Alain Hudry

Modules homogènes et anneaux localement homogènes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, nº 2 (1970-1971), exp. nº 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 15, 10 p.
24 mai 1971

MODULES HOMOGÈNES ET ANNEAUX LOCALEMENT HOMOGÈNES

par Alain HUDRY

Introduction.

La notion centrale de cet exposé est celle de localisation associée à un module, disons à droite, sur un anneau unitaire mais non nécessairement commutatif.

Cette notion a permis de montrer, dans [7], que la relation de rationnalité, introduite par Y. UTUMI et J. LAMBEK, entre dans le cadre général de la localisation au sens de P. GABRIEL [3], ce qui donne lieu à diverses applications.

D'autre part, elle suggère l'introduction d'une classe de modules particuliers, les modules homogènes [9], ce qui permet de caractériser les localisations premières de O. GOLDMAN [4], et les anneaux pour lesquels tout idéal à droite est une intersection réduite d'idéaux primaires à droite au sens de Goldman.

Notations. - Toutes les notions latérales sont envisagées à droite, en particulier, Mod_A désigne la catégorie des modules à droite sur l'anneau unitaire A. La technique utilisée est celle de localisation au sens de Gabriel [3], dans la catégorie abélienne Mod_A. Pour fixer les notations, faisons brièvement quelques rappels. Une localisation $\mathcal{L}$ de Mod_A est entièrement déterminée par l'une quelconque des données suivantes :

- Une topologie à droite Φ de A, c'est-à-dire un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de A [3] ;

- Une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de Mod_A, c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod_A, épaisse et stable par limites inductives ;

- Une mono-sous-catégorie $\mathfrak{M}$ de Mod_A, c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod_A, stable par sous-objets et limites projectives, telle que tout objet de $\mathfrak{M}$ se plonge dans un objet de $\mathfrak{M}$ injectif dans Mod_A ;

- Une sous-catégorie locale $\mathfrak{L}$ de Mod_A [6], c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod_A telle que le foncteur d'inclusion i de $\mathfrak{L}$ dans Mod_A admette un adjoint à gauche ℓ qui commute aux limites projectives finies.

Ces données, lorsqu'elles sont associées à une même localisation, sont reliées entre elles, et n'importe laquelle permet de construire les autres. Ainsi, si Φ est donnée, et si, pour tout A-module à droite M, on pose

$$\Phi M = \{x \in M \mid \mathrm{Ann}(x) \in \Phi\} ,$$

$\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{M}$) est constitutée par les modules M tels que $\Phi M = M$ (resp. $\Phi M = 0$), et $\mathcal{L}$ est constituée par les objets M de $\mathcal{M}$ tels que l'application canonique $\mathrm{Hom}_A(A , M) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{A} , M)$ soit surjective pour tout $\mathfrak{A} \in \Phi$. Le foncteur localisation de Gabriel est alors $L = i\ell$.

1. Localisation associée à un module.

Etant donné un A-module à droite quelconque M d'enveloppe injective $E(M)$, le noyau du foncteur $\mathrm{Hom}_A(\bullet , E(M))$ est une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}_M$ de Mod_A qui définit une localisation $\mathcal{L}_M^{\sim}$ de Mod_A que l'on dit associée au A-module à droite M . La topologie à droite correspondante, notée i_M est le plus fin des ensembles Φ d'idéaux à droite de A stable par résiduation à droite, et tel que $\Phi M = 0$. Cette notion de localisation associée à un module a été introduite indépendamment dans [4] et dans [7].

Un sous-module N de M est dit rationnel dans M si, pour tout sous-module N' de M contenant N et pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(N' , M)$, la relation $f(N) = 0$ implique $f = 0$. Dans [7], on a montré que la relation " N est rationnel dans M " équivaut à la relation " $M/N \in \mathcal{C}_M$ ". De plus, on a le résultat suivant.

