Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres

JEAN-CLAUDE ANSCOMBRE

Une extension du lemme de Green et ses applications

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 1 (1971-1972), exp. n° 13, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_1_A12_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
25e année, 1971/72, n° 13, 20 p.
24 avril 1972

UNE EXTENSION DU LEMME DE GREEN ET SES APPLICATIONS

par Jean-Claude ANSCOMBRE

La terminologie et les notations que nous utilisons sont celles de A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON [2] pour ce qui est de la théorie générale des semi-groupes, et celle de P. DUBREIL ([6], [7], [8]), pour le cas particulier du semi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite $\mathfrak{A}$.

Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier une extension de la notion d'équivalences de Green, ainsi que les principales propriétés de cette extension. L'application au cas particulier du semi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite $\mathfrak{A}$ fera apparaître l'intérêt qu'il y a à considérer ce semi-groupe comme un sous-semi-groupe du semi-groupe des applications de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$. Ce point de vue nous permettra de caractériser les groupes de Schützenberger associés à certaines classes d'équivalence.

1. Rappels.

1.1. Equivalences de Green.

Etant donné un semi-groupe D quelconque, les équivalences de Green $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ attachées à D sont définies de la façon suivante :

$$(x \mathcal{R} y) \Longleftrightarrow (|x) = |y)) \ ; \quad (x \mathcal{L} y) \Longleftrightarrow ((x| = (y|) \ ,$$

définitions dans lesquelles

$$|a) = a \cup aD \ ; \qquad (a| = a \cup Da \ ,$$

i. e. les idéaux principaux respectivement à droite et à gauche engendrés par a élément de D . On pose en outre :

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L} \ ; \qquad \mathcal{D} = \sup(\mathcal{R} , \mathcal{L}) \ .$$

On montre alors que

$\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{L}$ *sont deux équivalences de* D : $\mathcal{R}$ *est régulière à gauche,* $\mathcal{L}$ *est régulière à droite, et* $\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{L}$ (*i. e.* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{L}$ *commutent*). *De plus,* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{L}$ *satisfont le lemme de Green* (cf. § 2 pour l'énoncé de ce lemme).

1.2. Une première généralisation des équivalences de Green.

Suivant une idée de M. CRESTEY, on peut donner à la théorie des équivalences de Green l'aspect plus général suivant :

Soient E un ensemble quelconque, Γ et Δ deux familles d'applications de E dans E possédant les propriétés suivantes :

(i) Γ et Δ sont stables pour la composition des applications ;

(ii) L'application identique ε appartient à Δ et à Γ ;

(iii) $(\forall\ \delta \in \Delta)(\forall\ \gamma \in \Gamma)$, $\gamma\delta = \delta\gamma$.

On introduit alors les relations de Green $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ par

$$(a\ \mathcal{R}\ b) \Longleftrightarrow (\Delta a = \Delta b) \ ; \qquad (a\ \mathcal{L}\ b) \Longleftrightarrow (\Gamma a = \Gamma b) \ .$$

On pose en outre $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$, $\mathcal{D} = \sup(\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{L})$. On peut alors montrer que

$\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ sont deux équivalences de E : $\mathcal{R}$ est Γ-régulière, $\mathcal{L}$ est Δ-régulière, et $\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{L}$. De plus, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ satisfont encore le lemme de Green.

2. Généralisation des notions précédentes.

2.1. Lemme de Green généralisé.

Nous nous proposons maintenant d'introduire une définition plus générale des équivalences de Green, telle que les deux définitions, précédemment données, apparaissent comme des cas particuliers de cette définition générale.

Pour ce faire, nous considérons deux exemples E et F tels que $E \subseteq F$. Nous allons définir les *relations de Green généralisées sur* E .

DÉFINITION 2.1.1. - *Etant donnés deux ensembles E et F tels que $E \subseteq F$, nous appellerons opérateurs de Green de E deux ensembles Δ et Γ d'applications de F dans F , satisfaisant aux conditions suivantes* :

(i) Δ *et* Γ *sont stables pour la composition des applications* ;

(ii) *L'application identique* ε *appartient à* Δ *et à* Γ ;

(iii) $(\forall\ \delta \in \Delta)(\forall\ \gamma \in \Gamma)$, $\delta\gamma = \gamma\delta$;

(iv) $(\forall\ a \in F)(\forall\ \delta \in \Delta)(\forall\ \gamma \in \Gamma)$, *si* $a \in E$, *si* $\delta a \in E$, *et si* $\gamma a \in E$, *alors* $\delta\gamma a \in E$.

Remarquons que, contrairement aux cas précédents, les opérateurs de Δ et de Γ n'appliquent pas en général E dans E . Dans le cas particulier où $E = F$, la définition donnée ci-dessus se confond avec celle donnée en 1.2.

DÉFINITION 2.1.2. - *Nous appellerons relations de Green généralisées sur* E , *les deux relations* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{L}$, *définies sur* E *comme suit* :

$$(\forall\ a \in E)(\forall\ b \in E) : \ (a\ \mathcal{R}\ b) \Longleftrightarrow (\Delta a = \Delta b) \ ; \ (a\ \mathcal{L}\ b) \Longleftrightarrow (\Gamma a = \Gamma b) \ .$$

Nous poserons en outre :

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L} \ ; \qquad \mathcal{D} = \sup_E(\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{L}) \ .$$

PROPOSITION 2.1.3. - $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ *sont des équivalences de* E . *Si* $a\ \mathcal{R}\ b$, *si* $\gamma \in \Gamma$ *est tel que* $\gamma a \in E$ *et* $\gamma b \in E$, *alors* $\gamma a\ \mathcal{R}\ \gamma b$ (*on a une propriété*

<u>analogue pour</u> $\mathcal{L}$). <u>De plus,</u> $\mathcal{R}$ <u>et</u> $\mathcal{L}$ <u>sont permutables, i. e.</u> $\mathcal{D} = \mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$.

Il est clair que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ sont des équivalences de E d'après leur définition. Il en résulte aussitôt que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ sont aussi des équivalences de E . Soient maintenant a et b éléments de E tels que $a \mathcal{R} b$, et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma a \in E$ et $\gamma b \in E$. Puisque $a \mathcal{R} b$, $\Delta a = \Delta b$, par définition. D'où, $\gamma\Delta a = \gamma\Delta b$, et, d'après la condition (iii), $\Delta\gamma a = \Delta\gamma b$. D'où, $\gamma a \mathcal{R} \gamma b$, puisque $\gamma a \in E$ et $\gamma b \in E$. Pour montrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ sont permutables, il suffit de montrer que $\mathcal{L}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}\mathcal{L}$. Soient donc $a \in E$ et $b \in E$ tels que $a \mathcal{L}\mathcal{R} b$. Il existe alors x , élément de E , tel que $a \mathcal{L} x$ et $x \mathcal{R} b$. Par définition de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$, et d'après la condition (ii), il existe $\gamma \in \Gamma$, et il existe $\delta \in \Delta$ tels que

$$a = \gamma x \; ; \qquad b = \delta x$$

$\delta x = b$ est un élément de E ; $\gamma x = a$ est un élément de E également. D'après la condition (iv), $\delta\gamma x = \delta a = \gamma b$ est donc aussi un élément de E . Puisque $a \mathcal{L} x$, on a donc $\delta a \mathcal{L} \delta x$ d'après ce qui précède. De même, $(x \mathcal{R} b)$ entraîne $(\gamma x \mathcal{R} \gamma b)$. D'où, $\delta a \mathcal{L} b$ et $a \mathcal{R} \gamma b$, c'est-à-dire $a \mathcal{R}\mathcal{L} b$ puisque $\delta a = \gamma b$, et finalement $\mathcal{L}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}\mathcal{L}$.

