Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marie-Paule Malliavin-Brameret

Majoration des caractéristiques d'Euler-Poincaré partielles

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. nº 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A1_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 1, 10 p.
8 janvier 1973

MAJORATION DES CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ PARTIELLES

par Marie-Paule MALLIAVIN-BRAMERET

Tous les anneaux sont noethériens, commutatifs et unitaires. Tous les modules sont unitaires de type fini. La plupart des résultats de cet exposé ont été publiés en [5].

Nous utiliserons certains résultats de cohomologie locale que nous rappelons ici brièvement ([2] et [7]).

Soient A un anneau, M un A-module, et I un idéal de A ; on note

$$(0 : I)_M = \{m \in M\ ,\ \ I.m = 0\}$$

et on pose

$$H_I^0(M) = \{m \in M\ ,\ \ \exists\ N > 0\ ,\ \ I^N.m = 0\} = \cup_k\ (0 : I^k)_M\ ,$$

c'est un sous-module de M .

Si A est local et $I = \mathfrak{m}$, $H_{\mathfrak{m}}^0(M)$ est le plus grand sous-module de longueur finie de M .

Si $f : M \to N$ est un A-homomorphisme, $H_I^0(f)$ désigne la restriction de f à $H_I^0(M) \to H_I^0(N)$. Alors H_I^0 est un foncteur additif covariant A-linéaire de la catégorie des A-modules dans elle-même : il est appelé <u>foncteur de cohomologie locale</u> par rapport à l'idéal I .

Le foncteur H_I^0 est exact à gauche, i. e. si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de A-modules, on a :

$$0 \to H_{\mathfrak{m}}^0(M') \to H_{\mathfrak{m}}^0(M) \to H_{\mathfrak{m}}^0(M'')\ .$$

Donc, pour chaque i , les dérivés droits $R^i\ H_I^0$ de H_I^0 sont des foncteurs A-linéaires additifs covariants de la catégorie des A-modules dans elle-même, et $R^0\ H_I^0 = H_I^0$. De plus, pour chaque n , les foncteurs $R^n\ H_I^0$ et $\varinjlim_k \mathrm{Ext}_A^n(\frac{A}{I^k}\ ,\ .)$ sont naturellement équivalents, et les $R^n\ H_I^0$ commutent aux limites directes.

On note $H_I^i(M) = R^i\ H_I^0(M)$.

Si M est un A-module de dimension de Krull s , on a $H_I^i(M) = 0$ pour $i > s$, et si, de plus, $I = \mathfrak{m}$, idéal maximal de l'anneau local A , on a $H_{\mathfrak{m}}^s(M) \neq 0$ si $s = K - \dim M$; enfin, toujours dans ce cas, les modules $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ sont artiniens, et la profondeur de M (ou codimension) est le plus petit entier i pour lequel $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq 0$.

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> A <u>un anneau local noetherien d'idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$. <u>Soit</u> $x_1 , \dots , x_d$ <u>une A-suite contenue dans</u> $\mathfrak{m}$, <u>et soit</u> I <u>l'idéal de</u> A <u>engendré par les</u> x_i . <u>Soit</u> M <u>un A-module de type fini. On suppose que</u> $\mathrm{Tor}_1^A(\frac{A}{I} , M)$ <u>est de longueur finie. Alors</u> $\mathrm{Tor}_i^A(\frac{A}{I} , M)$ <u>est, pour tout</u> i , <u>un A-module de longueur finie, et est nul pour</u> i <u>assez grand. Si on pose</u>

$$\tilde{\chi}_0(\frac{A}{I} , M) = \lg H^0_{\mathfrak{m}}(\frac{M}{IM}) - \chi_1^A(\frac{A}{I} , M) ,$$

<u>où</u> $H^0_{\mathfrak{m}}(\frac{M}{IM})$ <u>désigne le plus grand sous-module de longueur finie de</u> $\frac{M}{IM}$, <u>on a</u> $\tilde{\chi}_0(\frac{A}{I} , M) \geqslant 0$. <u>Enfin, on a</u> $\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{I} , M) = 0$ <u>dans les deux cas suivants</u> :

(a) $\lg \frac{M}{IM} < \infty$ <u>et</u> $\dim M < d$,

(b) $\operatorname{codim} M \geqslant d + 1$ <u>et</u> $x_1 , x_2 , \dots , x_d$ <u>est une</u> M-<u>suite</u>.