1.1 PROPOSITION. - *Pour tout A-module à droite M , l'extension rationnelle maximale de M est le localisé de M pour la localisation $\mathcal{L}_M^{\sim}$.*

Citons quelques applications :

(a) *Condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau maximal des fractions à droite de A coïncide avec l'anneau classique des fractions à droite de A .* - En utilisant le fait que l'anneau maximal des fractions à droite de A au sens d'Utumi est, d'après 1.1, le localisé à droite de A pour la localisation $\mathcal{L}_A^{\sim}$, on a montré, dans [7], le résultat suivant :

1.2 PROPOSITION. - *Soit A un anneau unitaire satisfaisant à la condition de Ore à droite. Pour que l'anneau classique des fractions à droite de A coïncide avec l'anneau maximal des fractions à droite au sens d'Utumi, il faut et il suffit que la condition suivante (G) soit réalisée :*

(G) *Pour tout idéal à droite rationnel $\mathfrak{a}$ de A et pour tout homomorphisme f de $\mathfrak{a}$ dans A , il existe un idéal à droite $\mathfrak{b}$ contenant l'idéal à droite engendré par $\mathfrak{a}$ et un élément régulier de A , et il existe un homomorphisme $\bar{f}$ de $\mathfrak{b}$ dans A prolongeant f .*

Cette condition (G) est réalisée en particulier si tout idéal à droite rationnel contient un élément régulier. Dans le cas particulier où l'idéal singulier A^{Δ} de A est nul, la condition (G) est équivalente à celle obtenue par GUPTA dans ce cas [5].

(b) Platitude de $\mathcal{L}_M^{\sim}$ et semi-simplicité du localisé de l'anneau. - Ici on va se limiter au cas particulier de la localisation associée à A (le cas général a été envisagé dans [9]).

1.3 PROPOSITION. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) L'anneau maximal des fractions à droite au sens d'Utumi de A est semi-simple ;

(2) La topologie à droite des idéaux à droite rationnels coïncide avec l'ensemble des idéaux à droite essentiels, et est de plus plate [6] ;

(3) L'idéal singulier de A est nul, et l'ensemble des idéaux à droite essentiels de A admet un système cofinal d'idéaux à droite de type fini ;

(4) L'idéal singulier de A est nul, et le treillis des idéaux à droite compléments satisfait à la C. C. A. ;

(5) L'anneau A est un J-anneau [11] à droite.

1.4 PROPOSITION. - Pour que A admette un anneau classique de fractions à droite semi-simple, il faut et il suffit que la prétopologie des idéaux à droite essentiels de A coïncide avec l'ensemble des idéaux à droite contenant un élément régulier.

1.3 et 1.4 sont démontrés dans [8].

2. Modules homogènes.

Il est naturel d'envisager les A-modules à droite pour lesquels la localisation associée $\mathcal{L}_M^{\sim}$ satisfait à une propriété privilégiée. La propriété considérée ici est la suivante :

"La co-réflexion $\ell(M)$ de M dans la sous-catégorie locale $\mathcal{L}_M$ est un objet simple de $\mathcal{L}_M$ ".

Les modules satisfaisant à cette propriété sont dits homogènes ; nous les avons introduits dans [9]. Cette notion permet, d'une part de caractériser les localisations premières et les modules primaires de O. G[illegible] [4], et d'autre part d'obtenir une généralisation de la notion d'idéal premier du cas commutatif.

2.1 PROPOSITION. - Pour tout A-module à droite M , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Le A-module M est homogène ;

(2) Le A-module M est non nul, et tout sous-module non nul de M est rationnel dans M ;

(3) L'enveloppe injective E(M) de M est un injectif indécomposable dont le

coeur [11] $C(E(M))$ est non nul, et de plus M est un sous-module de $C(E(M))$.

L'équivalence (2) $\Longleftrightarrow$ (3) nous a été communiquée par G. RENAULT. Il est clair qu'un module homogène est co-irréductible, mais la réciproque est fausse : ainsi si $A = K[X , Y]$ est l'anneau des polynômes à deux indéterminées sur le corps commutatif K , et si Q est l'idéal de A engendré par les polynômes X et Y^2 , le A-module A/Q est co-irréductible mais non homogène.

2.2 PROPOSITION. - Si M est un A-module à droite homogène, la sous-catégorie locale $\mathcal{L}_M$ n'a qu'un type d'objet simple.

Le résultat suivant montre qu'une localisation première de O. GOLDMAN [4] est caractérisée par un module homogène et rationnellement complet unique à un isomorphisme près.

2.3 PROPOSITION. - La correspondance $M \dashrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_M$ induit une bijection de l'ensemble des types de modules homogènes et rationnellement complet sur l'ensemble des localisations premières de O. GOLDMAN.

Il en résulte que les localisations premières de Goldman sont en bijection avec les types d'injectifs indécomposables dont le coeur est non nul.

