Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Ottó Steinfeld

Sur les groupoïdes-treillis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, nº 2 (1971-1972), exp. nº J13, p. J1-J5

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A13_0>

Séminaire DUBREIL (Algèbre)
25e année, 1971/72, n° J13, 5 p.
Journées d'Algèbre [Juin-juillet 1972. Paris]
Demi-groupes. Demi-groupes ordonnés (M.-L. DUBREIL-JACOTIN)

1er juillet 1972

SUR LES GROUPOÏDES-TREILLIS

par Ottó STEINFELD

A la mémoire de Mme DUBREIL-JACOTIN

Il est connu que l'ensemble T de tous les sous-demi-groupes avec 0 d'un demi-groupe D avec 0 constitue un treillis complet par rapport à l'inclusion $\subseteq$. Les opérations dans ce treillis sont notées par $\cap$ (l'intersection) et par $\cup$ (l'union). D est l'élément le plus grand et 0 est l'élément le plus petit de ce treillis T.

Nous allons définir une multiplication dans l'ensemble T. Le produit $A.B$ des sous-demi-groupes A, B avec 0 de D, est le sous-demi-groupe de D engendré par tous les éléments ab $(a \in A\ ,\ b \in B)$. L'ensemble T forme un groupoïde par rapport à cette multiplication. (En général, cette multiplication n'est pas associative.)

L'inclusion $A \subseteq B$ $(A\ ,\ B \in T)$ implique $A.X \subseteq B.X$, et $X.A \subseteq X.B$ avec tous les $X \in T$; c'est-à-dire que T est un groupoïde ordonné (en treillis).

Ce groupoïde ordonné possède les propriétés suivantes :

$$X^2 = X.X \subseteq X \qquad (X \in T)\ ,$$

$$0.D = D.0 = 0\ .$$

En général les lois de distributivité :

$$(X \cup Y).Z = X.Z \cup Y.Z \quad \text{et} \quad Z.(X \cup Y) = Z.X \cup Z.Y \qquad (X\ ,\ Y\ ,\ Z \in T)$$

ne sont pas vérifiées dans T, c'est-à-dire que T n'est pas un groupoïde réticulé.

Correspondant aux propriétés mentionnées de T, nous allons définir une structure algébrique ordonnée.

Nous désignerons par $\langle V\ ;\ \leqslant\rangle$ un groupoïde ordonné satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) V constitue un treillis complet par rapport à la relation de l'ordre $\leqslant$. Les opérations de ce treillis seront notées $\wedge$ et $\vee$;

(2) $a^2 \leqslant a$ pour tous les éléments $a \in V$;

(3) si 0 (resp. e) est l'élément le plus petit (resp. le plus grand) du treillis complet V, alors

$$0.e = e.0 = 0\ .$$

Nous appellerons un groupoïde-treillis, un groupoïde ordonné $\langle V ; \leq \rangle$ satisfaisant aux conditions (1), (2), (3).

V n'est pas, en général, un groupoïde réticulé ; il est seulement un cas particulier des groupoïdes ordonnés en treillis. Nous désignerons toujours par V un groupoïde-treillis.

Un élément b de V sera appelé un absorbant bilatère de l'élément $a \in V$ si les conditions

(4) $$b \leq a$$

et

(5_1) $$ab \leq b ,$$

(5_2) $$ba \leq b ,$$

sont vérifiées. b sera appelé un absorbant à gauche (resp. un absorbant à droite) si (4) et (5_1) (resp. (4) et (5_2)) sont vérifiées.

Si les éléments k et a de V satisfont aux conditions

(6) $$k \leq a \quad \text{et} \quad ka \wedge ak \leq k ,$$

alors k sera appelé un quasi-absorbant de l'élément a .

Exemple 1 : L'ensemble T de tous les sous-demi-groupes avec 0 d'un demi-groupe D avec 0 constitue donc un groupoïde-treillis. Les idéaux bilatères, les idéaux à droite et à gauche, puis les quasi-idéaux du demi-groupe D correspondent aux absorbants bilatères, absorbants à droite et à gauche, puis aux quasi-absorbants de l'élément D de T .

Exemple 2 : Un autre exemple important du groupoïde-treillis est l'ensemble U de tous les sous-anneaux d'un anneau associatif.

Exemple 3 : Tous les sous-groupes d'un groupe forment aussi un groupoïde-treillis par rapport à l'inclusion et par rapport à "une multiplication" convenable. (Dans cette conférence, nous ne nous occupons pas de ce dernier exemple.)

Dans quelques travaux, nous avons commencé à fonder la théorie des absorbants. Pour la recherche des propriétés des absorbants, nous avons besoin de quelques conditions d'associativité et de distributivité lesquelles, par exemple, sont vérifiées dans les groupoïdes-treillis T et U . Comme illustration, nous ne mentionnons ici qu'une condition d'associativité et une condition de distributivité :

(i) Si k_1 , k_2 , k_3 sont des quasi-absorbants de l'élément e de V , alors l'associativité

$$(k_1 \, k_2)k_3 = k_1(k_2 \, k_3)$$

a lieu.

(ii) Si x et y sont des éléments inférieurs à l'élément $a \in V$; $x , y \leq a$, alors la distributivité

$$(x \vee ax)y = xy \vee (ax)y \quad \text{et} \quad y(x \vee ax) = yx \vee y(ax)$$

a lieu.

Nous voudrions faire connaître une partie des résultats que nous avons obtenus sur les groupoïdes-treillis.