<u>Preuve</u>. - D'après [3], on sait que $\mathrm{Tor}_i^A(\frac{A}{I} , M)$ est de longueur finie pour $i \geqslant 1$, est nul pour $i \gg 0$, car $dh_A (A/I) < \infty$.

On procède ensuite par récurrence sur d . Si $d = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons $d \geqslant 1$, et la positivité de $\tilde{\chi}_0^A((A/I) , M)$ démontrée par une suite de longueur $\leqslant d - 1$. On a la suite spectrale, où l'on a posé $x = x_1$,

$$\mathrm{Tor}_i^{A/xA}(\mathrm{Tor}_j^A(\frac{A}{xA} , M) , \frac{A}{I}) \Rightarrow \mathrm{Tor}_{i+j}^A(M , \frac{A}{I}) .$$

Il en résulte une suite exacte :

$$\dots \to \mathrm{Tor}_2^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I}) \to {}_xM \otimes \frac{A}{I} \to \mathrm{Tor}_1^A(M , \frac{A}{I}) \to \mathrm{Tor}_1^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I}) \to 0 ,$$

où $\mathrm{Tor}_1^A(A/xA , M) = {}_xM = \{m \in M , \ xm = 0\}$. On en déduit que

$$\lg[\mathrm{Tor}_1^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I})] < \infty .$$

Donc que

$$\lg[\mathrm{Tor}_i^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I})] < \infty ;$$

d'où $\lg({}_xM \otimes \frac{A}{I}) < \infty$ et, par suite,

$$\lg \mathrm{Tor}_i^{A/xA}({}_xM , \frac{A}{I}) < \infty \quad \text{pour tout} \quad i \geqslant 0 .$$

De plus, on a

$$\chi_1^A(M , \frac{A}{I}) = \chi_1^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I}) + \chi_0^{A/xA}({}_xM , \frac{A}{I}) .$$

Mais comme $M \otimes_A \frac{A}{I} \simeq \frac{M}{xM} \otimes_{A/xA} \frac{A}{I}$, on a :

$$\tilde{\chi}^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I}) - \chi_0^{A/xA}({}_xM , \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_0^A(M , \frac{A}{I}) .$$

Soit r un entier tel que x ne soit pas diviseur de zéro dans $x^r M$. Posons $Q = (x^r M)/(x^{r+1} M)$. Alors, on a :

$$0 \to K_1 \to \frac{M}{xM} \to \frac{xM}{x^2 M} \to 0$$

$$0 \to K_2 \to \frac{xM}{x^2 M} \to \frac{x^2 M}{x^3 M} \to 0$$

$$\dots$$

$$0 \to K_r \to \frac{x^{r-1} M}{x^r M} \to Q \to 0$$

et d'autre part :

$$0 \to {}_xM \cap xM \to {}_xM \to K_1 \to 0$$

$$0 \to {}_xM \cap x^2 M \to {}_xM \cap xM \to K_2 \to 0$$

$$\ldots$$

Il en résulte que $\lg(K_i \otimes A/I) < \infty$ pour tout i , et que

$$\chi_0^{A/xA}({}_xM , \frac{A}{I}) = \Sigma_{i=1}^r \chi_0^{A/xA}(K_i , \frac{A}{I}) .$$

D'autre part, on a

$$\ldots \to K_1 \otimes \frac{A}{I} \to \frac{M}{xM} \otimes \frac{A}{I} \to \frac{xM}{x^2 M} \otimes \frac{A}{I} \to 0 .$$

Soit $U = \ker(\frac{M}{x} \otimes \frac{A}{I} \to \frac{x}{x^2} \otimes \frac{A}{I})$. Alors U est de longueur finie comme quotient de $K_1 \otimes A/I$. Donc $H_{\mathfrak{m}}^0(U) = U$ et $H_{\mathfrak{m}}^1(U) = 0$.

Il résulte alors que

$$\lg U - \chi_0^{A/xA}(K_1 , \frac{A}{I}) + \chi_1^{A/xA}(\frac{xM}{x^2 M} , \frac{A}{I}) - \chi_1^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I}) = 0 .$$

