Danielle Salles

Anneaux semi-artiniens non commutatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 2, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A2_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 2, 6 p.

15 janvier 1973

ANNEAUX SEMI-ARTINIENS NON COMMUTATIFS

par Danielle SALLES

Les anneaux sont toujours unitaires, les modules sont des modules à gauche, unitaires.

Les anneaux semi-artiniens ont été introduits par C. NASTACESCU et N. POPESCU [3].

1. Définitions.

Socle d'un module. - Soient A un anneau, M un A-module non nul ; on appelle socle de M ($S(M)$) la somme de tous les sous-modules simples de M . C'est en particulier une somme directe partielle de sous-modules simples de M .

Anneau semi-artinien. - Un anneau A est semi-artinien (à gauche) si tout A-module non nul contient au moins un A-module simple.

Extension essentielle. - Un module M est extension essentielle d'un sous-module N si tout sous-module N' non nul de M est tel que $N \cap N' \neq \{0\}$.

2. Anneaux semi-artiniens commutatifs.

THÉORÈME. - *Soit A un anneau commutatif unitaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Tout A-module est extension essentielle de son socle,*

2° *Tout idéal premier de A est maximal, et pour tout A-module cyclique M : $\{\text{Ann } y \mid y \in M\}$ admet un élément maximal,*

3° *Tout A-module cyclique non nul contient au moins un A-module simple (i. e. A est semi-artinien),*

4° *Tout anneau quotient de A contient au moins un idéal minimal,*

5° *Tout A-module injectif est enveloppe injective d'une somme directe de A-modules simples.*

La propriété 2° n'est pas généralisable au cas où A n'est pas commutatif. Nous nous proposons de donner un cas où plusieurs propriétés des anneaux semi-artiniens commutatifs se généralisent aux non commutatifs.

DÉFINITIONS.

Duo-anneau (ou two-sided ring). - On dit qu'un anneau A unitaire est un duo-anneau si tout idéal à gauche de A est bilatère, et si tout idéal à droite de A est bilatère. Ces anneaux ont été étudiés par G. THIERRIN [6].

Quasi-duo-anneau. - Nous dirons que A est un quasi-duo-anneau si tout idéal à gauche maximal de A est bilatère, et si tout idéal à droite maximal de A est bilatère.

Les propriétés suivantes, vérifiées par les anneaux semi-artiniens commutatifs, sont généralisables aux quasi-duo-anneaux semi-artiniens.

PROPOSITION. - *Soient A un quasi-duo-anneau, semi-artinien à gauche, M un A-module à gauche, alors*

$$\mathrm{Ass}\, M \neq \emptyset \Longleftrightarrow M \neq \{0\} .$$

Remarque. - Nous disons que l'idéal bilatère premier I est associé à M s'il existe $x \in M$ tel que $I = \mathrm{Ann}\, x$.

Preuve. - Soit Ax un A-module simple inclus dans M , $\mathrm{Ann}\, x$ est maximal, donc bilatère, donc premier.

PROPOSITION. - *Soit A un quasi-duo-anneau, semi-artinien à gauche, alors tout idéal P premier de A est maximal.*

Preuve. - On munit A/P de sa structure de A-module à gauche cyclique. Ce dernier contient un A-module simple isomorphe au A-module $A/\mathfrak{M}$, où $\mathfrak{M}$ est un idéal à gauche maximal, donc bilatère. On montre que $P = \mathfrak{M}$.

PROPOSITION. - *Soient A un quasi-duo-anneau, semi-artinien à gauche, M un A-module co-irréductible, alors l'ensemble des annulateurs des sous-A-modules non nuls de M admet un élément maximum qui est un idéal maximal.*

Preuve. - Tout sous-module non nul M_1 de M contient un A-module simple Ay , et $\mathrm{Ann}\, y$ est un idéal maximal, donc bilatère, donc égal à $\mathrm{Ann}\, Ay$. Si M_2 est un autre sous-module non nul de M , contenant le A-module simple Az , on a

$$\mathrm{Ann}\, Ay = \mathrm{Ann}\, Az ,$$

car M est co-irréductible.

