Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Paulo Ribenboim

Épimorphismes de modules qui sont nécessairement des isomorphismes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 2 (1970-1971), exp. n° 19, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A8_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 19, 5 p.
5 juillet 1971

ÉPIMORPHISMES DE MODULES QUI SONT NÉCESSAIREMENT DES ISOMORPHISMES

par Paulo RIBENBOIM

Cet exposé est basé sur les articles de M. ORZECH [2] et D. Ž. DJOKOVIČ [1]. D'autres auteurs, comme VASCONCELOS et STROOKER, avaient déjà démontré quelques cas particuliers des résultats indiqués ci-dessous.

Les anneaux considérés ont un élément unité, mais, sauf mention expresse du contraire, ne sont pas nécessairement supposés commutatifs.

(a) Soient A un anneau, M un A-module à gauche noethérien, N un sous-module de A, et $f : N \twoheadrightarrow M$ un homomorphisme surjectif. Alors f est un isomorphisme.

Démonstration. - Soient $K_0 = f^{-1}(0)$, $K_1 = f^{-1}(K_0)$, $K_2 = f^{-1}(K_1)$, etc. Alors $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ est une suite croissante de sous-modules de M. Celui-ci étant noethérien, il existe n tel que $K_n = K_{n+1} = \dots$. Puisque f est surjectif, étant donné un élément quelconque $x_0 \in K_0$, il existe des éléments $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$, ..., $x_n \in K_n$, $x_{n+1} \in K_{n+1}$, tels que $f(x_1) = x_0$, $f(x_2) = x_1$, ..., $f(x_{n+1}) = x_n$. Or $x_{n+1} \in K_{n+1} = K_n$, donc $x_n \in f(K_n) \subseteq K_{n-1}$; alors $x_{n-1} \in K_{n-2}$, ..., $x_1 \in K_0$, et enfin $x_0 = f(x_1) \in f(K_0) = \{0\}$. Ceci montre que $K_0 = \{0\}$, c'est-à-dire que f est un isomorphisme.

Comme corollaire, on déduit le résultat suivant :

(b) Si A est un anneau noethérien à gauche, la propriété suivante est satisfaite :

(π) Si M est un A-module à gauche, de type fini, si N est un sous-module de M, et $f : N \twoheadrightarrow M$ un homomorphisme surjectif, alors f est un isomorphisme.

Définition. - Un anneau A est appelé un (π)-anneau (à gauche), lorsqu'il satisfait la propriété (π) ci-dessus.

Donc, tout anneau noethérien à gauche est un (π)-anneau (à gauche).

On indiquera quelques propriétés de la classe des (π)-anneaux.

(c) Si A est un (π)-anneau, et si I est un idéal bilatère, alors A/I est un (π)-anneau.

Démonstration. - Soit $p : A \to A/I$ l'homomorphisme canonique. Si M est un A/I-module à gauche de type fini, on note $M_{(p)}$ le A-module déduit de M au moyen de l'homomorphisme p ; alors $M = M_{(p)}$ (en tant que groupe abélien), et $M_{(p)}$ est un A-module de type fini. Si N est un sous-module de M, et si $f : N \to M$ est un homomorphisme surjectif, par changement d'anneaux au moyen de p, on déduit que $N_{(p)}$ est un sous-A-module de $M_{(p)}$, et $f_{(p)} : N_{(p)} \to M_{(p)}$ est encore un homomorphisme surjectif. D'après l'hypothèse, $f_{(p)}$ est injectif, et alors f est aussi injectif, car $f(x) = f_{(p)}(x)$ pour tout $x \in N$. Donc A/I est un (π)-anneau.

Le résultat suivant a été montré par DJOKOVIĆ :

(d) La classe des (π)-anneaux est fermée par les limites directes.