Mais $0 \to U \to H_{\mathfrak{m}}^0(\frac{M}{xM} \otimes \frac{A}{I}) \to H_{\mathfrak{m}}^0(\frac{xM}{x^2 M} \otimes \frac{A}{I}) \to 0$, donc

$$- \chi_0^{A/xA}(K_1 , \frac{A}{I}) + \tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I}) - \tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{xM}{x^2 M} , \frac{A}{I}) = 0 ,$$

donc

$$\tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{M}{xM} , \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_0^{A/xA}(\frac{xM}{x^2 M} , \frac{A}{I}) + \chi_0^{A/xA}(K_1 , \frac{A}{I}) = \ldots$$

$$= \tilde{\chi}_0^{A/xA}(Q , \frac{A}{I}) + \Sigma_{i=1}^r \chi_0^{A/xA}(K_i , \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_0^{A/xA}(Q , \frac{A}{I}) + \chi_0^{A/xA}({}_xM , \frac{A}{I}) ,$$

donc

$$\tilde{\chi}_0^{A}(M , \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}_0^{A/xA}(Q , \frac{A}{I}) ,$$

et on conclut à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

Supposons que :

(a) $\lg(M \otimes A/I) < \infty$ et $\dim M < d$, alors (cf. [3])

$$\tilde{\chi}_0^{A}(M , \frac{A}{I}) = \chi_0^{A}(M , \frac{A}{I}) = 0 .$$

(b) Supposons que $\operatorname{codim} M \geqslant d + 1$ et que $x_1 , \ldots x_d$ soient une M-suite, alors on sait que

$$\operatorname{Tor}_i^A(\frac{A}{I} , M) = 0 \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1 ,$$

car les $\operatorname{Tor}_i^A((A/I) , M)$ sont les modules d'homologies du complexe de Koszul associé à la suite $x_1 , \ldots , x_d$ sur M , et ce complexe est acyclique sous les hypothèses présentes. Mais alors, on a [1]

$$\operatorname{codim} M = \operatorname{codim} \frac{M}{IM} + \operatorname{dh} \frac{A}{I}$$

$$= \operatorname{codim} \frac{M}{IM} + d \geqslant d + 1$$

donc $\operatorname{codim} M/(IM) \geqslant 1$. Donc $H^0_{\mathfrak{m}}(M/(IM)) = 0$. Par suite, $\tilde{\chi}_0^A(M , (A/I)) = 0$.

Lorsque M est extension d'un module de type (a) par un module de type (b), i. e. lorsque l'on a une suite exacte de la forme :

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0 ,$$

où $\lg(M'/(IM')) < \infty$ et $\dim M' < d$, et où $\operatorname{codim} M'' \geqslant d + 1$ et $x_1 , \dots , x_d$ est une M''-suite, on a aussi

$$\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{I} , M) = 0 .$$

On peut se demander si la réciproque est vraie ; elle l'est si $d \leqslant 1$

<u>Preuve</u>. - Si $d = 0$, c'est évident, puisque alors $\tilde{\chi}_0^A(A , M) = H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ entraîne soit $M = 0$, soit $\operatorname{codim} M \geqslant 1$.

Si $d = 1$, on a la suite

$$0 \to M_0 \to M \to \overline{M} \to 0 , \qquad \text{où } M_0 = H^0_{\mathfrak{m}}(M) .$$

Alors

$$\tilde{\chi}_0^A(\frac{A}{xA} , M) = \chi_0^A(M_0 , \frac{A}{xA}) + \tilde{\chi}_0^A(\overline{M} , \frac{A}{xA}) = 0 ,$$

d'où

$$\chi_0^A(M_0 , \frac{A}{xA}) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}_0^A(\overline{M} , \frac{A}{xA}) = 0 ,$$

d'où $\dim M_0 \leqslant 0$ (ce qui n'est rien de plus que : M_0 est de longueur finie), et $\tilde{\chi}_0^A(\overline{M} , A/(xA)) = 0$ avec $\operatorname{codim} \overline{M} \geqslant 1$. Donc on est ramené au cas où $\operatorname{codim} M \geqslant 1$.

Montrons que ${}_xM = 0$; s'il n'en était pas ainsi, comme ${}_xM$ est de longueur finie, on aurait (cf. [1])

$$\operatorname{codim} M = \operatorname{dh} \frac{A}{xA} + \operatorname{codim} {}_xM - 1 = 0 ,$$

ce qui n'est pas. Donc ${}_xM = 0$, et $\{x\}$ est une M-suite. De plus,

$$\operatorname{codim} M = \operatorname{codim} \frac{M}{xM} + \operatorname{dh} \frac{A}{xA} = \operatorname{codim} \frac{M}{xM} + 1 .$$

Mais avec les notations de la proposition 1, on a $M/(xM) = Q$, avec

$$\tilde{\chi}_0^A(M , \frac{A}{xA}) = \tilde{\chi}_0^{A/xA}(Q , \frac{A}{xA}) = H^0_{\mathfrak{m}}(Q) = 0 ,$$

donc $\operatorname{codim} Q \geqslant 1$. D'où $\operatorname{codim} M \geqslant 2$.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> A <u>un anneau local noetherien d'idéal maximal</u> $\mathfrak{m}$. <u>Soit</u> $I = Ax_1 + \dots + Ax_d$ <u>un idéal engendré par une</u> A-<u>suite</u> ; <u>et soit</u> M <u>un</u> A-<u>module de type fini</u>. <u>Alors l'ensemble des idéaux premiers minimaux associés à</u> $\operatorname{Tor}_1^A(\frac{A}{I} , M)$ <u>est contenu dans</u> $\operatorname{Ass}(M/(IM))$.