PROPOSITION 2.1.4 (<u>Lemme de Green généralisé</u>). - <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>deux éléments de</u> E . <u>Si</u> $a \mathcal{R} b$ (<u>resp.</u> $a \mathcal{L} b$) , <u>alors il existe deux bijections réciproques</u> δ_1^* , <u>application de</u> $\mathcal{L}(a)$ <u>sur</u> $\mathcal{L}(b)$ (<u>resp.</u> γ_1^* <u>application de</u> $\mathcal{R}(a)$ <u>sur</u> $\mathcal{R}(b)$) , <u>et</u> δ_2^* , <u>application de</u> $\mathcal{L}(b)$ <u>sur</u> $\mathcal{L}(a)$ (<u>resp.</u> γ_2^* <u>application de</u> $\mathcal{R}(b)$ <u>sur</u> $\mathcal{R}(a)$) , <u>telles que</u> $\delta_1^* a = b$ (<u>resp.</u> $\gamma_1^* a = b$) <u>et</u> $\delta_2^* b = a$ (<u>resp.</u> $\gamma_2^* b = a$) . <u>Ces bijections respectent</u> $\mathcal{R}$ (<u>resp.</u> $\mathcal{L}$) , <u>et par suite</u> δ_1^* (<u>resp.</u> γ_1^*) <u>applique bijectivement toute</u> $\mathcal{H}$<u>-classe contenue dans</u> $\mathcal{L}(a)$ (<u>resp.</u> $\mathcal{R}(a)$) <u>sur une</u> $\mathcal{H}$<u>-classe contenue dans</u> $\mathcal{L}(b)$ (<u>resp.</u> $\mathcal{R}(b)$) .

Supposons donc que $a \mathcal{R} b$, avec a et b éléments de E . Par définition de $\mathcal{R}$, il existe $\delta_1 \in \Delta$ et $\delta_2 \in \Delta$ tels que :

$$\delta_1 a = b \; ; \qquad \delta_2 b = a \; .$$

Considérons $\delta_1^* = \delta_1 | \mathcal{L}(a)$, $\delta_2^* = \delta_2 | \mathcal{L}(b)$, et soit enfin x élément de $\mathcal{L}(a)$. Il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ et $\gamma_2 \in \Gamma$ tels que :

$$\gamma_1 a = x \; ; \qquad \gamma_2 x = a \; .$$

Il en résulte que

$$\delta_1^* x = \delta_1^* \gamma_1 a = \delta_1 \gamma_1 a \; .$$

$\delta_1^* x$ est donc élément de E , d'après la condition (iv). Mais $a \mathcal{L} x$, et de plus, $\delta_1^* a$ et $\delta_1^* x$ appartiennent à E , donc $\delta_1^* a \mathcal{L} \delta_1^* x$, i. e. $\delta_1^* x \mathcal{L} b$. δ_1^* applique donc $\mathcal{L}(a)$ dans $\mathcal{L}(b)$. De la même façon, on démontrerait que δ_2^* applique $\mathcal{L}(b)$ dans $\mathcal{L}(a)$. De plus,

$$\begin{aligned}\delta_2^* \delta_1^* x &= \delta_2 \delta_1 x \\ &= \delta_2 \delta_1 \gamma_1 a \\ &= \gamma_1 \delta_2 \delta_1 a \\ &= \gamma_1 \delta_2 b \\ &= \gamma_1 a \\ &= x .\end{aligned}$$

Puisque x est quelconque, c'est donc que $\delta_2^* \delta_1^* = \varepsilon^*_{\mathcal{L}(a)}$. De même,

$$\delta_1^* \delta_2^* = \varepsilon^*_{\mathcal{L}(b)} .$$

δ_1^* et δ_2^* sont deux bijections réciproques de $\mathcal{L}(a)$ sur $\mathcal{L}(b)$, échangeant a et b. Montrons qu'elles respectent $\mathcal{R}$. On a :

$$\Delta\delta_1^* x \subseteq \Delta^2 x \subseteq \Delta x \qquad \text{(d'après (i))}$$

$$\Delta x = \Delta\delta_2^* \delta_1^* x$$

$$\Delta x \subseteq \Delta^2 \delta_1^* x$$

$$\Delta x \subseteq \Delta(\delta_1^* x) \qquad \text{(d'après (i))}.$$

D'où, $\Delta x = \Delta(\delta_1^* x)$, i. e. $x \equiv \delta_1^* x \ (\mathcal{R})$. De même,

$$\delta_2^*(\delta_1^* x) \equiv \delta_1^* x \ (\mathcal{R}) \quad (\text{et ce, } \forall\, x \in \mathcal{L}(a)).$$

Soit maintenant $\mathcal{H}(x) = \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{L}(a)$ une $\mathcal{H}$-classe contenue dans $\mathcal{L}(a)$; on a

$$\delta_1^* \mathcal{H}(x) = \delta_1^*(\mathcal{R}(x) \cap \mathcal{L}(a)) .$$

D'où, $\delta_1^* \mathcal{H}(x) \subseteq \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{L}(b)$ puisque δ_1^* respecte $\mathcal{R}$. Posons : $\mathcal{R}(x)\cap\mathcal{L}(b)=\mathcal{H}(y)$.

$$\delta_2^* \mathcal{H}(y) = \delta_2^*(\mathcal{R}(x) \cap \mathcal{L}(b))$$

$$\delta_2^* \mathcal{H}(y) \subseteq \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{L}(a) .$$

En résumé :

$$\delta_1^* \mathcal{H}(x) \subseteq \mathcal{H}(y)$$

$$\delta_2^* \mathcal{H}(y) \subseteq \mathcal{H}(x) .$$

Mais,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(y) &= \varepsilon^*_{\mathcal{L}(b)} \mathcal{H}(y) \\ &= \delta_1^* \delta_2^* \mathcal{H}(y) \\ \mathcal{H}(y) &\subseteq \delta_1^* \mathcal{H}(x) .\end{aligned}$$

D'où, $\mathcal{H}(y) \subseteq \delta_1^* \mathcal{H}(x) \subseteq \mathcal{H}(y)$. Finalement

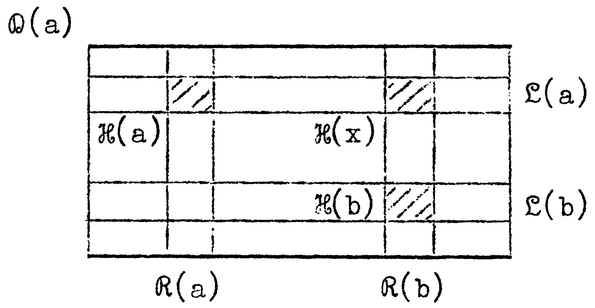
$$\delta_1^* \mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(y)$$

$$\delta_2^* \mathcal{H}(y) = \mathcal{H}(x) ,$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 2.1.5. - Si a et b sont des éléments de E, tels que $a \mathcal{R} b$ (resp. $a \mathcal{L} b$), alors $\mathrm{Card}[\mathcal{H}(a)] = \mathrm{Card}[\mathcal{H}(b)]$.

COROLLAIRE 2.1.6. - Si a et b, éléments de E, sont tels que $a \mathcal{D} b$, alors, $\mathrm{Card}[\mathcal{H}(a)] = \mathrm{Card}[\mathcal{H}(b)]$.



Soient $a \in E$, $b \in E$, tels que

$$a \equiv b \quad (\mathcal{D}) .$$

Il existe alors $x \in E$ tel que :

$$a \equiv x \quad (\mathcal{L})$$
$$x \equiv b \quad (\mathcal{R}) .$$

D'où la structure en "boîte à oeufs" représentée ci-dessus. Par construction, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\delta \in \Delta$, tels que $x = \gamma a$; $b = \delta x$. Posons

$$\gamma^* = \gamma|\mathcal{R}(a) , \quad \delta^* = \delta|\mathcal{L}(a) .$$

Alors,

$$b = \delta\gamma a = \delta^* \gamma^* a .$$

Or γ^* applique bijectivement $\mathcal{H}(a)$ sur $\mathcal{H}(x)$, δ^* applique bijectivement $\mathcal{H}(x)$ sur $\mathcal{H}(b)$. $\delta^* \gamma^*$ est donc une bijection de $\mathcal{H}(a)$ sur $\mathcal{H}(b)$, d'où le résultat annoncé.

On remarquera l'analogie avec l'expression classique du lemme de Green et ses corollaires immédiats.

2.2. Groupes de Schützenberger associés aux $\mathcal{H}$-classes.

Nous nous plaçons toujours dans le cadre des hypothèses du paragraphe précédent, à savoir celui des relations de Green généralisées.