Démonstration. - Soit I un ensemble ordonné filtrant à droite, soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de (π)-anneaux (à gauche), et, si i, $j \in I$, $i \leqslant j$, soit $\alpha_{ij} : A_i \to A_j$ un homomorphisme d'anneaux, de façon que α_{ii} = identité, si $i \leqslant j \leqslant k$, alors $\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \circ \alpha_{ij}$. On peut alors considérer l'anneau limite directe $A = \varinjlim A_i$ de cette famille d'anneaux et homomorphismes. Soit $\alpha_i : A_i \to A$ l'homomorphisme canonique, donc, si $i \leqslant j$, alors $\alpha_j \circ \alpha_{ij} = \alpha_i$.

Il s'agit de montrer que A est encore un (π)-anneau. Soient M un A-module de type fini, N un sous-A-module de M, et $f : N \to M$ un homomorphisme surjectif. Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système de générateurs du A-module M. Soit $y_0 \in N$ tel que $f(y_0) = 0$; on montrera que $y_0 = 0$.

D'après l'hypothèse, il existe des éléments $y_1, \dots, y_n \in N$ tels que $f(y_s) = x_s$ pour $s = 1, \dots, n$. Etant donné que $N \subseteq M$, il existe des éléments $a_{rs} \in A$ tels que $y_s = \sum_r a_{rs} x_r$, $1 \leqslant r \leqslant n$ (pour $s = 0, 1, \dots, n$). Or $A = \varinjlim A_i$, donc $A = \bigcup_{i\in I} \alpha_i(A_i)$. Ainsi il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $a_{rs} \in \alpha_{i_0}(A_{i_0})$ pour tout $r = 1, \dots, n$, $s = 0, 1, \dots, n$. On prend les A_{i_0}-modules $M_{(\alpha_{i_0})}$ et $N_{(\alpha_{i_0})}$, obtenus de M, N respectivement, au moyen de $\alpha_{i_0} : A_{i_0} \to A$. Soit M_0 le sous-A_{i_0}-module de $M_{(\alpha_{i_0})}$, engendré par $\{x_1, \dots, x_n\}$. Alors $y_0, y_1, \dots, y_n \in M_0$. Soit N_0 le sous-A_{i_0}-module de $N_{(\alpha_{i_0})}$, engendré par $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$; donc $N_0 \subseteq M_0$. Soit f_0 la restriction de $f = f_{(\alpha_{i_0})}$ à N_0. D'après le choix de A_{i_0}, il résulte que $f_0(N_0) \subseteq M_0$, et, en fait, $f_0(N_0) = M_0$. Par hypothèse, A_{i_0} est un (π)-anneau, donc f_0 est injectif, et ainsi $y_0 = 0$, car $f_0(y_0) = f(y_0) = 0$.

Ceci montre que f est injectif, et A est un (π)-anneau.

Comme corollaire, on obtient le théorème de Orzech :

(e) Tout anneau commutatif est un (π)-anneau.

Démonstration. - Tout anneau commutatif A est l'union (donc la limite directe) de ses sous-anneaux de type fini. Ceux-ci sont de la forme $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, donc des anneaux noethériens (par le théorème de base de Hilbert). D'après (b) et (d), il résulte que A est un (π)-anneau.

Les (π)-anneaux satisfont quelques propriétés intéressantes.

(f) Soient A un (π)-anneau, M un A-module (à gauche) libre, ayant une base avec m éléments, N un sous-A-module libre de M, ayant une base avec n éléments. Alors $n \leqslant m$.

Démonstration. - Soit $n > m$. Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une base de N, et $\{y_1, \ldots, y_m\}$ est une base de M, soit $f : N \to M$ l'homomorphisme défini par $f(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \ldots, m$, et $f(x_i) = 0$ pour $i = m+1, \ldots, n$. Alors f est un épimorphisme, qui n'est pas injectif, ce qui est impossible.

(g) Soient A un (π)-anneau, M un A-module (à gauche) engendré par les éléments $\{y_1, \ldots, y_m\}$, soit N un sous-A-module libre de M, ayant la base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ où $n \geqslant m$. Alors $m = n$, et M est un module libre ayant la base $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

Démonstration. - Soit $f : N \to M$ l'homomorphisme défini par $f(x_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ et $f(x_i)$ arbitraire (pour $i = m+1, \ldots, n$, si $n > m$). Alors f est surjectif, et, d'après l'hypothèse sur A, f est un isomorphisme. Donc M est aussi un A-module libre, et $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ est une base de M. On conclut que $n = m$, autrement $f(x_{m+1})$ serait combinaison linéaire des générateurs $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ de M.