<u>Preuve</u>. - Par localisation, on se ramène au cas où $\operatorname{Tor}_1^A((A/I) , M)$ est de longueur finie non nulle. Donc $\{\mathfrak{m}\} = \operatorname{Ass} \operatorname{Tor}_1^A((A/I) , M)$.

Comme $\operatorname{Tor}_1^A((A/I) , M) \neq 0$, on a $\chi_1^A((A/I , M) > 0$ (cf. [3]).

Donc $H^0_{\mathfrak{m}}(M/(IM)) > 0$. Donc

$$\operatorname{codim} \frac{M}{IM} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{m} \in \operatorname{Ass}(\frac{M}{M}) .$$

Remarque. - On a donc les inclusions :

$$\operatorname{Ass} \operatorname{Tor}_1^A(\frac{A}{J} , M) \subset \operatorname{Supp} \operatorname{Tor}_1^A(\frac{A}{I} , M) \subseteq \operatorname{Supp}(\frac{M}{IM}) ,$$

et les idéaux premiers associés minimaux à $\operatorname{Tor}_1^A((A/I) , M)$ sont contenus dans $\operatorname{Ass}(M/(IM))$.

PROPOSITION 2. - Soit A un anneau local noetherien, Cohen-Macaulay, et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit $x_1 , \ldots , x_d$ une A-suite contenue dans $\mathfrak{m}$, et soit I l'idéal engendré par les x_i . Soit M un A-module de type fini tel que

$$\operatorname{Tor}_k^A(M , \frac{A}{I})$$

est de longueur finie pour un entier $k \geqslant 2$. Alors $\operatorname{Tor}_i^A(M , (A/I))$ est de longueur finie pour tout $i \geqslant k$, et nul pour $i \gg 0$, et

$$\tilde{\chi}^A_{k-1}(\frac{A}{I} , M) = \lg H^0_{\mathfrak{m}}(\operatorname{Tor}^A_{k-1}(\frac{A}{I} , M)) - \chi^A_2(\frac{A}{I} , M)$$

est positif.

Preuve. - On se ramène au cas où $k = 2$ à l'aide d'un module de syzygie convenable. Considérons une suite exacte

$$0 \to M' \to L \to M \to 0 ,$$

où L est libre. On a $\operatorname{Tor}_1^A(M' , (A/I)) = \operatorname{Tor}_2^A(M , (A/I))$ de longueur finie. Donc

$$\tilde{\chi}^A_0(\frac{A}{I} , M') = \lg H^0_{\mathfrak{m}}(\frac{M}{IM'}) - \chi^A_2(M , \frac{A}{I}) \geqslant 0$$

d'après la proposition 1.

D'autre part, on a la suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^A(M , \frac{A}{I}) \to \frac{M'}{IM'} \to \frac{L}{IL} \to \frac{M}{IM} \to 0 .$$

Comme A est Macaulay, ou bien $H^0_{\mathfrak{m}}(L/(IL)) = 0$, ou bien I est $\mathfrak{m}$-premier.

Dans le premier cas, $H^0_{\mathfrak{m}}(\operatorname{Tor}_1^A(M , (A/I))) \simeq H^0_{\mathfrak{m}}(M'/(IM'))$, donc

$$\tilde{\chi}^A_0(\frac{A}{I} , M') = \tilde{\chi}^A_1(M , \frac{A}{I})$$

est positif.

Dans le second cas, $\lg L/(IL) < \infty$. Donc $\lg M/(IM) < \infty$, et

$$\chi^A_1(M , \frac{A}{I}) = \tilde{\chi}^A_1(M , \frac{A}{I}) .$$

est positif.

COROLLAIRE. - Avec les mêmes hypothèses sur A et I que dans la proposition 2, on a que les idéaux premiers associés minimaux de $\operatorname{Tor}_k^A((A/I) , M)$ sont associés à $\operatorname{Tor}_{k-1}^A((A/I) , M)$.