Etant donnée A, partie de E, nous considèrerons :

$$\Delta_A = \{\delta \in \Delta : \delta A \subseteq A\} \quad (\text{resp. } \Gamma_A = \{\gamma \in \Gamma : \gamma A \subseteq A\}) .$$

Δ_A (resp. Γ_A) est un sous-demi-groupe de Δ (resp. de Γ). Nous poserons $\overline{\delta} = \delta|A$, pour tout δ de Δ_A, avec une définition analogue pour Γ_A. Particularisons A en prenant une $\mathcal{H}$-classe de E, que nous noterons H, et désignons par L et R respectivement les $\mathcal{L}$-classe et $\mathcal{R}$-classe contenant H. Posons enfin :

$$\overline{\Delta}_H = \{\overline{\delta} , \delta \in \Delta_H\} ; \qquad \overline{\Gamma}_H = \{\overline{\gamma} , \gamma \in \Gamma_H\} .$$

PROPOSITION 2.2.1. - $\overline{\Delta}_H$ (resp. $\overline{\Gamma}_H$) est un groupe, appelé groupe de Schützenberger de H à droite (resp. à gauche).

Puisque $\varepsilon \in \Delta_H$, alors $\overline{\varepsilon} \in \overline{\Delta}_H$, avec $\overline{\varepsilon} = \varepsilon|H$. D'autre part, $\overline{\Delta}_H$ est un sous-demi-groupe : il nous suffit donc de montrer que, $\forall\, \overline{\delta} \in \overline{\Delta}_H$, il existe un inverse $(\overline{\delta})^{-1}$. A cet effet, considérons $a \in H$, et posons $\overline{\delta} a = b$. b est élément de H

puisque $\delta \in \Delta_H$. Donc $a \mathcal{H} b$, et par suite, $a \mathcal{R} b$. Appliquons le lemme de Green généralisé. Si δ' est telle que $\delta' b = a$, et si nous posons :

$$\delta^* = \delta | L \ , \quad \delta'^* = \delta' | L \ ,$$

δ'^* et δ^* sont deux bijections réciproques de L sur L, respectant $\mathcal{R}$. Ces deux bijections appliquent donc toute $\mathcal{H}$-classe contenue dans L sur elle-même, et envoient donc H sur H ; soit $\overline{\delta'} = \delta_1^* | H$, $\overline{\delta'}$ envoie H sur elle-même) et donc $\overline{\delta'} \in \overline{\Delta}_H$. De plus,

$$\overline{\delta}.\overline{\delta'} = \overline{\delta\delta'} = \overline{\varepsilon} = \overline{\delta'}\ \overline{\delta} = \overline{\delta'}.\overline{\delta} \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Examinons quelques propriétés supplémentaires de ces groupes de Schützenberger.

PROPOSITION 2.2.2. - $\overline{\Delta}_H$ (<u>resp.</u> $\overline{\Gamma}_H$) <u>est simplement transitif.</u>

Il s'agit de montrer que, pour tout $a \in H$, tout $b \in H$, il existe un unique $\overline{\delta} \in \overline{\Delta}_H$ tel que $\overline{\delta} a = b$.

Puisque $a \mathcal{H} b$, <u>a fortiori</u> $a \mathcal{R} b$. Il existe donc $\delta \in \Delta$ tel que $b = \delta a$. D'après le lemme de Green généralisé, $\delta \in \Delta_H$, et donc $\overline{\delta} \in \overline{\Delta}_H$. De plus, $\overline{\delta} a = \delta a = b$.

Soient $\overline{\delta}_1 \in \overline{\Delta}_H$, $\overline{\delta}_2 \in \overline{\Delta}_H$, tels que $\overline{\delta}_1\ a = \overline{\delta}_2\ a = b$, et soit h quelconque dans H. Alors $h \mathcal{L} a$, d'où hha, et il existe donc $\gamma \in \Gamma$, tel que $h = \gamma a$. On en tire :

$$\overline{\delta}_1\ h = \delta_1\ h = \delta_1\ \gamma a = \gamma \delta_1\ a = \gamma b \ ,$$

$$\overline{\delta}_2\ h = \delta_2\ h = \delta_2\ \gamma a = \gamma \delta_2\ a = \gamma b \ .$$

Puisque h est quelconque, $\overline{\delta}_1 = \overline{\delta}_2$, d'où l'unicité. Remarquons que

$$(\forall\ \overline{\delta} \in \Delta_H)(\forall\ \overline{\gamma} \in \overline{\Gamma}_H) \ , \qquad \overline{\delta}\overline{\gamma} = \overline{\delta\gamma} = \overline{\gamma\delta} = \overline{\gamma}\overline{\delta} \ .$$

PROPOSITION 2.2.3. - $\overline{\Delta}_H \approx \overline{\Gamma}_H$ ($\overline{\Delta}_H$ <u>et</u> $\overline{\Gamma}_H$ <u>sont antimorphes</u>).

Soient $h \in H$ et $\overline{\delta} \in \overline{\Delta}_H$; $\overline{\delta} h \in H$, et il existe donc un unique $\overline{\gamma} \in \overline{\Gamma}_H$ tel que $\overline{\gamma} h = \overline{\delta} h$, d'après la proposition précédente. On définit ainsi une application φ de $\overline{\Delta}_H$ dans $\overline{\Gamma}_H$, avec $\varphi(\overline{\delta}) = \overline{\gamma}$. Tout $\gamma \in \overline{\Gamma}_H$ est l'image d'un $\overline{\delta} \in \overline{\Delta}_H$, et d'un seul, et φ est une bijection de $\overline{\Delta}_H$ sur $\overline{\Gamma}_H$.

De plus

$$\begin{aligned}(\forall\ \overline{\delta}_1 \in \overline{\Delta}_H)(\forall\ \overline{\delta}_2 \in \overline{\Delta}_H) \ , \ \varphi(\overline{\delta}_1\ \overline{\delta}_2)h &= \overline{\delta}_1\ \overline{\delta}_2\ h \\ &= \overline{\delta}_1\ \overline{\gamma}_2\ h \\ &= \overline{\gamma}_2\ \overline{\delta}_1\ h \\ &= \overline{\gamma}_2\ \overline{\gamma}_1\ h \\ &= \varphi(\overline{\delta}_2)\ \varphi(\overline{\delta}_1)\ h \ .\end{aligned}$$

D'où, $(\forall\ \bar{\delta}_1 \in \bar{\Delta}_H)(\forall\ \bar{\delta}_2 \in \bar{\Delta}_H)$, $\varphi(\bar{\delta}_1\ \bar{\delta}_2) = \varphi(\bar{\delta}_2)\ \varphi(\bar{\delta}_1)$, et donc :

$$\bar{\Delta}_H \eqsim \bar{\Gamma}_H .$$

PROPOSITION 2.2.4. - Les deux groupes de Schützenberger $\bar{\Delta}_H$ et $\bar{\Delta}_{H'}$, associés à deux $\mathcal{H}$-classes H et H' , contenues dans la même $\mathcal{R}$-classe, sont isomorphes.

On a un énoncé analogue pour les deux groupes de Schützenberger $\bar{\Gamma}_H$ et $\bar{\Gamma}_{H'}$ associés à deux $\mathcal{H}$-classes H et H' , contenues dans la même $\mathcal{L}$-classe.

