Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

John A. Read

L-sous-groupes compressibles du groupe-réticulé $A(S)$

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, nº 1 (1971-1972), exp. nº 6, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A6_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 6, 4 p.

24 janvier 1972

L-SOUS-GROUPES COMPRESSIBLES DU GROUPE-RÉTICULÉ A(S)

par John A. READ

Soit S un ensemble totalement ordonné, et soit $A(S)$ le groupe-réticulé des permutations croissantes de S. Si $s \in S$ et $g \in A(S)$, l'intervalle de s par g est $\{t \in S \mid sg^n \leqslant t \leqslant sg^m$ pour certains entiers m et $n\}$, et est noté g_s. La fonction h sur S, définie par $xh = xg$ pour $x \in g_s$, et $xh = x$ pour $x \notin g_s$, est un élément de $A(S)$, et on l'appelle g comprimé hors de l'intervalle g_s. Un ℓ-sous-groupe G de $A(S)$ est compressible si $k \in G$ implique $f \in G$ si f est k comprimé hors d'un intervalle de k. Avec une démonstration plus courte que celle de J. T. LLYOD, dans sa thèse, pour montrer que $A(S)$ est complètement distributif, nous montrerons que chaque ℓ-sous-groupe compressible de $A(S)$ (donc $A(S)$) est complètement distributif, c'est-à-dire pour chaque sous-ensemble $\{a_{ij} \mid i \in I, j \in J\}$ de G,

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J} a_{ij} = \bigvee_{f\in J^I} \bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)}$$

lorsque les $\bigvee$ et les $\bigwedge$ écrits existent.

Une conséquence facile de ce résultat est que chaque ℓ-sous-groupe stabilisateur (définition 5), d'un ℓ-sous-groupe compressible G de $A(S)$, est un ℓ-sous-groupe fermé de G (définition 4).

Définition 1. - Soient h et g éléments du groupe-réticulé G. L'élément h est subordonné à g, ce qui s'écrit $h s g$, si, lorsque $|g| = \bigvee g_\alpha$ pour un ensemble $\{g_\alpha \mid \alpha \in A\}$ d'éléments positifs de G, on a $|h| \leqslant g_\alpha$ pour un $\alpha \in A$, $(|g| = g \vee g^{-1})$.

THÉORÈME (E. C. WEINBERG [2]). - *Le groupe-réticulé G est complètement distributif si, et seulement si, $\Phi(G) = e$, où $\Phi(G) = \{g \in G \mid h s g$ implique $h = e\}$.*

LEMME 1. - *Soit G un groupe-réticulé, et soit $e < h \in G$ tel que*

$$\{k \in G \mid e \leqslant k \leqslant h\}$$

soit totalement ordonné. (On dit que h est basique). On a $h \notin \Phi(G)$.

Démonstration. - Si $\{k \in G \mid e < k < h\} \neq 0$, soit f un élément de cet ensemble. Si f n'est pas subordonné à h, on a un ensemble $\{h_\alpha > e \mid \alpha \in A\}$ tel que $\bigvee h_\alpha = h$ et $f \nleqslant h_\alpha$ pour chaque α. Mais h est basique, donc $h_\alpha \leqslant f$ pour chaque α, et on a $\bigvee h_\alpha \leqslant f$ qui n'est pas possible.

Si $\{k \in G \mid e < k < h\} = \emptyset$, évidemment h est subordonné à h.

Notation. - On écrit

$$\underset{\sim}{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \ , \quad \underset{\sim}{Z}^+ = \{0,1,\ldots\} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{Z}^- = \{\ldots,-2,-1,0\} \ .$$

Définition 2. - Soit G un ℓ-sous-groupe d'un $A(S)$. Si $\{h \ , \ g\} \subseteq G$ est tel que $xh^n \leqslant xg$ pour chaque $x \in S$ et chaque $n \in \underset{\sim}{Z}^+$, on dit que h est infiniment petit par rapport à g , et on écrit $h \ll g$.

LEMME 2. - Soit G un ℓ-sous-groupe d'un $A(S)$, et soit $h \in G$. Si, pour $\{x \ , \ y \mid x \neq y\} \subseteq S$, on a $xh \geqslant x$ et $yh \leqslant y$, alors on a $x \notin h_y$ et $y \notin h_x$.

Démonstration. - Dans le cas $x < y$, on a $yh \leqslant y$, $yh^n \leqslant y$ pour $n \in \underset{\sim}{Z}^+$, et donc $xh^n < yh^n \leqslant y$ pour chaque $n \in \underset{\sim}{Z}^+$. Si $n \in \underset{\sim}{Z}^-$, $xh^n \leqslant x < y$, et donc $y \notin h_x$.

Dans le cas $y < x$, on a $yh^n \geqslant y$ pour chaque $n \in \underset{\sim}{Z}^-$, et donc $xh^n > yh^n \geqslant y$ pour chaque $n \in \underset{\sim}{Z}^-$. Si $n \in \underset{\sim}{Z}^+$, $xh^n > y$ pour chaque $n \in \underset{\sim}{Z}^+$, et donc $y \notin h_x$. De la même façon, $x \notin h_y$.

