Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Michel Lazard

Polygone de Newton et théorème de préparation

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 15, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A14_0>

POLYGONE DE NEWTON ET THÉORÈME DE PRÉPARATION

par Michel LAZARD

Cet exposé était surtout un aveu d'ignorance : il y a tout un domaine intéressant l'analyse et l'arithmétique, où figurent quelques résultats classiques (théorème de préparation de Weierstrass, lemme de Hensel, etc.) pour lequel, autant que je sache, on n'a pas encore trouvé de fondation axiomatique simple et assez générale.

Ici j'ai en vue des propriétés d'anneaux de séries formelles "tordues" méromorphes, dont Jean DIEUDONNÉ a montré l'utilité pour classer, à isogénie près, les groupes formels commutatifs de hauteur finie sur un corps de caractéristique non nulle algébriquement clos [1].

1. - Soient A un anneau (unitaire, mais non nécessairement commutatif), et φ un automorphisme de A. On considère l'anneau $B = \mathcal{B}(A , \varphi)$, dont les éléments sont les séries formelles méromorphes à coefficients dans A :

$$f = \sum_{n\geq n_0} T^n a_n \ , \quad a_n \in A \ ,$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et, si $a_{n_0} \neq 0$, $\mathrm{ord}(f) = n_0$.

La somme $f + g$ de $f = \sum T^n a_n$ et $g = \sum T^n b_n$ est définie comme d'habitude. Par contre, on pose $fg = \sum T^n c_n$, avec

$$c_n = \sum_{i+j=n} \varphi^j(a_i)\, b_j \ .$$

Autrement dit, on pose $aT = T\varphi(a)$. Si φ n'est pas l'identité, l'anneau B n'est pas commutatif. Il faut considérer des facteurs et multiples à droite et à gauche, et on réduit de moitié le travail grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - _L'anneau opposé_ $\mathcal{B}(A , \varphi)^{op}$ _de l'anneau_ $\mathcal{B}(A , \varphi)$ _est isomorphe à l'anneau_ $\mathcal{B}(A^{op} , \varphi^{-1})$. _L'isomorphisme applique_ $\sum T^n a_n \in \mathcal{B}(A , \varphi)^{op}$ _sur_

$$\sum T^n \varphi^{-n}(a_n) \in \mathcal{B}(A^{op} , \varphi^{-1}) \ .$$

2. - On considère maintenant une fonction v, définie sur A, à valeurs réelles positives ou $+\infty$. Cela permet d'associer à une série $f = \sum T^n a_n$ son polygone de Newton. Pour cela, on considère dans $\mathbb{R}^2$ l'enveloppe convexe-fermée des points $(n , v(a_n))$ et du point à l'infini dans la direction $(0 , 1)$. Le polygone de Newton de f est la frontière de cette région, ou encore le graphe de la fonction de Newton de f.

La somme de deux polygones de Newton se définit à partir de l'addition vectorielle dans $\mathbb{R}^2$: si les polygones P et P' limitent les régions convexes-fermées R et R', leur somme $P + P'$ limite la région $R + R'$

$$((x \in R + R') \Longleftrightarrow (\exists\, y \in R \ , \ \exists\, z \in R' \ , \ x = y + z)) \ .$$

Cela dit, la proposition suivante est importante par sa simplicité et ses conséquences :

PROPOSITION 2. - Le polygone de Newton du produit de deux séries (non nulles) est la somme de leurs polygones de Newton.

On montre facilement que cette proposition résulte des axiomes suivants.

$$\text{Axiomes 1}\ \begin{cases} v(a \pm b) \geq \min(v(a)\ ,\ v(b))\ , \\ v(ab) = v(a) + v(b)\ , \\ (v(a) = +\infty) \Longleftrightarrow (a = 0)\ , \\ v(\varphi(a)) = v(a)\ . \end{cases}$$

En effet, soit $f = \sum T^n a_n \in B$. Le polygone de Newton de f est défini par ses droites d'appui, celle de pente $-\mu$ ayant pour équation :

$$y = v(f\ ,\ \mu) - \mu x\ ,$$

où

$$v(f\ ,\ \mu) = \inf_{n \in \underset{\sim}{Z}}(v(a_n) + n\mu)\ .$$

Si l'on désigne par $n(f\ ,\ \mu)$ et $N(f\ ,\ \mu)$ respectivement le plus petit et le plus grand $n \in \underset{\sim}{Z}$ tel que

$$v(a_n) + n\mu = v(f\ ,\ \mu)\ ,$$

alors l'entier ≥ 0,

$$\delta(f\ ,\ \mu) = N(f\ ,\ \mu) - n(f\ ,\ \mu)\ ,$$

est la longueur (suivant le premier axe) du côté de pente $-\mu$ du polygone de Newton. La proposition 2 équivaut à la formule suivante :

$$v(fg\ ,\ \mu) = v(f\ ,\ \mu) + v(g\ ,\ \mu)\ ,\ \text{pour tout}\ \mu\ .$$

On a des formules analogues, en remplaçant v par δ, N et n.