Soient donc H et H' deux $\mathcal{H}$-classes comprises dans la même $\mathcal{L}$-classe. D'après le lemme de Green généralisé, il existe deux bijections réciproques Φ et Φ' entre les $\mathcal{L}$-classes, contenant respectivement H et H' . Posons :

$$\bar{\Phi} = \Phi|H \ ; \quad \tilde{\Phi}' = \Phi'|H' .$$

Alors :

$$\tilde{\Phi}'\ \bar{\Phi} = \bar{\varepsilon}_H \ ; \quad \bar{\Phi}\tilde{\Phi}' = \tilde{\varepsilon}_{H'} .$$

De plus, $\bar{\Phi}H = H'$; $\tilde{\Phi}'\ H' = H$. Soit alors $\bar{\delta} \in \bar{\Delta}_H$. $\overline{\bar{\Phi}\bar{\delta}\tilde{\Phi}'}$ est une bijection de H' sur elle-même ; posons

$$\delta' = \Phi\delta\Phi' ,$$

$\delta' \in \Delta$, et l'on a

$$\delta'\ H' = \Phi\delta\Phi'\ H' = \Phi\delta H = \Phi H = H' .$$

Donc $\delta' \in \Delta_{H'}$, $\tilde{\delta}' = \delta'|H'$ appartient à $\bar{\Delta}_{H'}$, et

(1) $$\tilde{\delta}' = \bar{\Phi}\bar{\delta}\tilde{\Phi}' .$$

En outre,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}'\ \tilde{\delta}'\ \bar{\Phi} &= \tilde{\Phi}'\ \bar{\Phi}\bar{\delta}\tilde{\Phi}'\ \bar{\Phi}\\ &= \bar{\varepsilon}_H\ \bar{\delta}\bar{\varepsilon}_H = \bar{\delta} .\end{aligned}$$

(2) $$\bar{\delta} = \tilde{\Phi}'\ \tilde{\delta}'\ \Phi' .$$

Les égalités (1) et (2) définissent deux bijections réciproques de $\bar{\Delta}_H$ sur $\bar{\Delta}_{H'}$ et de $\bar{\Delta}_{H'}$ sur $\bar{\Delta}_H$. Posons :

$$\tilde{\delta}' = \psi(\bar{\delta}) .$$

Si $\bar{\delta}_1 \in \bar{\Delta}_H$ et $\bar{\delta}_2 \in \bar{\Delta}_H$, alors

$$\begin{aligned}\psi(\bar{\delta}_1\ \bar{\delta}_2) &= \bar{\Phi}\bar{\delta}_1\ \bar{\delta}_2\ \tilde{\Phi}'\\ &= \bar{\Phi}\bar{\delta}_1\ \bar{\varepsilon}_H\ \bar{\delta}_2\ \tilde{\Phi}'\\ &= \bar{\Phi}\bar{\delta}_1\ \tilde{\Phi}'\ \bar{\Phi}\bar{\delta}_2\ \tilde{\Phi}'\end{aligned}$$

$$\psi(\bar{\delta}_1\ \bar{\delta}_2) = \psi(\bar{\delta}_1)\ \psi(\bar{\delta}_2) .$$

Par conséquent, $\bar{\Delta}_H \simeq \bar{\Delta}_{H'}$.

COROLLAIRE 2.2.5. - A deux $\mathcal{H}$-classes contenues dans une même $\mathcal{D}$-classe correspondent des groupes de Schützenberger à droite (resp. à gauche) isomorphes.

3. Application au cas des demi-groupes.

Dans tout ce qui suit, nous prendrons comme ensemble E un sous-demi-groupe D d'un demi-groupe D^* ; D^* jouera alors le rôle de F . Nous prendrons pour Δ et Γ deux ensembles de translations, respectivement à droite et à gauche, par des éléments de D^* , et tels qu'ils satisfassent les conditions (i), (ii), (iii), (iv). Nous appellerons, de plus, Δ_0 et Γ_0 , les ensembles des translations respectivement à droite et à gauche par les éléments de D , $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{L}_0$ les relations de Green associées.

Rappelons que, pour toute translation à droite δ et toute translation à gauche γ (par des éléments de D^*), on a

$$\gamma\delta = \delta\gamma$$

$$(\forall\, x \in D^*)(\forall\, y \in D^*)\ , \quad \delta(xy) = x(\delta y)$$

$$(\forall\, x \in D^*)(\forall\, y \in D^*)\ , \quad \gamma(xy) = (\gamma x)y\ .$$

3.1. Propriétés multiplicatives.

PROPOSITION 3.1.1 (<u>Généralisation du théorème de Clifford-Miller</u>). - <u>Soient</u> $a \in D$ <u>et</u> $b \in D$; <u>pour que</u> $ab \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{L}(b)$, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathcal{R}(b) \cap \mathcal{L}(a)$ <u>contienne un idempotent</u>. <u>Alors</u> :

$$a\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(a)b = \mathcal{H}(a)\ \mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(ab)\ .$$

(a) <u>Condition nécessaire</u>. - Supposons que $ab \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{L}(b)$; il existe alors $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_2 \in \Delta$, $\gamma_1 \in \Gamma$, $\gamma_2 \in \Gamma$ tels que

$$\delta_1\ a = ab\ ; \quad \delta_2\ ab = a$$

$$\gamma_1\ b = ab\ ; \quad \gamma_2\ ab = b\ .$$

Appliquons le lemme de Green généralisé ; $\delta_2^* = \delta_2|\mathcal{L}(ab)$ applique $\mathcal{L}(ab)$ sur $\mathcal{L}(a)$ en respectant $\mathcal{R}$. Puisque $b \in \mathcal{R}(b)$ et que $ab \in \mathcal{L}(b)$, $\delta_2\ b$ appartient donc à $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(b)$. De plus, si $\delta_1^* = \delta_1|\mathcal{L}(a)$, alors

$$\delta_1^*\ \delta_2^* = \varepsilon^*_{\mathcal{L}(ab)}\ ; \qquad \delta_2^*\ \delta_1^* = \varepsilon^*_{\mathcal{L}(a)}\ .$$

Mais :

$$\begin{aligned}\delta_1(\delta_2\ b)^2 &= \delta_1(\delta_2\ b.\delta_2\ b) = \delta_2\ b.\delta_1\ \delta_2\ b\\ &= \delta_2\ b.b\ ,\ \text{car}\ \ \mathcal{L}(b) = \mathcal{L}(ab)\\ &= (\delta_2\ \gamma_2\ ab).b\\ &= (\gamma_2\ \delta_2\ ab).b\\ &= (\gamma_2\ a).b\\ &= \gamma_2\ ab\end{aligned}$$

$$\delta_1(\delta_2\ b)^2 = b\ .$$

D'où, $\delta_2\,\delta_1(\delta_2\,b)^2 = \delta_2\,b$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\delta_2\,\delta_1(\delta_2\,b)^2 &= \delta_2\,\delta_1(\delta_2\,b.\delta_2\,b)\\ &= \delta_2\,b.\delta_2\,\delta_1\,\delta_2\,b\\ &= \delta_2\,b.\delta_2\,b = (\delta_2\,b)^2\end{aligned}$$

et donc

$$(\delta_2\,b)^2 = \delta_2\,b\ .$$

$\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(b)$ contient donc l'idempotent $\delta_2\,b$.

(b) Condition suffisante. - Supposons réciproquement que $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(b)$ contienne un idempotent e . Par conséquent, e est élément de $\mathcal{R}(b)$, et il existe $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta$, tels que

$$\delta e = b\ ;\quad \delta'\,b = e\ .$$

$\delta^* = \delta|\mathcal{L}(a)$ est une bijection échangeant e et b . Elle applique $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(a)$ sur $\mathcal{L}(b)$, et respecte $\mathcal{R}$. De plus, e appartient à $\mathcal{L}(a)$; il existe donc $\gamma \in \Gamma$ tel que $a = \gamma e$. D'où

$$\begin{aligned}ae &= (\gamma e)e\\ &= \gamma e^2\\ ae &= \gamma e = e\ .\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\delta^*\,a &= \delta^*(ae)\\ &= a\delta^*\,e \qquad (\text{car}\ \ e \in \mathcal{L}(a))\\ &= a\delta e\\ \delta^*\,a &= ab\ .\end{aligned}$$

Donc ab appartient à $\mathcal{L}(b)$. δ^* respecte $\mathcal{R}$, d'où $a\ \mathcal{R}\ ab$. Finalement, $ab \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{L}(b)$.