Définition 3. - Soit $S(g) = \{x \in S \mid xg \neq x\}$. On dit que g est comprimé si $S(g)$ est exactement un intervalle d'un $s \in S$ par g .

LEMME 3. - Soit G un ℓ-sous-groupe compressible d'un $A(S)$, et soit $e<g\in G$ tel que g soit comprimé. Si $k \in G$ est tel que $sk > s$ et $tk = t$ pour

$$\{s \ , \ t\} \subseteq S(g) \ ,$$

il y a un $e < h \in G$ tel que $h \ll g$ (Par conséquent, g est basique si, et seulement si, $S(k) = S(g)$ pour chaque $k \in G$ tel que $e < k \leqslant g$).

Démonstration. - On peut supposer que $yk = y$ pour $y \notin k_s$ et $k \leqslant g$ (Sinon prendre $k \wedge g$ comprimé hors de $(k \wedge g)_s$ au lieu de k). En conséquence du lemme 2, $k \geqslant e$. Supposons $s < t$. Si $t < s$, la démonstration est presque la même.

Par le lemme 2, $t \notin k_s$, et on a un $n \geqslant 0$ $(sg^0 = s)$ tel que $sg^n \in k_s$, mais $sg^{n+1} \notin k_s$. On a $sg^n g^{-1} \in k_s$, ou $sg \notin k_s$ et $sg^{-1} \notin k_s$; dans un tel cas, ou $e < k \ll g$, ou il y a $z \in k_s$ tel que $(z \ , \ zg) \subseteq k_s$, et dans ce dernier cas, $e < k \wedge g^{-1} kg \ll g$.

Donc, on suppose que $sg^n g^{-1} \in k_s$. Soit $x = (sg^n)(g^{-1} kg)^{-1}$. Montrons que $x \in k_s$. Si $sg^n g^{-1} \in k_s$, on a, parce que $k \leqslant g$,

$$sg^n g^{-1} \leqslant sg^n(g^{-1} kg)^{-1} \ .$$

On a aussi $g^{-1} k^{-1} g \leqslant e$, donc $sg^n(g^{-1} kg)^{-1} \leqslant sg^n$, donc $x \in k_s$ par convexité. Donc, $xk > x$, et on a, pour un $m \in \underset{\sim}{Z}^+$,

$$x(g^{-1} kg) = sg^n < xk^m \ .$$

Avec le point sg^{n+1} , on a $(sg^{n+1})g^{-1}\ kg > sg^{n+1} = sg^{n+1}\ k^m$.

Pour le troisième point sg^{n+2} , on a $(sg^{n+2})g^{-1}\ kg = sg^{n+2} = sg^{n+2}\ k^m$.

Donc, par le lemme 2, l'intervalle de sg^{n+1} par $(g^{-1}\ kg)k^{-m}$ est contenu dans $(x\ ,\ sg^{n+2})$, lequel est contenu dans $(sg^{n-1}\ ,\ sg^{n+2})$ parce que $x=[sg^n]g^{-1}\ k^{-1}\ g$ et $k^{-1}\ g \geqslant e$.

Soit $\rho = g^{-1}\ kg\ k^{-m}$ comprimé hors de $(g^{-1}\ kg\ k^{-m})sg^{n+1}$. Donc, $\rho > e$. Ou $\rho \ll g$ et nous définissons $h = \rho$, où il y a un $z \in (sg^{n-1}\ ,\ sg^{n+2})$ tel que $(z\ ,\ zg) \subseteq \rho_z$; dans un tel cas $g\rho g^{-1} \wedge \rho > e$, et est tel que

$$(g\rho g^{-1} \wedge \rho)_z \subseteq (sg^{n-1}\ ,\ sg^{n+1})\ .$$

De la même façon, ou $g\rho g^{-1} \wedge \rho \ll g$ et nous définissons $h = g\rho g^{-1} \wedge \rho$, ou il y a $y \in S$ et

$$f = g(g\rho g^{-1} \wedge \rho)g^{-1} \wedge (g\rho g^{-1} \wedge \rho) > e\ ,$$

tel que $yf > y$ et $f_y \subseteq (sg^{n-1}\ ,\ sg^n)$. Dans ce dernier cas, $f \ll g$, et nous définissons $h = f$.

THÉORÈME 2. - Chaque ℓ-sous-groupe compressible de $A(S)$ est complètement distributif (Donc $A(S)$ est complètement distributif).

Démonstration. - Soit G un ℓ-sous-groupe compressible de $A(S)$. Si chaque $e < h \in G$, qui est comprimé, n'est pas un élément de $\Phi(G) = e$, car $\Phi(G)$ est convexe ([1], corollaire 3.7), et G est compressible, et par conséquent, G est complètement distributif d'après le théorème 1.

Soit $e < g \in G$ tel que g soit comprimé. Par le lemme 3, g est basique, et $g \notin \Phi(G)$ par le lemme 1, ou il y a $e < k \in G$ qui est comprimé, tel que $e < k \ll g$. De la même façon, k est basique, et $g \notin \Phi(G)$, ou il y a $e < h \in G$ qui est comprimé tel que $h \ll k$. Soit $t \in S(h)$, $x = tk^{-2}$. On a $h_t \subseteq (x\ ,\ xg)$.