Remarque. - On peut se poser la question de savoir à quelle condition, sous les hypothèses de la proposition 2, on a $\tilde{\chi}_1^A((A/I)\ , M) = 0$. Ici encore nous n'avons qu'une condition suffisante, à savoir, si $\operatorname{codim} M \geqslant d$, alors $\tilde{\chi}_1^A((A/I)\ , M) = 0$.

Preuve. - Si $x_1 , \ldots , x_d$ est une M-suite, alors $\operatorname{Tor}_i^A((A/I)\ , M) = 0$ pour $i \geqslant 1$. Donc $\tilde{\chi}_1^A((A/I)\ , M) = 0$.

Supposons que $x_1 , \ldots , x_d$ ne soit pas une M-suite, mais que $\operatorname{codim} M \geqslant d$. Alors, $\operatorname{Tor}_1^A((A/I)\ , M) \neq 0$ si $\operatorname{codim}[\operatorname{Tor}^A{}_1((A/I)\ , M)] \geqslant 1$, et

$$\tilde{\chi}_1^A(\frac{A}{I}\ , M) = - \chi_2^A(\frac{A}{I}\ , M)$$

est nul, puisque $\chi_2^A((A/I)\ , M)$ est positif. Montrons que l'on ne peut avoir $\operatorname{codim}[\operatorname{Tor}_1^A((A/I)\ , M)] = 0$; sinon on aurait (cf. [1])

$$\operatorname{codim} M = \operatorname{dh} \frac{A}{I} - q\ ,$$

où q est le plus grand entier tel que $\operatorname{Tor}_q^A((\frac{A}{I}\ , M) \neq 0$, et on a $q \geqslant 1$, donc $\operatorname{codim} M \leqslant d - 1$ contre l'hypothèse. Par contre, on obtient le résultat.

THÉORÈME 1. - Soit B un anneau local régulier complet et non ramifié. Soient M et N deux B-modules de type fini. Si $\operatorname{Tor}_1^B(M\ , N)$ est de longueur finie, alors $\operatorname{Tor}_i^B(M\ , N)$ est de longueur finie pour $i \geqslant 1$, et on a

$$\tilde{\chi}_0^B(M\ , N) = \lg H^0_{\mathfrak{m}}(M \otimes_B N) - \chi_1^B(M\ , N)$$

est positif.

COROLLAIRE. - Sous les hypothèses précédentes sur B , l'ensemble des idéaux premiers associés minimaux de $\operatorname{Tor}_1^B(M\ , N)$ est contenu dans $\operatorname{Ass}_B(M \otimes_B N)$.

Preuve. - On a, d'après les théorèmes de structure de Cohen,

$$B = R[[T_1\ , \ldots\ , T_n]]$$

où R est un anneau de valuation discrète ou un corps, et où les T_i sont des indéterminées.

Soit $A = B \hat{\otimes}_k B$ [6]. On applique la suite spectrale [6]

$$\operatorname{Tor}_p^A(B\ , \hat{\operatorname{Tor}}_q^R(M\ , N)) \Longrightarrow \operatorname{Tor}_{p+q}^B(M\ , N)$$

qui, puisque la dimension de R est $\leqslant 1$, dégénère pour donner la suite exacte :

$$\ldots \to \operatorname{Tor}_{j-1}^A(B\ , \hat{\operatorname{Tor}}_1^R(M\ , N)) \to \operatorname{Tor}_j^B(M\ , N) \to \operatorname{Tor}_j^A(B\ , M \hat{\otimes}_R N)$$
$$\to \ldots \to B \otimes_A \hat{\operatorname{Tor}}_1^R(M\ , N) \to \operatorname{Tor}_1^B(M\ , N) \to \operatorname{Tor}_1^A(B\ , M \hat{\otimes}_R N) \to 0$$

Puisque A et B sont réguliers, l'idéal I de A , définissant B , est engendré par une A-suite de longueur n .