Si l'on a deux séries $f\ ,\ g \in B$, tout diviseur commun h (de n'importe quel côté) de f et g doit vérifier :

$$\delta(h\ ,\ \nu) \leq \min(\delta(f\ ,\ \mu)\ ,\ \delta(g\ ,\ \mu))\ .$$

DÉFINITION. - Nous disons qu'un polynôme $P = \sum_{0 \leq n \leq s} T^n a_n$ est μ-isocline si, et seulement si,

$$\deg P = s = \delta(P\ ,\ \mu)\ .$$

Autrement dit, le polygone de Newton d'un polynôme μ-isocline n'a qu'un seul côté, de pente $-\mu$, et $P(0) \neq 0$.

$\underset{\sim}{3}$. - Le théorème de préparation de Weierstrass, dans sa partie "formelle" (i. e. abstraction faite des questions de convergence) se résume comme suit. Soit

$f \in B$ holomorphe (i. e. $\operatorname{ord}(f) \geqslant 0$), tel que $v(f, 0) = 0$ et $n(f, 0) = s$. Alors f est égal à un polynôme de degré s multiplié par une série inversible (dans l'anneau des séries holomorphes). Cette décomposition en produit de f correspond à une décomposition en somme de son polygone de Newton. On sépare les côtés de pente < 0 (qui correspondent au polynôme) de ceux de pente $\geqslant 0$ (qui correspondent au facteur inversible).

Nous nous intéressons ici à l'énoncé suivant, qui entraîne le théorème de préparation.

PROPOSITION 3. - Soient $f \in B$, $f \neq 0$, $\mu > 0$ et $\delta(f, \mu) = s > 0$. Alors il existe un polynôme unitaire P μ-isocline de degré s, et $g \in B$, tels que $f = Pg$.

D'après les premiers axiomes introduits, cette propriété entraîne $\delta(g, \mu) = 0$, ainsi que l'unicité de P. En effet, si $f = Pg = P' g'$, avec $P' = P + Q$, $\deg Q < \deg P$, on a

$$P(g - g') = Qg' ,$$

d'où, si $Q \neq 0$, une contradiction en calculant le $\delta(\ , \mu)$ des deux membres.

La proposition ci-dessus est valable lorsque A est un anneau de valuation complet, autrement dit quand les axiomes supplémentaires suivants sont vérifiés.

Axiomes 2 $\begin{cases} (v(a) \geq v(b)) \Longleftrightarrow (\exists\, c \in A\ ,\ a = bc) \Longleftrightarrow (\exists\, c' \in A\ ,\ a = c' b) \text{ ; si} \\ (a_n) \text{ est une suite d'éléments de } A \text{ tels que } v(a_{n+1} - a_n) \geq n \text{ pour} \\ \text{tout } n \text{ , alors il existe } a \in A \text{ tel que } v(a_n - a) \geq n \text{ pour tout } n . \end{cases}$

Il n'est donc pas nécessaire de supposer A commutatif, ni la valuation v discrète.

Pour démontrer la proposition ci-dessus, il suffit de modifier un peu les raisonnements valables dans le cas où A est commutatif et où φ est l'identité (cf., par exemple, [2]).

Considérons maintenant une série $f \in B$, $f \neq 0$, telle que $\delta(f, \mu) \neq 0$ seulement pour un nombre fini de valeurs strictement positives de μ, soient $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Alors f est produit de $r + 1$ facteurs, à savoir un polynôme unitaire μ_i-isocline de degré $\delta(f, \mu_i)$ pour chaque i $(1 \leq i \leq r)$, et un facteur complémentaire, lui-même égal à une série inversible multipliée par un élément de A. On peut choisir n'importe comment l'ordre des facteurs et, ce choix fait, les $r + 1$ facteurs sont uniques (mais ils dépendent, en général, du choix de l'ordre). L'hypothèse faite sur f est toujours vérifiée si la valuation est discrète.

4. - Supposons désormais la valuation v discrète (ou à valeurs entières). On sait alors que B est un anneau à idéaux (à gauche ou à droite) principaux.

Soit M un B-module (à gauche, par exemple). Notons N l'ensemble des éléments de M annulés par un élément non nul de A ($\subset B$) et, pour chaque $\mu > 0$, M_μ l'ensemble des éléments de M annulés par un polynôme (non nul) unitaire μ-isocline. Alors N et les M_μ sont des sous-modules de M ; leur somme est directe, et constitue le sous-module de torsion de M (i. e. l'ensemble des éléments dont l'annulateur n'est pas nul).

Pour décomposer davantage les éléments de B, il faut savoir décomposer les polynômes isoclines. Il faut alors des hypothèses de nature très différente, tandis que les résultats que nous avons indiqués sont de nature plus générale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (Jean). - Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$, VII, Math. Annalen, t. 134, 1957, p. 114-133.

[2] LAZARD (Michel). - Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-76).

(Texte reçu le 13 octobre 1973)

Michel LAZARD
2 rue Boutarel
75004 PARIS