Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Gabriel

Représentations indécomposables des ensembles ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 13, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A12_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 13, 4 p.

14 mai 1973

REPRÉSENTATIONS INDÉCOMPOSABLES DES ENSEMBLES ORDONNÉS

par Pierre GABRIEL

(d'après NAZAROVA et ROITER [2])

Résumé

Soient k un corps, et S un ensemble ordonné fini. Un S-*espace* est par définition un espace vectoriel V de dimension finie sur k muni d'une famille $(V(s))_{s\in S}$ de sous-espaces vectoriels $V(s)$ tels que $V(s) \subseteq V(t)$ si $s \leqslant t$. Nous nous intéressons aux décompositions $V = V_1 \oplus V_2$ de V telles que

$$V(s) = V_1 \cap V(s) \oplus V_2 \cap V(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in S .$$

Un sous-ensemble ordonné T de S sera dit *plein* si, pour tous t, $t' \in T$, la relation $t \leqslant_T t'$ équivaut à $t \leqslant_S t'$.

THÉORÈME (NAZAROVA-ROITER-KLEINER). - *Pour que le nombre de classes d'isomorphisme de S-espaces indécomposables soit fini, il faut et il suffit que S ne contienne pas de sous-ensemble ordonné plein du type suivant* :

(a) $\{a , b , c , d\}$ (4 *points incomparables deux à deux*),

(b) $\{a_2 \leqslant a_1 , b_2 \leqslant b_1 , c_2 \leqslant c_1\}$ (3 *chaînes incomparables de deux éléments*),

(c) $\{a , b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1 , c_3 \leqslant c_2 \leqslant c_1\}$,

(d) $\{a , b_2 \leqslant b_1 , c_5 \leqslant c_4 \leqslant c_3 \leqslant c_2 \leqslant c_1\}$,

(e) $\{a_2 \leqslant a_1 \geqslant b_2 \leqslant b_1 , c_4 \leqslant c_3 \leqslant c_2 \leqslant c_1\}$.

La démonstration et l'énoncé originels de NAZAROVA-ROITER-KLEINER sont de nature matricielle. Nous en esquissons, dans ce qui suit, une interprétation homologique.

Nous supposons, dans toute la suite, que S ne contient pas 4 points incomparables deux à deux. Si a est un élément maximal de S, nous désignons par $S(a)$ le nouvel ensemble ordonné obtenu en retranchant a de S et en y ajoutant formellement une borne supérieure, notée $b \cup c$, chaque fois que $\{a , b , c\}$ est un sous-ensemble ordonné plein de S. Ainsi, si S est l'ensemble ordonné,

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} ,$$

$S(a_1)$ est l'ensemble ordonné

$$\begin{tikzcd}
& & b_1 \cup c_1 & & \\
& b_1 \cup c_2 \arrow[ur] & & b_2 \cup c_1 \arrow[ul] & \\
b_1 \arrow[ur] & & b_2 \cup c_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & & c_1 \arrow[ul] \\
a_2 & b_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & & c_2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(nous écrivons $\rightarrow$ au lieu de $\leq$).

A tout S-espace V , nous associons maintenant un $S(a)$-espace $F_a V$ d'espace vectoriel sous-jacent $V(a)$ et tel que

$$(F_a V)(b) = V(a) \cap V(b) \quad \text{si} \quad b \in S \ , \quad b \neq a \ ,$$

$$(F_a V)(b \cup c) = V(a) \cap (V(b) + V(c)) \ ,$$

si $\{a , b , c\}$ est un sous-ensemble ordonné plein de S . Nous disons que V est <u>fidèle au point</u> a si $U(a) \neq 0$ pour tout S-espace U facteur direct de V .

LEMME DE RÉDUCTION. - <u>Le foncteur</u>

$$F_a : \{S\text{-}\underline{\text{espaces fidèles en}} \ a\} \rightarrow \{S(a)\text{-}\underline{\text{espaces}}\}$$

<u>a les propriétés suivantes</u> :

(a) <u>Tout</u> $S(a)$-<u>espace est de la forme</u> $F_a V$, <u>où</u> V <u>est fidèle au point</u> a ,

(b) <u>Les applications</u> $F_a(U , V) : \mathrm{Hom}(U , V) \rightarrow \mathrm{Hom}(F_a U , F_a V)$ <u>sont surjectives</u>,

(c) <u>Un morphisme</u> $f \in \mathrm{Hom}(U , V)$ <u>est inversible si</u>, <u>et seulement si</u>, $F_a(f)$ <u>est inversible</u>.

Bien entendu, les morphismes $f : U \rightarrow V$ sont les applications linéaires f de U dans V telles que $f(U(s)) \subseteq V(s)$ pour tout $s \in S$.

Si nous désignons par $\nu(S)$ le nombre de classes d'isomorphisme de S-espaces indécomposables, et par $S'(a)$ le sous-ensemble ordonné plein de $S(a)$ tel que

$$S'(a) = S(a) \setminus \{b \in S \mid b \leq a\} \ ,$$

le lemme de réduction entraîne la formule

$$\nu(S) = \nu(S(a)) + \mathrm{Card}\, S'(a) + 1 \ .$$

Il s'en suit que $\nu(S)$ est fini si, et seulement si, on aboutit à l'ensemble vide en appliquant successivement, et un nombre fini de fois, la construction $S \longmapsto S(a)$ décrite ci-dessus. Cette dernière propriété est de nature purement combinatoire. KLEINER a montré qu'elle était satisfaite si, et seulement si, S ne contenait pas de sous-ensembles ordonnés pleins des types (a)-(e) [1].