Comme $\lg \operatorname{Tor}_1^B(M\ , N) < \infty$, on a $\lg \operatorname{Tor}_1^A(B\ , M \hat{\otimes}_R N) < \infty$. Donc

$$\lg \operatorname{Tor}_2^A(B\ , M \otimes_R N) < \infty\ ,$$

et par conséquent

$$\lg \; B \otimes_A \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(M , N) < \infty .$$

Donc :

$$\chi_1^B(M , N) = \chi_1^A(B , M \hat{\otimes}_R N) + \chi_0^A(B , \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(M , N)) ,$$

Donc

$$\tilde{\chi}_0^B(M , N) = \tilde{\chi}_0^A(B , M \hat{\otimes}_R N) - \chi_0^A(B , \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(M , N)) .$$

Si B est équicaractéristique, alors $\hat{\mathrm{Tor}}_1^R(M , N) = 0$, puisque R est un corps. Donc $\tilde{\chi}_0^B(M , N) = \tilde{\chi}_0^A(B , M \hat{\otimes}_R N) \geqslant 0$, d'après la proposition 1.

Si B est d'inégales caractéristiques, et si π , générateur de l'idéal maximal de R , ne divise pas zéro dans M ou N , alors $\hat{\mathrm{Tor}}_1^R(M , N) = 0$, et encore dans ce cas $\tilde{\chi}_0^B(M , N) = \tilde{\chi}_0^A(B , M \hat{\otimes}_R N) \geqslant 0$.

Pour passer au cas général, on utilisera le lemme suivant qui fait partie du lemme 2 de [4].

LEMME. - Supposons que R ne soit pas un corps, et soient P , Q deux B-modules annulés par une puissance de π , et tels que $\lg_A(B \otimes_A \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(P , Q)) < \infty$, alors, $\lg(P \otimes_B Q) < \infty$.

Preuve. - On raisonne par récurrence sur $d = m + n$, où m est le plus petit entier tel que $\pi^m P = 0$, et n le plus petit entier tel que $\pi^n Q = 0$.

Supposons d'abord que $\pi P = \pi Q = 0$. Alors on a $P \hat{\otimes}_R Q = \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(P , Q)$, donc $P \otimes_B Q$ est de longueur finie.

Supposons $m > 1$. On a les suites exactes

$$0 \to \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(\pi P , Q) \to \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(P , Q) \to X \to 0$$

$$0 \to X \to \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(\frac{P}{\pi P} , Q) \to Y \to 0$$

$$0 \to Y \to \pi P \hat{\otimes}_R Q \to Z \to 0$$

$$0 \to Z \to P \hat{\otimes}_R Q \to \frac{P}{\pi P} \hat{\otimes}_R Q \to 0 .$$

De la première résulte

$$\lg(X \otimes_A B) \quad \text{et} \quad \lg(B \otimes \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(\pi P , Q)) < \infty ,$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $\lg(\pi P \otimes_B Q) < \infty$, c'est-à-dire

$$\lg[B \otimes_A (\pi P \hat{\otimes}_R Q)] < \infty ;$$

donc, d'après la troisième, on a

$$\lg[B \otimes_A Y] < \infty \quad \text{et} \quad \lg[B \otimes_A Z] < \infty ,$$

donc $\lg[B \otimes_A \hat{\mathrm{Tor}}_1^R((P/\pi P) , Q)] < \infty$, d'après la seconde. D'où $\lg((P/\pi P) \otimes_B Q) < \infty$ par hypothèse de récurrence, d'où

$$\lg(B \otimes_A (P \hat{\otimes}_R Q)) = \lg(P \otimes_B Q) < \infty ,$$

d'après la quatrième.

Fin de la démonstration du théorème 1. - Soit $\xi = \pi^n$ tel que π ne divise pas zéro dans $M/({}_\xi M)$, et soit $\zeta = \pi^m$ tel que π ne divise pas zéro dans ${}_\zeta N$. Alors

$$\hat{\mathrm{Tor}}_1^R({}_\xi M , N) = \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(M , N) = \hat{\mathrm{Tor}}_1^R({}_\zeta N , {}_\xi M)$$

et

$$\tilde{\chi}_0^B(M , N) = \tilde{\chi}_0^A(B , M \otimes_R N) - \chi_0^A(B , \hat{\mathrm{Tor}}_1^R(M , N))$$

On a la suite exacte :

$$0 \to {}_\xi M \hat{\otimes}_R {}_\zeta N \to M \hat{\otimes}_R N \to S \to 0 .$$

D'où, d'après le lemme précédent,

$$\lg(U) - \chi_0^B({}_\xi M , {}_\zeta N) + \chi_1^B(R , S) - \chi_1^B(M , N) = 0$$

où U est le noyau de $M \otimes_B N \to B \otimes_A S$. D'où

$$\tilde{\chi}_0^B(M , N) = H^0(M \otimes_R N) - \lg(U) + \chi_0^B({}_\xi M , {}_\zeta N) - \chi_1^A(B , S)$$

comme

$$0 \to U \to M \otimes_B N \to B \otimes_A S \to 0 ,$$

et que U est de longueur finie, on a :

$$0 \to U \to H^0(M \otimes_B N) \to H^0(B \otimes_A S) \to 0 ,$$

donc

$$\tilde{\chi}_0^B(M , N) = \chi_0^B({}_\xi M , {}_\zeta N) + \tilde{\chi}_0^A(B , S) \geqslant 0 .$$

PROPOSITION 3. - Soit B un anneau de séries formelles sur un anneau de valuation discrète R .