(c) Supposons que $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(b)$ contienne un idempotent e , et soient $x \in \mathcal{H}(a)$, $y \in \mathcal{H}(b)$. Alors $e \in \mathcal{L}(x) \cap \mathcal{R}(y)$, et donc $xy \in \mathcal{L}(y) \cap \mathcal{R}(x)$, d'après ce qui précède. Mais

$$\mathcal{L}(y) \cap \mathcal{R}(x) = \mathcal{L}(b) \cap \mathcal{R}(a) = \mathcal{H}(ab)\ ,$$

et donc

$$\mathcal{H}(a).\mathcal{H}(b) \subseteq \mathcal{H}(ab)\ .$$

Puisque $e \in \mathcal{R}(b)$, il existe $\delta \in \Delta$ tel que

$$\delta e = b\ .$$

$\delta^* = \delta|\mathcal{L}(a)$ applique $\mathcal{H}(a)$ sur $\mathcal{H}(ab)$ d'après le lemme de Green généralisé, d'où

$$\delta(\mathcal{H}(a)) = \mathcal{H}(ab) .$$

Soit $x \in \mathcal{L}(e)$; il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $x = \gamma e$, d'où,

$$xe = (\gamma e)e = \gamma e^2$$

$$xe = \gamma e = x .$$

e est élément neutre à droite de $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(a)$, et <u>a fortiori</u> à droite de $\mathcal{H}(a)$. Soit $x \in \mathcal{H}(a)$:

$$\delta x = \delta(xe)$$

$$= x\delta e$$

$$\delta x = xb .$$

D'où

$$\mathcal{H}(ab) = \delta(\mathcal{H}(a)) = \mathcal{H}(a)\ b .$$

On démontrerait de même que $\mathcal{H}(ab) = a\mathcal{H}(b)$. Finalement :

$$\mathcal{H}(ab) = a\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(a)\ b$$

$$a\mathcal{H}(b) \subseteq \mathcal{H}(a)\ \mathcal{H}(b)$$

$$\mathcal{H}(a)\ b \subseteq \mathcal{H}(a)\ \mathcal{H}(b)$$

$$\mathcal{H}(a)\ \mathcal{H}(b) \subseteq \mathcal{H}(ab) .$$

D'où, $a\mathcal{H}(b) = b\mathcal{H}(a) = \mathcal{H}(a).\mathcal{H}(b) = \mathcal{H}(ab)$.

La proposition 3.1.1 va nous permettre de caractériser les $\mathcal{H}$-classes contenant un idempotent.

PROPOSITION 3.1.2. - <u>Toute $\mathcal{H}$-classe contenant un idempotent est un sous-groupe de</u> D . <u>C'est un sous-groupe maximal si</u> $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Puisque la $\mathcal{H}$-classe considérée contient un idempotent e , c'est un sous-demi-groupe de D d'après la proposition 3.1.1. Soit maintenant x élément quelconque de $\mathcal{H}(e)$; $x \mathcal{R} e$ et $x \mathcal{L} e$, et il existe donc $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_2 \in \Delta$, $\gamma_1 \in \Gamma$, $\gamma_2 \in \Gamma$, tels que

$$x = \delta_1\ e \ ; \quad e = \delta_2\ x$$

$$x = \gamma_1\ e \ ; \quad e = \gamma_2\ x .$$

Alors :

$$ex = e(\delta_1\ e) = \delta_1\ e^2$$

$$ex = \delta_1\ e = x$$

$$xe = (\gamma_1\ e)e = \gamma_1\ e^2$$

$$xe = \gamma_1\ e = x .$$

e est élément unité de $\mathcal{H}(e)$. D'après le lemme de Green généralisé, $\delta_2^* = \delta_2|\mathcal{L}(e)$

applique $\mathcal{H}(e)$ sur elle-même, et par conséquent, $\delta_2\, e$ appartient à $\mathcal{H}(e)$. Or :

$$\delta_2\, e = \delta_2\, \gamma_2\, x = \gamma_2\, \delta_2\, x = \gamma_2\, e$$

et

$$x(\delta_2\, e) = \delta_2(xe) = \delta_2\, x = e$$

$$(\delta_2\, e)x = (\gamma_2\, e)x = \gamma_2(ex) = \gamma_2(x) = e$$

$\mathcal{H}(e)$ est donc un groupe. Comme $e \in \mathcal{H}(e)$, $\mathcal{H}(e)$ est compris dans le sous-groupe maximal $\mathcal{H}_0(e)$. Si $\Delta_0 \subseteq \Delta$ et $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, alors $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$, et donc

$$\mathcal{H}_0(e) \subseteq \mathcal{H}(e) \; .$$

D'où l'égalité, puisuqe l'on a toujours $\mathcal{H}(e) \subseteq \mathcal{H}_0(e)$.

COROLLAIRE 3.1.3. - <u>Soient</u> $a \in D$ <u>et</u> $b \in D$; <u>pour que</u> $ab \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{L}(b)$, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathcal{R}(b) \cap \mathcal{L}(a)$ <u>soit un sous-groupe de</u> D .

Examinons encore quelques propriétés multiplicatives.

PROPOSITION 3.1.4. - <u>Soient</u> $a \in D$, $a' \in D$, $b \in D$, $b' \in D$ <u>tels que</u> $a \,\mathcal{L}\, a'$ <u>et</u> $b \,\mathcal{R}\, b'$. <u>Alors</u> $ab \,\mathcal{D}\, a'\, b'$.

Si $a \,\mathcal{L}\, a'$ et $b \,\mathcal{R}\, b'$, il existe $\gamma_1 \in \Gamma$, $\gamma_2 \in \Gamma$, $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_2 \in \Delta$ tels que

$$\gamma_1\, a = a' \; ; \quad \gamma_2\, a' = a$$

$$\delta_1\, b = b' \; ; \quad \delta_2\, b' = b \; .$$

On en déduit

$$ab = (\gamma_2\, a')b = \gamma_2(a'\, b)$$

$$a'\, b = (\gamma_1\, a)b = \gamma_1(ab) \; ,$$

i. e. $ab \,\mathcal{L}\, a'\, b$. De même,

$$a'\, b = a'(\delta_2\, b') = \delta_2(a'\, b')$$

$$a'\, b' = a'(\delta_1\, b) = \delta_1(a'\, b) \; ,$$

i. e. $a'\, b \,\mathcal{R}\, a'\, b'$. D'où $ab \,\mathcal{D}\, a'\, b'$.

PROPOSITION 3.1.5. - <u>Pour tout</u> $a \in D$ <u>et pour tout</u> $b \in D$, $\mathcal{L}(a)\, \mathcal{R}(b) \subseteq \mathcal{D}(ab)$. <u>Si</u> $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(b)$ <u>contient un idempotent, alors l'égalité a lieu</u>.

La première partie découle immédiatement de la proposition 3.1.4. Supposons maintenant que $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(b)$ contienne un idempotent e : $e^2 = e$, et donc

$$e \in \mathcal{L}(a)\, \mathcal{R}(b) \; ,$$

et, par voie de conséquence, à $\mathcal{D}(ab)$. Soit alors x élément de $\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(e)$. Il existe $y \in D$ tel que

$$x \equiv y \quad (\mathcal{L})$$

$$y \equiv e \quad (\mathcal{R}) .$$

On peut donc trouver $\gamma_1 \in \Gamma$, $\gamma_2 \in \Gamma$, $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_2 \in \Delta$ tels que

$$\gamma_1 \; x = y \; ; \quad \gamma_2 \; y = x$$

$$\delta_1 \; y = e \; ; \quad \delta_2 \; e = y .$$

Alors,

$$\begin{aligned} x &= \gamma_2 \; y = \gamma_2(ey) \qquad (\text{car } \; ey = e\delta_2 \; e = \delta_2 \; e = y) \\ &= \gamma_2(e) \; y \\ &= (\gamma_2 \; \delta_1 \; y)y \\ &= (\delta_1 \; \gamma_2 \; y)y \\ &= (\delta_1 \; x)y \end{aligned}$$

Par construction, $y \in \mathcal{R}(e) = \mathcal{R}(b)$. D'après le lemme de Green généralisé, δ_1 applique $\mathcal{L}(y)$ sur $\mathcal{L}(e) = \mathcal{L}(a)$. Donc $\delta_1 \; x \in \mathcal{L}(a)$; et finalement, x appartient à $\mathcal{L}(a) \; \mathcal{R}(b)$, d'où l'égalité.

3.2. Groupes de Schützenberger.

PROPOSITION 3.2.1. - Pour une $\mathcal{H}$-classe H , contenant un idempotent, le groupe de Schützenberger à gauche associé à H est le groupe des translations à gauche de H , et, de plus, $\overline{\Gamma}_H \simeq H \simeq \overline{\Delta}_H$.