<u>Esquisse de démonstration du lemme de réduction</u>. - La démonstration repose sur la notion d'enveloppe injective. Considérons un ensemble ordonné fini T . Disons

qu'un morphisme de T-espaces, $f : U \to V$, est <u>propre</u> si $f(U(t)) = f(U) \cap V(t)$ pour tout $t \in T$. Relativement à cette notion de morphismes propres, la catégorie des T-espaces possède des enveloppes injectives. De façon précise, disons qu'un T-espace I est injectif si, pour toute injection propre $f : U \to V$, tout morphisme $U \to I$ se factorise par V. Disons qu'une injection $f : U \to V$ est <u>essentielle</u> si elle est propre et si, pour tout morphisme $g : V \to W$, les assertions " g est une injection propre" et " $g \circ f$ est une injection propre" sont équivalentes. Ces notions sont régies par la proposition suivante.

PROPOSITION. - *Si V est un T-espace, posons $V(\emptyset) = 0$ et $V(t^+) = \bigcap_{s>t} V(t)$ pour tout $t \in \{\emptyset\} \cup T$ (nous convenons d'écrire $\emptyset < t$ pour tout $t \in T$).*

(a) *Un morphisme de T-espaces $f : U \to V$ est une injection propre si, et seulement si, pour tout $t \in \{\emptyset\} \cup T$, l'application induite $U(t^+)/U(t) \to V(t^+)/V(t)$ est injective.*

(b) *f est une injection essentielle si, et seulement si, pour tout $t \in \{\emptyset\} \cup T$, l'application induite $U(t^+)/U(t) \to V(t^+)/V(t)$ est bijective.*

(c) *Pour tout T-espace U, il existe un T-espace injectif I et une injection essentielle $i : U \to I$ (I est une enveloppe injective de U!).*

(d) *Tout T-espace injectif est une somme directe de T-espaces injectifs I_t, $t \in \{\emptyset\} \cup T$, tels que $I_t = I_t(s) = k$ si $s \not\leq t$ et $I_s(t) = 0$ si $s \leq t$.*

L'enveloppe injective I de U est le produit direct de T-espaces U_t, $t \in \{\emptyset\} \cup T$, tels que U_t ait, pour espace vectoriel sous-jacent, le quotient $U(t^+)/U(t)$, et vérifie les relations

$$U_t(s) = 0 \quad \text{si} \quad s \leq t \quad \text{et} \quad U_t(s) = U_t \quad \text{si} \quad s \not\leq t .$$

L'injection essentielle $i : U \to I = \bigoplus U_t$ a pour composante d'indice t un prolongement à U de la projection canonique $U(t^+) \to U(t^+)/U(t)$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le lemme de réduction. Il s'agit d'associer à tout $S(a)$-espace U un S-espace I tel que $F_a\, I = U$. Pour cela, nous considérons l'enveloppe injective I de U pour la structure sous-jacente de $S'(a)$-espace, et nous identifions U à un sous-espace de I au moyen de l'injection essentielle i. Les sous-espaces $I(t)$ de I sont définis pour tout $t \in S'(a)$, donc en particulier pour $t \in S \setminus \{b \in S \mid b \leq a\}$. Il reste à poser

$$I(a) = U \quad \text{et} \quad I(b) = U(b) \quad \text{pour} \quad b \in S \quad \text{et} \quad b \leq a .$$

Les assertions (b) et (c) du lemme de réduction résultent facilement des propriétés des enveloppes injectives.

<u>Démonstration de la formule</u> $\nu(S) = \nu(S(a)) + \operatorname{Card} S'(a) + 1$. - Le foncteur F_a induit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de S-espaces indécomposables V tels que $V(a) \neq 0$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $S(a)$-espaces indécomposables. Il s'en suit que $\nu(S) - \nu(S(a))$ est égal au nombre

de classes d'isomorphisme de S-espaces indécomposables V tels que $V(a) = 0$. Ce dernier nombre est égal à $\nu(S')$, si $S' = S \setminus \{b \in S \mid b \leq a\}$. Comme a est un élément maximal de S et que S ne contient pas 4 éléments incomparables deux à deux, S' ne peut contenir 3 éléments incomparables deux à deux. On en déduit facilement que tout S'-espace indécomposable est de dimension 1. D'où la formule

$$\nu(S') = \text{Card } S'(a) + 1 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KLEINER (G. B.). - Sur les ensembles ordonnés ayant un nombre fini de représentations indécomposables [en russe], Zapiski naučnykh Seminarov Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, t. 28, 1972, p. 32-41 ; [en anglais] Seminars in Mathematics, Vol. 28 (à paraître).

[2] NAZAROVA (L. A.), ROITER (A. V.). - Représentations des ensembles ordonnés [en russe], Zapiski naučnykh Seminarov Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, t. 28, 1972, p. 5-31 ; [en anglais] Seminars in Mathematics, Vol. 28 (à paraître).

Pierre GABRIEL
Mathematisches Institut
Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität
10 Wegelerstrasse
D-53 BONN (Allemagne fédérale)