Soient M , N deux B-modules tels que, il existe $x \in \mathfrak{m}(B)$ non diviseur de zéro dans M , ni dans $M \otimes_B N$. Alors, ou bien $\mathrm{Tor}_i^B(M , N) = 0$ $(i \geqslant 1)$, ou bien x n'appartient à aucun idéal premier associé minimal de $\mathrm{Tor}_1^B(M , N)$.

Preuve. - On a

$$0 \to M \xrightarrow{.x} M \to \frac{M}{xM} \to 0$$

$$\mathrm{Tor}_1^B(M , N) \xrightarrow{.x} \mathrm{Tor}_1^B(M , N) \to \mathrm{Tor}_1^B(\frac{M}{xM} , N) \to M \otimes N \xrightarrow{.x} M \otimes N \to \frac{M}{xM} \otimes N \to 0 .$$

Comme x n'est pas diviseur de zéro dans $M \otimes N$, cette suite se scinde pour donner

$$\xrightarrow{.x} \mathrm{Tor}_1^B(M , N) \to \mathrm{Tor}_1^B(\frac{M}{xM} , N) \to 0 .$$

Supposons $\mathrm{Tor}_1^B(M , N) \neq 0$, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé minimal à $\mathrm{Tor}_1^B(M , N)$ tel que $x \in \mathfrak{p}$. Alors

$$\chi_1^{B_\mathfrak{p}}(\frac{M_\mathfrak{p}}{xM_\mathfrak{p}} , N_\mathfrak{p}) = 0 ,$$

et $\mathrm{Tor}_1^B(\frac{M}{xM} , N)_\mathfrak{p} = 0$, donc $\mathrm{Tor}_1^B(M , N)_\mathfrak{p} = 0$, ce qui est impossible.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> B <u>un anneau de séries formelles sur un anneau de valuation discrète</u> , M <u>et</u> N <u>deux</u> B-<u>modules tels que, ou bien</u> dim M < dim B , <u>ou bien</u> codim N $\geqslant 1$, <u>et tels que</u> $\lg[\mathrm{Tor}_2^B(M , N)] < \infty$, <u>alors</u>

$$\tilde{\chi}_1^B(M , N) = \lg[H_{\mathfrak{m}}^0(\mathrm{Tor}_1^B(M , N))] - \chi_2^B(M , N)$$

<u>est positif</u>.

<u>Preuve</u>. - Soit $0 \to M' \to L \to M \to 0$ une suite exacte, où L est libre sur B . Il en résulte les suites exactes :

$(*)_1$
$$0 \to \mathrm{Tor}_1^B(M , N) \to M' \otimes_B N \to U \to 0$$

$(*)_2$
$$0 \to U \to L \otimes_B N \to M \otimes_B N \to 0$$

et $\mathrm{Tor}_1^B(M' , N) = \mathrm{Tor}_2^B(M , N)$ est de longueur finie ; donc

$$\chi_2^B(M , N) = \chi_1^B(M' , N) .$$

De $(*)_1$, il résulte :

$$0 \to H_{\mathfrak{m}}^0(\mathrm{Tor}_1^B(M , N) \xrightarrow{\varphi} H_{\mathfrak{m}}^0(M' \otimes_B N) \to H_{\mathfrak{m}}^0(U) \to H_{\mathfrak{m}}^1(\mathrm{Tor}_1^B(M , N)) \to \dots$$

Soit T le conoyau de flèche φ , alors on a :

$$\tilde{\chi}_1^B(M , N) = \tilde{\chi}_0^B(M' , N) - \lg T .$$

Si codim N $\geqslant 1$, alors codim U $\geqslant 1$, et T = 0 , donc $\tilde{\chi}_1^B(M , N) \geqslant 0$.

Supposons codim N = 0 , et soit la suite exacte :

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

où $N' = H_{\mathfrak{m}}^0(N)$ est de longueur finie.