1. Un demi-groupe (anneau) D est appelé <u>régulier</u> (au sens de von NEUMANN), si $a \in aDa$ pour chaque élément a de D .

L. KOVÁCS a démontré, dans son article [4], le théorème suivant : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau (demi-groupe) D soit régulier est que, pour tout idéal à droite R et tout idéal à gauche L de D ,

$$RL = R \cap L \; .$$

A l'aide de ce théorème, nous pouvons définir la notion suivante : Un élément a d'un groupoïde-treillis V est dit <u>régulier</u> si $r\ell = r \wedge \ell$ pour tout absorbant à droite r et tout absorbant à gauche ℓ de l'élément a .

Dans la note [5], nous avons donné plusieurs caractérisations des éléments réguliers de V . Ces caractérisations généralisent quelques résultats connus concernant les demi-groupes et anneaux réguliers ; par exemple, un théorème de J. CALAIS [2] et un autre de L. KOVÁCS [4].

Un élément a d'un groupoïde-treillis V est appelé <u>duo-élément</u> si tous les absorbants à gauche et tous les absorbants à droite de l'élément a sont des absorbants bilatères de a . Cette notion est une généralisation des duo-demi-groupes (duo-anneaux) introduits par E. H. FELLER [3]. Dans l'article [6], nous avons caractérisé les duo-éléments réguliers.

2. Un demi-groupe D avec 0 est dit <u>0-simple</u> si D possède seulement deux idéaux bilatères 0 et D, et si $D^2 \neq 0$. Si un demi-groupe 0-simple D est l'union de ses idéaux à droite 0-minimaux et l'union de ses idéaux à gauche 0-minimaux, $D = \bigcup_\gamma R_\gamma = \bigcup_\delta L_\delta$, alors D est justement un demi-groupe <u>complètement 0-simple</u>.

Un absorbant à droite r non nul d'un élément a de V est appelé <u>minimal</u>, si a ne possède pas un absorbant à droite r' avec la propriété $0 < r' < r$. L'absorbant à gauche <u>minimal</u> et le quasi-absorbant <u>minimal</u> sont définis d'une manière analogue.

Un élément a d'un groupoïde-treillis est dit <u>simple</u> si a possède seulement les deux absorbants bilatères triviaux 0 et a, et si $a^2 \neq 0$. Un élément simple sera appelé <u>complètement simple</u>, s'il est l'union de ses absorbants à droite minimaux et l'union de ses absorbants à gauche minimaux :

$$a = \bigvee_\gamma r_\gamma = \bigvee_\delta \ell_\delta \; .$$

Dans l'article [7], nous nous sommes occupés des éléments complètement simples, et nous y avons démontré quelques théorèmes de décomposition. Ces théorèmes généralisent les théorèmes de décomposition bien connus concernant les anneaux semi-simples, ainsi que les demi-groupes complètement 0-simples.

3. R. BAER [1] introduit la notion suivante : Un sous-anneau M d'un anneau associatif A est appelé un méta-idéal à index fini de A s'il existe une chaîne finie

$$A = B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \supseteq B_{r-1} \supseteq B_r = M \tag{7}$$

telle que B_i soit un idéal bilatère de B_{i-1} $(i = 1 , 2 , \dots , r)$.

R. BAER a prouvé le théorème suivant : Un sous-anneau M de l'anneau A est un méta-idéal à index fini de A , si et seulement si, A possède un idéal bilatère I tel que

$$I^k \subseteq M \subseteq I \tag{8}$$

pour un entier positif k .

Dans la note [8], nous avons défini la notion de "méta-absorbant" : un élément m d'un groupoïde-treillis V est appelé un méta-absorbant de l'élément $a \in V$ s'il existe une chaîne finie

$$a = b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_{s-1} \geqslant b_s = m$$

telle que b_j soit un absorbant bilatère de b_{j-1} $(j = 1 , 2 , \dots , s)$.

Nous avons prouvé un théorème sur les méta-absorbants qui généralise le résultat de BAER. Ce résultat implique un théorème concernant les demi-groupes qui est analogue au théorème de Baer. Puis nous avons prouvé que le produit, (l'intersection, l'union) de deux méta-absorbants d'un élément $a \in V$ est un méta-absorbant de a .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAER (R.). - Meta ideals, Report of a conference on linear algebras [1956. Shelter Island], p. 33-52. - Washington, National Academy of Sciences National Research Council, 1957 (National Academy of Sciences ..., Publications, 502).

[2] CALAIS (J.). - Demi-groupes quasi inversifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 2357-2359.

[3] FELLER (E. A.). - Properties of primary non-commutative rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 89, 1958, p. 79-91.

[4] KOVÁCS (L.). - A note on regular rings, Publ. Math., Debrecen, t. 4, 1956, p. 465-468.

[5] STEINFELD (O.). - Über Groupoide-Verbände, I., Acta Sc. Math., t. 31, 1970, p. 203-218.

[6] STEINFELD (O.). - Über die regulären duo-Elemente in Gruppoid-Verbänden, Acta Sc. Math., t. 32, 1971, p. 327-331.

[7] STEINFELD (O.). - Über Gruppoid-Verbände, II., Period. Math. Hung. (à paraître).

[8] STEINFELD (O.). - Über Metaabsorbente in Gruppoid-Verbänden, Acta Math. Acad. Sc. Hung. (à paraître).

Ottó STEINFELD
Magyar Tudomanyos Akademia
Matematikai Kutato Intezete
Realtanoda u. 13-15
BUDAPEST V (Hongrie)