DÉFINITION. - *Un anneau A est un V-anneau à gauche si tout A-module à gauche simple est injectif.*

PROPOSITION. - *Soit A un V-anneau à gauche et à droite, quasi-duo-anneau : c'est un duo-anneau.*

Preuve. - On utilise une propriété, obtenue par C. NASTACESCU : un anneau est un V-anneau, à gauche si, et seulement si, tout idéal à gauche est intersection d'idéaux à gauche maximaux.

PROPOSITION. - *Soit A un V-anneau à gauche et à droite quasi-duo-anneau semi-artinien à gauche, alors, pour tout idéal à gauche R et tout idéal à droite L*

de A , *on a* $R \cap L = RL$.

Preuve. - A est un duo-anneau. D'après un résultat de NASTACESCU : un V-anneau semi-artinien est régulier. A est donc un duo-anneau régulier, et vérifie la propriété (critère de régularité d'un anneau de Kovacs).

Exemple de duo-anneau régulier semi-artinien : une somme directe finie de corps gauches.

3. Anneaux semi-artiniens non commutatifs.

Nous nous proposons maintenant de caractériser les anneaux semi-artiniens non commutatifs sans hypothèses complémentaires.

DÉFINITIONS.

Système localisant F d'idéaux à gauche d'un anneau A . - Soit F un ensemble d'idéaux à gauche de A , on dit que c'est un système localisant s'il vérifie les axiomes :

(1) $F \neq \emptyset$,

(2) $(\mathfrak{b} \in F$ et $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b})$ entraîne $\mathfrak{b}' \in F$,

(3) $(\mathfrak{b} \in F$ et $\mathfrak{b}' \in F)$ entraîne $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \in F$,

(4) $\mathfrak{b} \in F$ entraîne, $\forall\, x \in A$, $\mathfrak{b} : x \in F$,

(5) $(\mathfrak{b} \in F$ et, $\forall\, x \in \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}' : x \in F)$ entraîne $\mathfrak{b}' \in F$.

Objet F-fermé. - Soient X un objet de Mod A , F un système localisant d'idéaux à gauche de A ; on dit que X est F-fermé si, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de F et tout morphisme f de $\mathfrak{a}$ vers X , il existe un morphisme f^* de A vers X qui prolonge f .

Premier à gauche de A . - Soient F un système localisant de A , et $\mathcal{C}(F)$ la sous-catégorie pleine de Mod A des objets F-fermés. On dit que F est un premier à gauche de A si $\mathcal{C}(F)$ n'admet qu'un type d'objet simple dont l'enveloppe injective est un cogénérateur de $\mathcal{C}(F)$.

Idéal de définition. - Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche de A ; on pose

$$F_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{b} \in A \mid \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{b}\ , E(A/\mathfrak{a})) = 0\} .$$

N. POPESCU caractérise $F_{\mathfrak{a}}$ (dans [4]) de la façon suivante :

$\mathfrak{b} \in F_{\mathfrak{a}}$ si, et seulement si, $\forall\, x_1 \notin \mathfrak{a}$, $\forall\, x_2 \in A$, il existe $y \in A$ tel que $yx_1 \notin \mathfrak{a}$ et $yx_2 \in \mathfrak{b}$.

Cette caractérisation permet de montrer que $F_{\mathfrak{a}}$ est un système localisant. On dit que $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition pour F (système localisant de A) si $F = F_{\mathfrak{a}}$.

On pose, pour tout X objet de Mod A :

$$F(X) = \{\mathfrak{b} \in A \mid \operatorname{Hom}(A/\mathfrak{b}, E(X)) = 0\}$$

c'est un système localisant.