Soit e l'idempotent de D appartenant à la $\mathcal{H}$-classe H , et soit $\overline{\Gamma}_H$ le groupe de Schützenberger à gauche associé à H . Soit finalement $\overline{\gamma} \in \overline{\Gamma}_H$.

$$\overline{\gamma}e = h ,$$

et $h \in H$ par définition. On définit ainsi, puisque $\overline{\Gamma}_H$ est simplement transitif, une bijection entre H et $\overline{\Gamma}_H$. Soit alors γ_h , définie par

$$(\forall \; x \in D^*) = \gamma_h \; x = hx$$

$\gamma_h \; H = hH = H$ puisque H est un groupe. De plus,

$$\begin{aligned} (\forall \; x \in H) \quad \gamma_h \; x &= hx \\ &= (\overline{\gamma}e)x \\ &= \overline{\gamma}(ex) \end{aligned}$$

$$\gamma_h \; x = \overline{\gamma}x \qquad (\text{car } \; e \; \text{ est unité de } \; H).$$

Si donc $\overline{\gamma}_h = \gamma_h|H$, alors $\overline{\gamma}_h = \overline{\gamma}$, et donc $\overline{\gamma}_h \in \overline{\Gamma}_H$. Soit alors ψ l'application de H dans $\overline{\Gamma}_H$, définie par

$$(\forall \; h \in H) \quad \psi(h) = \overline{\gamma}_h ,$$

c'est une bijection, et de plus :

$$(\forall\ h \in H)(\forall\ h' \in H)\ ,\quad \psi(h.h') = \overline{\gamma_{hh'}} = \overline{\gamma_h\ \gamma_{h'}} = \overline{\gamma_h}\cdot\overline{\gamma_{h'}}$$
$$= \psi(h)\ \psi(h')\ ,$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 3.2.2. - Deux sous-groupes $\mathcal{H}(e)$ et $\mathcal{H}'(e')$, compris dans une même $\mathcal{D}$-classe, sont isomorphes.

Ce corollaire découle immédiatement des propositions 2.2.5 et 3.2.1.

3.3. Eléments réguliers et éléments pseudo-réguliers.

Rappelons qu'un élément a d'un demi-groupe S est régulier au sens de von NEUMANN s'il existe $x \in S$ tel que

$$axa = a\ .$$

Nous allons étudier, dans ce paragraphe, une autre définition des éléments réguliers, faisant intervenir les opérateurs de Green tels que nous les avons définis.

DÉFINITION 3.3.1. - Un élément a de D sera pseudo-régulier s'il existe un élément x de D tel que : $axa \equiv a\ (\mathcal{H})$.

Remarquons que tout élément régulier au sens de von NEUMANN est pseudo-régulier. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, on peut caractériser les éléments pseudo-réguliers de façon précise.

PROPOSITION 3.3.2. - Si $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, alors, pour qu'un élément a de D soit pseudo-régulier, il faut et il suffit que sa $\mathcal{R}$-classe et sa $\mathcal{L}$-classe contiennent chacune un idempotent.

Supposons tout d'abord que $a \in D$ soit pseudo-régulier. Il existe alors, par définition, un $x \in D$ tel que $axa\ \mathcal{H}\ a$. Il existe donc $\delta \in \Delta$ et $\gamma \in \Gamma$, tels que :

$$\delta(axa) = a\ ;\quad \gamma(axa) = a\ .$$

Remarquons que $\gamma(a) = \delta(a)$. De plus :

$$xa = x(a)$$

$$a = \gamma(axa) = (\gamma a)xa\ .$$

Puisque $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, la translation à gauche par x , élément de D , appartient à Γ ; de même, la translation à gauche par a appartient à Γ . Comme $\Gamma^2 \subseteq \Gamma$, γa est élément de Γ , et finalement $a\ \mathcal{L}\ xa$. D'après le lemme de Green, δ applique $\mathcal{L}(a)$ sur $\mathcal{L}(a)$, et donc $\delta(xa) = x\delta a$ appartient à $\mathcal{L}(a)$. Or :

$$\begin{aligned}(x\delta a)^2 &= x(\delta a)\ x(\delta a)\\ &= x(\gamma a)\ x(\delta a) \qquad (\text{car } \gamma a = \delta a)\\ &= x[(\gamma a)\ x(\delta a)]\\ &= x\gamma\delta(axa)\\ &= x\delta\gamma(axa)\\ &= x\delta a\ .\end{aligned}$$

$\mathcal{L}(a)$ contient donc l'idempotent $e = x\delta a$. On montrerait de même que $\mathcal{R}(a)$ contient l'idempotent $f = (\gamma a)x$. Supposons réciproquement que $\mathcal{R}(a)$ et $\mathcal{L}(a)$ contiennent respectivement les idempotents e et f . Alors il existe $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta$, $\gamma \in \Gamma$, tels que

$$\delta a = e\ ;\quad \delta' e = a\ ;\quad \gamma f = a\ .$$

On en déduit aussitôt

$$ea = a\ ;\quad af = f\ .$$

$\delta^* = \delta|\mathcal{L}(a)$ applique $\mathcal{L}(a)$ sur $\mathcal{L}(e)$, et donc δf appartient à $\mathcal{L}(e)$, i. e. à D . De plus,

$$\begin{aligned}a(\delta f)\ a &= \delta(af).a\\ &= (\delta a)a\\ &= ea\\ a(\delta f)\ a &= a\ .\end{aligned}$$

a est régulier, donc pseudo-régulier.

COROLLAIRE 3.3.3. - <u>Si</u> $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, <u>alors</u> a <u>est régulier si et seulement s'il est pseudo-régulier</u>.

En effet, si a est régulier, il est pseudo-régulier. Mais si a est pseudo-régulier, $\mathcal{R}(a)$ et $\mathcal{L}(a)$ contiennent chacune un idempotent ; d'après la deuxième partie de la démonstration précédente, a est alors régulier.

Nous verrons une application de ce corollaire lorsque nous examinerons le cas particulier du semi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite.

COROLLAIRE 3.3.4. - <u>Pour que</u> a , <u>élément de</u> D , <u>soit régulier</u> (<u>au sens de von NEUMANN</u>), <u>il faut et il suffit qu'il existe</u> x <u>élément de</u> D , <u>tel que</u> $axa\ \mathcal{H}_0\ a$.

C'est l'application du corollaire précédent au cas particulier $\Delta = \Delta_0$, $\Gamma = \Gamma_0$.

3.4. <u>Inverses généralisés</u>.

Rappelons que les éléments a et a' de D sont dits inverses généralisés si l'on a : $aa'a = a$; $a'aa' = a'$. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4.1. - Si $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, et si a et a' , éléments de D , sont inverses généralisés, chacune des deux $\mathcal{H}$-classes $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(a')$ et $\mathcal{L}(a') \cap \mathcal{R}(a)$ est un sous-groupe maximal d'élément neutre $e = aa'$ et $f = a'a$ respectivement.

En effet, d'après l'étude des relations de Green classiques $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{L}_0$, on sait que si a et a' , éléments de D , sont inverses généralisés, chacune des deux $\mathcal{H}_0$-classes $\mathcal{L}_0(a) \cap \mathcal{R}_0(a')$ et $\mathcal{L}_0(a') \cap \mathcal{R}_0(a)$ est un sous-groupe maximal d'élément neutre $e = aa'$ et $f = a'a$ respectivement. Puisque $\Delta_0 \subseteq \Delta$, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, alors $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$. Les deux $\mathcal{H}$-classes $\mathcal{L}(a) \cap \mathcal{R}(a')$ et $\mathcal{L}(a') \cap \mathcal{R}(a)$ contiennent donc respectivement les idempotents e et f . D'après la proposition 3.1.2, ce sont des sous-groupes maximaux de D (donc des $\mathcal{H}_0$-classes).

PROPOSITION 3.4.2. - Si un élément a de D est tel que sa $\mathcal{R}$-classe contienne un idempotent e , et sa $\mathcal{L}$-classe un idempotent f , alors a possède un inverse généralisé a' dans $\mathcal{L}(e) \cap \mathcal{R}(f)$, et a' est unique dans $\mathcal{L}(e) \cap \mathcal{R}(f)$.

(a) Cas particuliers. - C'est le cas où $a = e$ ou $a = f$. Prenons par exemple $a = f$. Alors, $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(e) = \mathcal{R}(f)$, et donc il existe $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_2 \in \Delta$ tels que

$$\delta_1 e = f \ ; \quad \delta_2 f = e \ .$$

On en déduit :

$$ef = e\delta_1 e = \delta_1 e^2 = f$$
$$fe = f\delta_2 f = \delta_2 f^2 = e \ .$$

Alors :

$$e = e^2 = efe$$
$$f = f^2 = fef \ .$$

Mais, $f = a$, d'où, $eae = e$, $aea = a$, et a possède un inverse généralisé.