Il résulte de la longue suite exacte :

$$\dots \to \mathrm{Tor}_3^B(M , N'') \to \mathrm{Tor}_2^B(M , N') \to \mathrm{Tor}_2^B(M , N) \to \mathrm{Tor}_2^B(M , N'')$$
$$\to \mathrm{Tor}_1^B(M , N') \xrightarrow{\psi} \mathrm{Tor}_1^B(M , N) \to \dots$$

que $\lg(\mathrm{Tor}_i^B(M , N'')) < \infty$ pour $i \geqslant 2$, que

$$\lg(\mathrm{Im}\ \psi) - \chi_1^B(M , N') + \chi_2^B(M , N'') - \chi_2^B(M , N) = 0 ,$$

et les trois suites exactes :

$(**)_1$
$$0 \to \mathrm{Im}\psi \to \mathrm{Tor}_1^B(M , N) \to W \to 0$$

$(**)_2$
$$0 \to W \to \mathrm{Tor}_1^B(M , N'') \to H \to 0$$

$(**)_3$
$$0 \to H \to M \otimes_B N' \to V \to 0 .$$

dans lesquelles $V = \ker(M \otimes N \to M \otimes N'')$, H et $\mathrm{Im}\psi$ sont de longueurs finies.

De $(**)_1$ résulte

$$\tilde{\chi}_1^B(M , N) - \lg H_{\mathfrak{m}}^0(W) - \chi_1^B(M , N') + \chi_2^B(M , N'') = 0 .$$

Soit S le conoyau de la flèche $H_{\mathfrak{m}}^0(\mathrm{Tor}_1^B(M , N'')) \to H_{\mathfrak{m}}^0(H) = H$, alors

$$\lg(H^0(W)) - \lg[H^0(\mathrm{Tor}_1^B(M\ ,\ N''))] + \lg H - \lg S = 0$$

et on a

$$\tilde{\chi}_1^B(M\ ,\ N) - \tilde{\chi}_1^B(M\ ,\ N'') - \chi_1^B(M\ ,\ N') + \lg H - \lg S = 0\ .$$

Enfin, à l'aide de $(**)_3$, on a

$$\tilde{\chi}_1^B(M\ ,\ N) - \tilde{\chi}_1^B(M\ ,\ N'') + \chi_0^B(M\ ,\ N') - \lg V - \lg S = 0\ ,$$

et comme dim M < dim , $\chi_0^B(M\ ,\ N') = 0$, d'où

$$\tilde{\chi}_1^B(M\ ,\ N) = \tilde{\chi}_1^B(M\ ,\ N'') + \lg V + \lg S$$

est positif.

COROLLAIRE. - <u>Sous les mêmes conditions sur</u> B , <u>si</u> M <u>et</u> N <u>sont deux</u> B-<u>modules tels que</u> $\lg(\mathrm{Tor}_k^B(M\ ,\ N))$ <u>est fini pour un entier</u> $k \geqslant 3$, <u>alors</u>

$$\tilde{\chi}_{k-1}^B(M\ ,\ N) \geqslant 0\ .$$

<u>Preuve</u>. - Par récurrence, il suffit de le vérifier pour $k = 3$, on a alors, en prenant une suite exacte

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0\ ,$$

où L est libre, codim $N' \geqslant 1$, et $\mathrm{Tor}_2^B(N'\ ,\ M)$ est de longueur finie. Donc

$$\tilde{\chi}_2^B(M\ ,\ N) = \tilde{\chi}_1^B(M\ ,\ N') \geqslant 0\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (M.). - Modules over regular local rings, Illinois J. Math., t. 5, 1961, p. 631-647.

[2] HARTSHORNE (R.). - Local cohomology. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 41).

[3] LICHTENBAUM (S.). - On the vanishing of Tor in regular local rings, Illinois J. Math., t. 10, 1966, p. 220-226.

[4] MALLIAVIN-BRAMERET (M.-P.). - Sur les caractéristiques d'Euler-Poincaré d'ordre 1 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, p. 517-520.

[5] MALLIAVIN-BRAMERET (M.-P.). - Sur une majoration des caractéristiques d'Euler-Poincaré, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, p. 1155-1158.

[6] SERRE (J.-P.). - Algèbre locale et multiplicités. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Lectures Notes in Mathematics, 11).

[7] SHARP (R. Y.). - Local cohomology theory in commutative algebra, Quarterly J. Math., Oxford, Series 2, t. 21, 1970, p. 425-434.

(Texte reçu le 13 janvier 1973)

Marie-Paule MALLIAVIN-BRAMERET
4 rue Saint-Louis en l'Ile
75004 PARIS