De la même façon, $h \notin \Phi(G)$ et $g \notin \Phi(G)$, où il y a $f \ll h$ qui est comprimé, et un point $y \in h_t$ tel que $S(f) \subseteq (y\ ,\ yh)$.

Montrons que f est subordonné à g . Soit $g = \vee g_\alpha$, où $\{g_\alpha > e \mid \alpha \in A\} \subseteq G$. Soit $d = hfh^{-1}$.

Si $z \notin (yh^{-1}\ ,\ y)$, $zd^{-1}\ g = zg \geqslant zg_\alpha$ pour chaque α .

Supposons $z \in (yh^{-1}\ ,\ y)$ et $zg_\alpha < yh$ pour chaque α . Parce que $zd^{-1} \in (x,xg)$, et donc $zd^{-1}\ g \in (xg\ ,\ xg^2)$, on a $zg_\alpha < yh < xg < zd^{-1}\ g$. Donc $g_\alpha \leqslant d^{-1}\ g$ pour chaque $\alpha \in A$, qui implique que $\vee g_\alpha < d^{-1}\ g < g$, qui n'est pas possible.

Donc, pour un $\alpha \in A$ et un $z \in (yh^{-1}\ ,\ y)$, $zg_\alpha \geqslant yh$, et on a, pour $t \in (y,yh)$, $tg_\alpha \geqslant zg_\alpha \geqslant yh \geqslant tf$, et donc $f \leqslant g_\alpha$, qui implique que f est subordonné à g , c'est-à-dire G est complètement distributif.

Définition 4. - Un ℓ-sous-groupe convexe M d'un groupe réticulé est fermé dans G si, lorsque $\{g_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq M$ et $\bigvee g_\alpha = g$ existent dans G, on a $g \in M$. Soit $M^* = \langle \bigvee g_\alpha \mid g_\alpha \in M$, et $\bigvee g_\alpha$ existe dans $G \rangle$.

Définition 5. - Soit G un ℓ-sous-groupe d'un $A(S)$. On dit que

$$G_s = \{g \in G \mid sg = s\}$$

est un ℓ-sous-groupe stabilisateur de G.

THÉORÈME 3. - Soit G un ℓ-sous-groupe compressible d'un $A(S)$. Les ℓ-sous-groupes stabilisateurs de G sont ℓ-sous-groupes fermés dans G.

Démonstration. - Soit G_s^* comme dans la définition 4. Par le lemme 3.2 de [1], l'ensemble $G_s^* \setminus G_s$ est nul, ou il y a $e < h \in G_s^* \setminus G_s$ tel que $h = \bigvee h_\alpha$ pour un ensemble $\{h_\alpha > e \mid \alpha \in A\} \subseteq G_s$. En conséquence, $sh > s$. Soit $g = h$, comprimé hors de h_s. Alors, pour $g_\alpha = h_\alpha \wedge g \in G_s^+$, on a $g = \bigvee g_\alpha$, $sg_\alpha = s$, $sg > s$, et g est comprimé.

Par le théorème 2, le ℓ-sous-groupe G est complètement distributif, donc il y a un $f > e$ subordonné à g. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\bigvee_{\alpha\in A} g^n g_\alpha g^{-n} = g$$

et donc

$$f \lessdot g^n g_\alpha g^{-n} \quad \text{pour un } \alpha .$$

Mais, $sg^{-n}(g^n g_\alpha g^{-n}) = sg^{-n}$ pour chaque α, donc

$$(sg^{-n})f = sg^{-n} \quad \text{pour chaque } n \in \mathbb{Z} .$$

Mais $f \lessdot g$, donc, si $x < xf$,

$$f_x \subseteq (sg^{n-1}, sg^n) \quad \text{pour un } n \in \mathbb{Z} .$$

Soit $k = f$ comprimé hors de f_x. Si $t \in f_x$, $t < sg^n$, et donc

$$t(g^{-n} g_\alpha g^n) < sg^n(g^{-n} g_\alpha g^n) = sg^n < tk^{-1} g .$$

Si $t \notin f_x$, $g_\alpha \lessdot g$, et donc $tg^{-n} g_\alpha g^n \lessdot tg = tk^{-1} g$. Donc $g^{-n} g_\alpha g^n \lessdot k^{-1} g$ pour chaque $\alpha \in A$, ce qui implique que $\bigvee_{\alpha\in A} g^{-n} g_\alpha g^n \lessdot k^{-1} g < g$ qui n'est pas possible. Donc $G_s^* = G_s$, et G_s est fermé dans G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BYRD (R. D.) and LLOYD (J. T.). - Closed subgroups and complete distributivity in lattice-ordered groups, Math. Z., t. 101, 1967, p. 123-130.

[2] WEINBERG (E. C.). - Completely distributive lattice-ordered groups, Pacific J. Math., t. 12, 1962, p. 1131-1137.

John A. READ
Canadian Coast Guard College
P. O. Box 4500
SYDNEY, Nova Scotia (Canada)