(b) Cas général. - Si $a \neq e$ et $a \neq f$, alors $a \,\mathcal{R}\, e$ et $a \,\mathcal{L}\, f$. Il existe donc $\delta \in \Delta$, $\delta' \in \Delta$, $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma$ tels que :

$$e = \delta a \ ; \quad a = \delta' e$$
$$f = \gamma a \ ; \quad a = \gamma' f \ .$$

On en déduit

$$ea = a \ ; \quad af = a \ .$$

Soit alors $a' = (\delta f)e$. On a :

$$a' = (\delta\gamma a)e = (\gamma\delta a)e$$
(i) $$= (\gamma e)e$$
$$a' = \gamma e \ .$$

Par ailleurs :

$$\gamma' a' = \gamma'(\delta f)e$$
$$= (\gamma' \delta f)e = (\delta\gamma' f)e$$
(ii) $$= (\delta a)e$$
$$\gamma' a' = e .$$

D'après le lemme de Green généralisé, γ applique $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}(e)$ sur $\mathcal{R}(f)$: d'après (i), a' appartient donc à $\mathcal{R}(f)$. (i) et (ii) prouvent, de plus, que a' appartient à $\mathcal{L}(e)$. a' est donc un élément de $\mathcal{L}(e) \cap \mathcal{R}(f)$.

(c) Unicité. - Soit a'' dans $\mathcal{L}(e) \cap \mathcal{R}(f)$ tel que l'on ait

$$aa'' a = a ; \quad a'' aa'' = a'' .$$

$a'' \in \mathcal{L}(e)$, et donc $a'' e = a''$. De même, $a'' \in \mathcal{R}(f)$, et $fa'' = a'$. D'où

$$aa'' aa' = aa' = e$$
$$= aa'' e = aa'' ,$$

i. e. $aa'' = e$. De la même façon, $a'' a = f$.

Alors :

$$a' aa' = a' = a' e$$
$$= a' aa''$$
$$= fa'' = a'' ,$$

et finalement $a' = a''$.

En faisant $\Delta = \Delta_0$, $\Gamma = \Gamma_0$, et en combinant la proposition 3.3.2, et la proposition 3.4.2, on obtient la propriété bien connue :

COROLLAIRE 3.4.3. - Tout élément régulier possède au moins un inverse généralisé.

En conclusion, il semble bien que toutes les propriétés d'un demi-groupe reposant sur le lemme de Green soient susceptibles d'être étendues à l'aide du lemme de Green généralisé.

4. Cas particulier du demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite.

4.1. Rappels sur les algèbres abstraites.

Une algèbre abstraite $\mathfrak{A}$ est un couple noté $(A , \mathfrak{F})$, où A , support de $\mathfrak{A}$, est un ensemble non vide, et $\mathfrak{F}$ une famille d'opérations, définie de la façon suivante : on considère, pour tout entier $n \geq 0$, une famille $\mathfrak{F}_n$, éventuellement vide, d'applications du produit cartésien A^n dans A . Chaque f de $\mathfrak{F}_n$ sera appelée opération à n variables, une opération à 0 variable consistant à désigner un élément a de A . On pose alors,

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{n \in N} \mathfrak{F}_n .$$

Une <u>sous-algèbre</u> $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ est un couple $(B , \mathfrak{F})$ tel que B est une partie non vide de A , stable pour chacune des opérations f de $\mathfrak{F}$. On montre que la famille des sous-algèbres de $\mathfrak{A}$ forme une famille de Moore. Une <u>congruence</u> $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$ est une équivalence de A telle que, pour toute opération f de $\mathfrak{F}$ à n variables, et pour tout système $(x_1 , \ldots , x_n , y_1 , \ldots , y_n)$ de A , l'hypothèse

$$\text{pour tout } i = 1 , 2 , \ldots , n , \quad x_i \equiv y_i \quad (\mathfrak{C}) ,$$

entraîne

$$f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) \equiv f(y_1 , y_2 , \ldots , y_n) \quad (\mathfrak{C}) .$$

Soient deux algèbres abstraites $\mathfrak{A} = (A , \mathfrak{F})$ et $\mathfrak{A}' = (A' , \mathfrak{F}')$; s'il existe une bijection entre les deux familles d'opérations $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$, conservant le nombre des variables des opérations, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ seront dites de même type, et on ne distinguera pas en général $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{F}'$. Les classes d'algèbres, dont il sera question dans ce qui suit, sont des classes d'algèbres de même type.

Si $\mathfrak{A} = (A , \mathfrak{F})$ et $\mathfrak{A}' = (A' , \mathfrak{F}')$ sont deux algèbres abstraites de même type, une application η de A dans A' sera un <u>homomorphisme</u> de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, si, pour toute f de $\mathfrak{F}$ à n variables, et pour tout n-uplet $(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ de A^n , on a

$$\eta f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = f(\eta x_1 , \eta x_2 , \ldots , \eta x_n) .$$

Un <u>endomorphisme</u> de $\mathfrak{A}$ sera un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$. Nous désignerons par $H(\mathfrak{A})$ le semi-groupe des endomorphismes de $\mathfrak{A}$. Si η est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}'$, <u>l'image</u> S_η de $\mathfrak{A}$ par η sera définie par

$$S_\eta = \{y \in \mathfrak{A}' ; \quad (\exists\, x \in \mathfrak{A}) , \quad y = \eta x\} ;$$

S_η est une sous-algèbre de $\mathfrak{A}'$. A l'image S_η de η , on fait correspondre dualement sa <u>congruence nucléaire</u> π_η , définie par

$$(x \equiv y \quad (\pi_\eta)) \Longleftrightarrow (\eta x = \eta y) .$$

Nous dirons que η est un endomorphisme <u>vectoriel à droite</u>, s'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ telle que l'on ait

$$\pi_\eta(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} , \quad \pi_\eta|\mathfrak{B} = \mathcal{E}|\mathfrak{B} .$$

Si l'on désigne par ψ' l'ensemble des endomorphismes vectoriels à droite, on démontre que

$$(\eta \in \psi') \Longleftrightarrow ((\exists\, \omega \in \Omega) \quad \pi_\eta = \pi_\omega) ,$$

où Ω est l'ensemble des idempotents de $H(\mathfrak{A})$. De façon duale, nous dirons que η est un endomorphisme <u>vectoriel à gauche</u>, s'il existe une congruence $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$ telle que l'on ait

$$\mathfrak{C}(S_\eta) = \mathfrak{A} , \quad \mathfrak{C}|S_\eta = \mathcal{E}|S_\eta .$$

Si ψ'' est l'ensemble des endomorphismes vectoriels à gauche, on montre que

$$(\eta \in \psi'') \Longleftrightarrow ((\exists\ \omega \in \Omega)\ ,\ S_\eta = S_\omega)\ .$$

4.2. Opérateurs de Green et relations de Green généralisées.

Considérons l'ensemble des applications de A dans A : c'est un demi-groupe $D(A)$; $H(\mathfrak{A})$ est un sous-demi-groupe de $D(A)$.

Définissons deux ensembles Δ et Γ d'opérateurs de Green pour $D(A)$. Pour ce faire, considérons les deux ensembles des translations respectivement à droite et à gauche par les éléments de $D(A)$; on a la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2.1. - Soient $\mathfrak{A} = (A\ ,\ \mathfrak{F})$ une algèbre abstraite, $H(\mathfrak{A})$ le demi-groupe des endomorphismes de $\mathfrak{A}$, $D(A)$ le demi-groupe des applications de A dans A . L'ensemble des translations respectivement à droite et à gauche par $D(A)$ constitue un couple de Green pour $H(\mathfrak{A})$.