(h) Soit A un (π)-anneau, et soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. On suppose que B est un A-module de type fini (au moyen de f). Si $x, y \in B$ et $xy = 1$, alors $yx = 1$.

Démonstration. - On considère le sous-A-module BxB du A-module à gauche B ; BxB résulte des sommes finies d'éléments de la forme zxt, où $z, t \in B$.

Soit $\rho_y : BxB \to B$ l'application de multiplication à droite par y, c'est-à-dire $\rho_y(t) = ty$ pour tout $t \in BxB$. Alors ρ_y est un homomorphisme de A-modules à gauche. De $xy = 1$, il résulte que $t = (tx1)y = \rho_y(tx)$ pour tout $t \in B$. Donc ρ_y est surjectif. A étant un (π)-anneau, on conclut que ρ_y est injectif.

Or $yx \in BxB$, $1 = xy \in BxB$, $\rho_y(yx) = yxy = y$, et $\rho_y(1) = y$. Donc $yx = 1$.

On peut obtenir un résultat analogue à (b) pour les endomorphismes de certaines algèbres. Voici d'abord le rappel suivant :

(i) Soient A un anneau commutatif, M , N des A-modules, $f : M \to N$ un homomorphisme tel que $N/(f(M))$ soit un A-module de type fini. On suppose que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , l'homomorphisme induit $\bar{f} : M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ est surjectif. Alors f est surjectif.

Démonstration. - D'après l'hypothèse, on a $N = f(M) + \mathfrak{m}N$, donc

$$N/(f(M)) = (f(M) + \mathfrak{m}N)/(f(M)) = \mathfrak{m}(N/(f(M))) \quad .$$

En localisant en $\mathfrak{m}$, on a

$$(N/(f(M)))_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}\, \mathfrak{m}(N/(f(M)))_{\mathfrak{m}} \quad .$$

Par le lemme de Nakayama, $(N/(f(M)))_{\mathfrak{m}} = 0$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A . Par le lemme de globalisation, $N/(f(M)) = 0$, c'est-à-dire $f(M) = N$.

(j) Soient A un anneau commutatif, et B une A-algèbre qui soit un A-module de type fini. On suppose que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , $\mathfrak{m}B$ soit un idéal bilatère maximal de B . Alors tout endomorphisme de la A-algèbre B est un isomorphisme.

Démonstration. - Soit $f : B \to B$ un endomorphisme de la A-algèbre B . Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A , on considère l'homomorphisme de $(A/\mathfrak{m})$-algèbres induit par f :

$$\bar{f} : B/\mathfrak{m}B \to B/\mathfrak{m}B \quad .$$

D'après l'hypothèse, $\bar{f}$ a un noyau égal à 0 .

D'autre part, $B/\mathfrak{m}B$ est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $A/\mathfrak{m}$; donc $\bar{f}$ est nécessairement surjectif, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Il résulte de (i) que f est lui-même surjectif. Enfin, de (e), on conclut que f est un isomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DJOKOVIĆ (D. Ž.). - Rings for which some module epimorphisms are isomorphisms (à paraître).

[2] ORZECH (M.). - Onto endomorphisms are isomorphisms, Amer. math. Monthly, t. 78, 1971, p. 357-362.

[3] STROOKER (J. R.). - Lifting projectives, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 747-751.

[4] VASCONCELOS (W.). - On local and stable cancellation, Anais Acad. Bras. Cienc., t. 37, 1965, p. 389-393.

[5] VASCONCELOS (W.). - On finitely generated flat modules, Trans. Amer. math. Soc., t. 138, 1969, p. 505-512.

(Texte reçu le 13 juillet 1971)

Paulo RIBENBOIM
Department of Mathematics
Queen's University
KINGSTON, Ont. (Canada)