f-module M , sans torsion, est un $(q - f)$-*module* si $Q(M)$ est une f-extension de M .

Nous allons étudier quelques propriétés de M héritées par $Q(M)$.

PROPOSITION 11. - *Soit N un f-module sans torsion, et soit M un sous-f-module dense de N . L'application $C \longmapsto C \cap M$ est une bijection de l'algèbre de Boole des polaires de N sur l'algèbre de Boole des polaires de M .*

Il suffit de montrer que, pour $x \in N$,

$$x^{\perp\perp} \cap M = 0 \quad \text{implique} \quad x = 0 \qquad [3] \, .$$

Il existe un $D \in \mathfrak{D}$ avec $Dx \subseteq M$. On a $Dx \subseteq x^{\perp\perp} \cap M = 0$, donc $x = 0$. On voit facilement que l'application inverse est $K \longmapsto Cl_N(K)$.

PROPOSITION 12. - Soit M un $(q - f)$-module. Les propriétés suivantes se transfèrent de M à $Q(M)$:

(i) M totalement ordonné,

(ii) M basique,

(iii) M peut être plongé dans une somme directe de modules totalement ordonnés.

Plus généralement, toutes les propriétés qui s'expriment en termes d'orthogonalité se transfèrent.

Rappelons qu'un sous-module solide L de M est dit premier si M/L est totalement ordonné.

PROPOSITION 13. - On suppose $\mathfrak{D}$ positif. Soient N un f-module, et M un sous-f-module dense.

(i) Si L est un sous-module solide de M, $Cl_N(L)$ est solide,

(ii) Si L est premier, $Cl_N(L)$ est premier.

(i) Supposons $|x| \leqslant |y|$ et $y \in Cl_N(L)$. Il existe D, $C \in \mathfrak{D}$ avec $Dx \subseteq M$ et $Cy \subseteq L$. Alors $J = D \cap C \in \mathfrak{D}$. Si $d \in J_+$, on a

$$|dx| = d|x| \leqslant d|y| = |dy| ,$$

donc $dx \in L$.

Ainsi $RJ_+ x \subseteq L$, ce qui donne $x \in Cl_N(L)$.

(ii) $M/(Cl(L) \cap M)$ est totalement ordonné (comme image de M/L) et dense dans $N/Cl(L)$, qui est sans torsion. La proposition 12 montre que $N/Cl(L)$ est totalement ordonné.

PROPOSITION 14. - On suppose $\mathfrak{D}$ positif. Soit M un $(q - f)$-module. Si M est produit sous-direct de modules totalement ordonnés sans torsion, il en est de même de $Q(M)$.

Soit $(P_i)_{i \in I}$ la famille des sous-modules premiers et fermés de M. Par hypothèse, $\bigcap_{i \in I} P_i = 0$. D'après la proposition précédente, $Cl_N(P_i)$ est premier fermé, et on a

$$\left(\bigcap_{i \in I} Cl_N(P_i)\right) \cap M = \bigcap_{i \in I}(Cl(P_i) \cap M) = \bigcap_{i \in I} P_i = 0 .$$

On en déduit $\bigcap Cl_N(P_i) = 0$, car N est extension essentielle de M.

Si M est un f-module, nous dirons que L est un z-sous-module (Cf. [2]) si $x \in L$ implique $x^{\perp\perp} \subseteq L$.

PROPOSITION 15. - *Soit* R *un* f-*anneau réduit. Alors*

(i) $T(R)$ *est un* z-*idéal,*

(ii) $\overline{R} = R/T(R)$ *est réduit,*

(iii) *Si* $\overline{R}$ *est un* q - f-*anneau,* $Q(R)$ *est un* f-*anneau réduit.*

(i) En effet, on sait que dans un f-anneau réduit,

$$ab = 0 \text{ est équivalent à } |a| \wedge |b| = 0 .$$

Par conséquent, $a \in T(R)$ si, et seulement si, $a^{\perp} \in \mathbb{D}$. Si $a \in T(R)$ et $b \in a^{\perp\perp}$, on a $a^{\perp} \subseteq b^{\perp}$, donc $b^{\perp} \in \mathbb{D}$, et $b \in T(R)$.

(ii) Prenons a tel que $a^n \in T(R)$. Il existe un $D \in \mathbb{D}$ avec $Da^n = 0$. Pour tout $d \in D$, on a $da^n = 0$, donc $|d| \wedge |a| \wedge \ldots \wedge |a| = 0$, c'est-à-dire $|d| \wedge |a| = 0$, $da = 0$. Par conséquent, $a \in T(R)$.

(iii) Si $Q(R)$ est un f-anneau, ses éléments nilpotents forment un idéal bilatère N . On a $N \cap \overline{R} = 0$ puisque $\overline{R}$ est réduit. Comme $Q(R)$ est extension essentielle de $\overline{R}$, $N = 0$.

PROPOSITION 16. - *Soit* M *un* f-*module archimédien. Alors* $T(M)$ *est un* z-*sous-module*.

Pour tout $a \in R$, l'homothétie $x \longmapsto ax$ est un orthomorphisme de M . Il en résulte que l'ensemble des x vérifiant $ax = 0$ est une polaire [2]. Soient $x \in T(M)$ et $y \in x^{\perp\perp}$.

Il existe un $D \in \mathbb{D}$ tel que $Dx = 0$. Ainsi x appartient à l'annulateur de D , qui est une polaire, donc y lui appartient également, et par suite $y \in T(M)$.

PROPOSITION 17. - *On suppose* $\mathbb{D}$ *positif. Soit* M *un* f-*module sans torsion. Si* M *est archimédien, alors* M *est un* (q - f)-*module, et* $Q(M)$ *est archimédien. Si* M *est en plus distributif,* $Q(M)$ *l'est également.*

On sait que, dans un groupe réticulé archimédien, les orthomorphismes commutent [2]. Si d , $d' \in R$ et $x \in M$, on a donc

$$dd'x = d'dx .$$

On peut alors démontrer les conditions des théorèmes 2 et 3 exactement comme dans la proposition 10.

Pour montrer que $Q(M)$ est archimédien, prenons x , $y \in Q(M)$ avec $nx \leqslant y$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$. Il existe D , $C \in \mathbb{D}$ avec $Dx \subseteq M$ et $Cy \subseteq M$. Alors

$$J = D \cap C \in \mathbb{D} .$$

Si $d \in J_+$ on a $ndx < dy$ pour tout n . Ceci donne $dx \leqslant 0$.

On a donc $-J_+ x \subseteq M_+$, $-x \in N_+$, c'est-à-dire $x \leqslant 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON (F. W.). - Lattice-ordered rings of quotients, Canad. J. Math., t. 17, 1965, p. 434-448.

[2] BIGARD (A.). - Contribut on à la théorie des groupes réticulés (Thèse Sc. math., Paris 1969).

[3] BIGARD (A.). - Les orthomorphismes d'un espace réticulé archimédien, Proc. koninkl. Nederl. Akad. van Wet (à paraître).

[4] GEORGOUDIS (J.). - Torsion theories and f-rings (Thèse Ph. Dr, McGill University, Montréal 1972).

[5] LAMBEK (J.). - Torsion theories, additive semantics and ring of quotients. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 177).

[6] STEINBERG (S. A.). - Lattice-ordered injective nulls, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).

(Texte reçu le 12 mars 1973)

Alain BIGARD
8 rue Parrot
75012 PARIS