Soient en effet : f une opération n-aire de $\mathfrak{F}$, $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_n)$ un élément de A^n , η un endomorphisme de $\mathfrak{A}$. Soient enfin δ une translation à droite de $D(A)$ telle que $\delta\eta \in H(\mathfrak{A})$, γ une translation à gauche de $D(A)$ telle que $\gamma\eta \in H(\mathfrak{A})$. Il s'agit de montrer que $\gamma\delta\eta$ est un endomorphisme de $\mathfrak{A}$. Nous noterons ε l'application identique de A dans A . Alors :

$$\begin{aligned}\delta\gamma\eta &= \delta\gamma(\varepsilon\eta)\\ &= \delta(\gamma(\varepsilon).\eta)\\ &= \delta(\gamma(\varepsilon).\eta.\varepsilon)\\ &= \gamma(\varepsilon).\eta.\delta(\varepsilon)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\delta\gamma\eta)\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) &= \gamma(\varepsilon)\ \eta\delta(\varepsilon)\ f(x_1\ ,\ x_2\ ,\dots,\ x_n)\\ &= \gamma(\varepsilon)\ \delta(\eta)\ f(x_1\ ,\ x_2\ ,\dots,\ x_n)\\ &= \gamma(\varepsilon)\ f(\delta(\eta)\ x_1\ ,\ \delta(\eta)\ x_2\ ,\dots,\ \delta(\eta)\ x_n)\\ &= \gamma(\varepsilon)\ f(\eta\delta(\varepsilon)\ x_1\ ,\ \eta\delta(\varepsilon)\ x_2\ ,\dots,\ \eta\delta(\varepsilon)\ x_n)\\ &= \gamma(\varepsilon)\ \eta f(\delta(\varepsilon)\ x_1\ ,\ \delta(\varepsilon)\ x_2\ ,\dots,\ \delta(\varepsilon)\ x_n)\\ &= \gamma(\eta)\ f(\delta(\varepsilon)\ x_1\ ,\ \delta(\varepsilon)\ x_2\ ,\dots,\ \delta(\varepsilon)\ x_n)\\ &= f(\gamma(\eta)\ \delta(\varepsilon)\ x_1\ ,\ \gamma(\eta)\ \delta(\varepsilon)\ x_2\ ,\dots,\ \gamma(\eta)\ \delta(\varepsilon)\ x_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta\gamma\eta)\ f(x_1\ ,\ x_2\ ,\dots,\ x_n) &= f(\gamma(\eta\delta(\varepsilon))\ x_1\ ,\ \gamma(\eta\delta(\varepsilon))\ x_2\ ,\dots,\ \gamma(\eta\delta(\varepsilon))\ x_n)\\ &= f((\gamma\delta\eta)\ x_1\ ,\ (\gamma\delta\eta)\ x_2\ ,\dots,\ (\gamma\delta\eta)\ x_n)\ ,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. Puisque $D(A)$ est un demi-groupe unitaire, et que deux translations respectivement à droite et à gauche commutent toujours, les conditions (i), (ii), (iii), (iv) sont donc réalisées.

Cherchons à caractériser alors les équivalences de Green généralisées associées à ce couple d'opérateurs.

PROPOSITION 4.2.2. - Sur $H(\mathfrak{A})$, on a :

$$(\eta\ \mathcal{R}_0\ \xi) \Longleftrightarrow (|\eta) = |\xi)) \ ; \quad (\eta\ \mathcal{L}_0\ \xi) \Longleftrightarrow ((\eta| = (\xi|)$$

$$(\eta\ \mathcal{R}\ \xi) \Longleftrightarrow (S_\eta = S_\xi) \ ; \quad (\eta\ \mathcal{L}\ \xi) \Longleftrightarrow (\pi_\eta = \pi_\xi) \ .$$

Le résultat est évident pour $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{L}_0$. Si $\eta\ \mathcal{R}\ \xi$, il existe alors deux applications f_1 et f_2 de A dans A telles que :

$$\eta = \xi f_1 \ ; \quad \xi = \eta f_2 \ .$$

On en déduit immédiatement : $S_\eta = S_\xi$. Réciproquement, si deux endomorphismes de $\mathfrak{A}$, η et ξ, sont tels que $S_\eta = S_\xi$, alors il existe (moyennant l'axiome de choix) deux applications f_1 et f_2 telles que $\eta = \xi f_1$, $\xi = \eta f_2$.

On ferait un raisonnement analogue pour $\mathcal{L}$, et l'égalité des congruences nucléaires.

De l'étude générale on déduit que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ commutent, et que d'autre part elles vérifient le lemme de Green généralisé ainsi que ses conséquences ; entre autres, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 4.2.3. - Un endomorphisme η de $\mathfrak{A}$ est régulier si et seulement s'il existe un endomorphisme ξ de $\mathfrak{A}$ tel que :

$$S_{\eta\xi\eta} = S_\eta \ ; \qquad \pi_{\eta\xi\eta} = \pi_\eta \ .$$

Cette proposition est conséquence directe de la proposition 3.3.3.

PROPOSITION 4.2.4. - $\psi' \cap \psi'' = \mathcal{D}_0(\Omega)$.

En effet, d'après la proposition 3.3.3, un endomorphisme de $\mathfrak{A}$ est régulier si, et seulement si, il est pseudo-régulier. Or l'ensemble des réguliers est $\mathcal{D}_0(\Omega)$.

D'autre part, d'après la proposition 3.3.2, un endomorphisme de $\mathfrak{A}$ est pseudo-régulier si, et seulement si, sa $\mathcal{L}$-classe et sa $\mathcal{R}$-classe contiennent chacune un idempotent. D'où :

$$\mathcal{L}(\Omega) \cap \mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{D}_0(\Omega) = \psi' \cap \psi'' \ .$$

Cette étude est loin d'être exhaustive, et nous pensons que beaucoup d'autres propriétés pourraient être découvertes à l'aide de ces relations de Green généralisées. Par exemple, la propriété suivante.

PROPOSITION 4.2.5. - Pour que $\eta\xi$ appartienne à $\mathcal{R}(\eta) \cap \mathcal{L}(\xi)$, il faut et il suffit que : $\pi_\eta|S_\xi = \mathcal{E}|S_\xi$; $\pi_\eta(S_\xi) = \mathfrak{A}$.

D'après la proposition 3.1.1, si $\eta\xi \in \mathcal{R}(\eta) \cap \mathcal{L}(\xi)$, il existe $\omega \in \Omega$ tel que

$\mathcal{R}_\eta = \mathcal{R}_\omega$, $\mathcal{R}_\xi = \mathcal{R}_\omega$, d'où

$$\pi_\eta | S_\xi = \mathcal{E} | S_\xi \ , \quad \pi_\eta(S_\xi) = \mathfrak{A} \ .$$

Réciproquement, si ces égalités sont vérifiées, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\pi_\eta = \pi_\omega$, $S_\xi = S_\omega$. D'après 3.1.1, alors $\eta\xi \in \mathcal{R}(\eta) \cap \mathcal{L}(\xi)$. On a comme corollaire immédiat de cette propriété, que, pour que $\eta\xi$ soit un automorphisme de $\mathfrak{A}$, il faut et il suffit que η soit surjectif, ξ injectif, et que

$$\pi_\eta(S_\xi) = \mathfrak{A} \ ; \qquad \pi_\eta | S_\xi = \mathcal{E} | S_\xi \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANSCOMBRE (J.-C.). - Un problème de dualisation dans les algèbres abstraites et les endomorphismes décomposants, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 24e année, 1970/71, n° 14, 18 p.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] COHN (P. M.). - Universal algebra. - New York, Harper and Row, 1965 (Harper international Student Reprint).

[4] CROISOT (R.). - Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 70, 1953, p. 361-379.

[5] DUBREIL (P.). - Théorie des demi-groupes, Cours de D. E. A., Paris, 1967/68 (non publié).

[6] DUBREIL (P.). - Endomorphismes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 18e année, 1964/65, n° 23, 20 p.

[7] DUBREIL (P.). - Sur le demi-groupe des endomorphismes d'une algèbre abstraite, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Série 8, t. 46, 1969, p. 149-153.

[8] DUBREIL (P.). - Endomorphismes d'une algèbre universelle, Cours à l'Université de Rome, Janvier-Février 1969.

[9] GRATZER (G.). - Universal algebra. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1968 (University Series in higher Mathematics).

[10] LJAPIN (E. S.). - Semigroups. - Providence, Amer. math. Soc., 1963 (Translations of mathematical Monographs, 3).

Jean-Claude ANSCOMBRE
13 bis boulevard Victor Hugo
78100 SAINT GERMAIN EN LAYE