THÉORÈME. - Soit A un anneau unitaire, alors A est semi-artinien à gauche si,

(a) Tout premier à gauche de A admet un idéal de définition maximal,

(b) Tout injectif indécomposable Q de Mod A est premier (i. e. $F(Q)$ est un premier à gauche),

(c) Tout A-module à gauche est riche en co-irréductibles.

1° Condition nécessaire.

Définition. - On appelle $\mathfrak{F}$ la sous-catégorie pleine de mod A dont les objets sont les A-modules à gauche X tels que $\forall\, x \in X$, $\operatorname{Ann} x \in F$ (F système localisant), X est F-négligeable au sens de GABRIEL.

$\mathfrak{F}$ est localisante, il existe une catégorie quotient Mod $A/\mathfrak{F}$; on peut montrer que celle-ci est équivalente à $\mathcal{C}(F)$.

LEMME. - Soient F un premier à gauche de A, et S_F le foncteur canonique : $\mathcal{C}(F) \to$ Mod A . $\mathcal{C}(F)$ n'a qu'un type d'objet simple : U, alors $F = F(S_F(E(U)))$.

Preuve du lemme. - Soit $I \in F$, alors $A/I \in \mathfrak{F}$, et si T_F est le foncteur canonique ~~Mod A~~ $\to \mathcal{C}(F)$, on a $T_F(A/I) = 0$. Le foncteur S_F est adjoint de T_F , donc

$$\operatorname{Hom}_A(A/I\,,\, S_F(E(U))) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}(F)}(T_F(A/I)\,,\, E(U)) = 0\ ,$$

donc $I \in F(S_F\, E(U))$. Démonstration similaire lorsque $I \in F(S_F(E(U)))$, en remarquant que $E(U)$ est cogénérateur dans $\mathcal{C}(F)$.

Preuve de (a). - D'après GABRIEL, $S_F(E(U))$ est un injectif indécomposable de Mod A , donc enveloppe injective d'un simple isomorphe à $A/\mathfrak{M}$ où $\mathfrak{M}$ est un idéal à gauche maximal

$$F = F(S_F(E(U))) = F(E(A/\mathfrak{M})) = F_{\mathfrak{M}}\ .$$

Preuve de (b). - Q injectif indécomposable est enveloppe d'un simple $A/\mathfrak{M}$, donc

$$F(Q) = F(E(A/\mathfrak{M})) = F_{\mathfrak{M}}\ .$$

N. POPESCU a montré que $F_{\mathfrak{M}}$ est toujours un premier lorsque $\mathfrak{M}$ est maximal.

Preuve de (c). - C'est une propriété classique des semi-artiniens, tout A module simple étant un co-irréductible.

2° Condition suffisante.

Soit M un A-module, il contient au moins un co-irréductible N dont l'enveloppe injective Q est indécomposable. $F(Q)$ est premier par hypothèse, donc admet un idéal de définition maximal $\mathfrak{M}$. On a

$$F(Q) = F(A/\mathfrak{M}) = F_{\mathfrak{M}} = F(E(A/\mathfrak{M})) .$$

POPESCU a montré qu'alors $Q \simeq E(A/\mathfrak{M})$. On en déduit que M contient un A-module simple isomorphe à $A/\mathfrak{M}$. L'anneau A est semi-artinien à gauche.

Définition. - Soient A un anneau unitaire, et X un A-module à gauche ; on dit que X est co-primaire si $F(X)$ est un premier à gauche et si, pour tout sous-module propre X' de X, on a $F(X) = F(X')$.

PROPOSITION. - *Soient A un anneau unitaire semi-artinien, et X un A-module, alors : X est co-primaire si, et seulement si, le socle de X est isotypique.*

1° Condition nécessaire. -

$F(X)$ est premier, donc il existe un injectif indécomposable Q $(= S_{F(X)}(E(U)))$ tel que $F(X) = F(Q)$, A étant semi-artinien, on a $Q \simeq E(A/\mathfrak{M})$.

Soient $A/\mathfrak{M}'$ une composante du socle de X et $Q' = E(A/\mathfrak{M}')$, alors

$$Q' \cap X \neq \{0\} ,$$

donc

$$F(Q') \subset F(Q' \cap X) = F(X) = F(E(X)) \subset F(Q') ,$$

donc $F(Q') = F(X) = F(Q)$; on en déduit $Q \simeq Q'$.

2° Condition suffisante.

Soit S une composante simple du socle de X, on a $S \subset X$, donc $F(X) \subset F(S)$.

On montre que l'inclusion stricte est impossible car, si $\mathfrak{a} \in F(S)$, $\mathfrak{a} \notin F(X)$, tout morphisme non nul de $A/\mathfrak{a}$ vers $E(X)$ induit un morphisme non nul de $A/\mathfrak{a}$ vers $E(S')$. Donc

$$F(X) = F(S') = F(A/\mathfrak{M}) = F_{\mathfrak{M}} \quad (= F(S))$$

ce qui montre que $F(X)$ est premier.

Soit S' une composante simple du socle d'un sous-module X' de X. On montre de même que $F(X') = F(S')$, or $F(S') = F(S)$ par hypothèse, car $S' \simeq S$, donc $F(X') = F(X)$.

Définition. - Soit A un anneau ; un idéal $\mathfrak{a}$ à gauche de A est dit quasi primaire si $F_{\mathfrak{a}}$ est un premier à gauche.

PROPOSITION. - *Soient A un anneau semi-artinien, $\mathfrak{a}$ un idéal de A, alors, pour que $A/\mathfrak{a}$ soit co-primaire, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ soit co-primaire et qu'il existe un idéal à gauche maximal $\mathfrak{M}$ tel que $F_{\mathfrak{a}} = F_{\mathfrak{M}}$.*

1° Condition nécessaire.

$F_{\mathfrak{a}}$ est premier, et $A/\mathfrak{a}$ contient un simple isomorphe à $A/\mathfrak{M}$, donc $F_{\mathfrak{a}} = F_{\mathfrak{M}}$.

2° Condition suffisante.

Nous montrons que le socle de $A/\mathfrak{a}$ est isotypique. En utilisant la construction des morphismes de $\mathcal{C}(F_{\mathfrak{M}})$ de GABRIEL, on montre que $T_{F_{\mathfrak{M}}}(A/\mathfrak{M})$ est un objet simple non nul dans $\mathcal{C}(F_{\mathfrak{M}})$. Si $A/\mathfrak{M}'$ est une composante du socle de $A/\mathfrak{a}$, on a

$$T_{F_{\mathfrak{M}}}(A/\mathfrak{M}) \simeq T_{F_{\mathfrak{M}}}(A/\mathfrak{M}') ,$$

car $\mathcal{C}(F_{\mathfrak{M}})$ n'a qu'un type d'objet simple.

On utilise de nouveau la définition des morphismes de $\mathcal{C}(F_{\mathfrak{M}})$ pour montrer que $A/\mathfrak{M} \simeq A/\mathfrak{M}'$, donc (socle $(A/\mathfrak{a})$) est isotypique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math., Paris 1961).

[2] KOVACS (Laszlo). - A note on regular rings, Publ. Math., Debrecen, t. 4, 1955, p. 465-468.

[3] NASTACESCU (C.) et POPESCU (N.). - Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 357-368.

[4] POPESCU (Nicolae). - Le spectre à gauche d'un anneau, J. of Algebra, t. 18, 1971, p. 213-228.

[5] SALLES (Danielle). - Anneaux semi-artiniens non commutatifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 1223-1225.

[6] THIERRIN (Gabriel). - On duo rings, Canad. math. Bull., t. 3, 1960, p. 167-172.

(Texte reçu le 12 mars 1973)

Danielle SALLES
10 rue Saint-Ursin
EPRON
14870 CAMBES EN PLAINE