Les modules homogènes et rationnellement complet possèdent la propriété suivante.

2.4 PROPOSITION. - Tout A-module à droite M , homogène et rationnellement complet, est un Σ-quasi-injectif dont l'anneau des endomorphismes est un corps K et, pour tout ensemble I , l'anneau $\mathrm{End}_A\, M^{(I)}$ est isomorphe à l'anneau $\mathrm{End}_K\, K^{(I)}$.

2.5 COROLLAIRE. - Le coeur d'un injectif indécomposable est un Σ-quasi-injectif

2.6 COROLLAIRE. - L'anneau des endomorphismes d'un A-module à droite homogène est intègre et se plonge dans un corps.

2.7 COROLLAIRE. - Tout A-module à droite quasi-injectif, dont l'anneau des endomorphismes est un corps, est un module homogène Σ-quasi-injectif.

Dans [4], O. GOLDMAN a introduit la notion suivante de module primaire.

2.8 DÉFINITION. - Un module M est dit primaire au sens de O. Goldman si la localisation associée à M est première et coïncide avec celle associée à tout sous-module non nul de M .

Un sous-module N de M est dit primaire si M/N est un module primaire.

Les modules primaires sont caractérisés par la propriété suivante.

2.9 PROPOSITION. - Pour qu'un A-module à droite M soit primaire au sens de O. Goldman, il faut et il suffit que M soit extension essentielle d'une somme directe de modules homogènes admettant des enveloppes injectives isomorphes.

2.10 COROLLAIRE. - Si A est noethérien à droite, les idéaux à droite (resp. les modules) primaires de Goldman coïncident avec les idéaux à droite (resp. les modules) isotypiques.

2.11 COROLLAIRE. - Les modules Π-primaires de Goldman forment une sous-catégorie pleine de Mod_A stable par sous-objet, somme directe quelconque et extension essentielle.

La sous-catégorie des modules Π-primaires satisfait donc aux conditions (*) et (**) et aux conditions de la proposition 9 de [3], p. 427.

Dans la suite de cette section, on caractérise et on étudie les idéaux à droite P de A , tels que A/P soit un A-module à droite homogène.

2.12 PROPOSITION. - Pour tout idéal à droite P de A , il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(1) Le A-module à droite A/P est homogène ;

(2) L'idéal à droite P est maximal pour la propriété $P \notin i_{A/P}$;

(3) Il existe une topologie à droite Φ telle que P soit maximal pour la propriété $P \notin \Phi$;

(4) L'idéal à droite P est propre, inter-irréductible et tel que A/P coïncide avec son coeur C(A/P) .

Si, de plus, P est un idéal bilatère, n'importe laquelle des conditions précédentes est équivalente à la suivante :

(5) L'anneau A/P est un domaine de Ore à droite.

2.13 COROLLAIRE. - Si A est noethérien à droite, les idéaux bilatères P , tels que A/P soit homogène , sont des idéaux complètement premiers.

2.14 COROLLAIRE. - Si A est noethérien à droite, l'ensemble des topologies premières de A satisfait à la C. C. D.

2.15 COROLLAIRE. - Si A est un anneau commutatif, les idéaux P , tels que A/P soit homogène, sont les idéaux premiers et, de plus, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Tout A-module non nul contient un module homogène ;

(2) Pour tout A-module non nul M , on a $\mathrm{Ass}\, M \neq \emptyset$.

Les idéaux à droite P , tels que A/P soit un A-module à droite homogène, constituent donc une généralisation de la notion d'idéal premier du cas commutatif.

On pose alors la définition suivante.

2.16 DÉFINITION. - Un idéal à droite de A , satisfaisant à l'une des conditions équivalentes (1), (2), (3) ou (4) de la proposition précédente, sera appelé idéal à droite premier de Goldman.

Cette terminologie peut être justifiée par le fait que les localisations premières de Goldman [4] sont du type $\tilde{\mathfrak{L}}_{A/P}$ avec P idéal à droite datisfaisant à la condition (1) de la proposition précédente.

Si ρ est un épimorphisme plat à droite [6] de A dans A' , on sait, d'après SILVER [17], qu'il existe une bijection entre l'ensemble des idéaux à droite $\mathfrak{U}$ de A tels que la suite $0 \rightarrow A/\mathfrak{U} \rightarrow A/\mathfrak{U} \otimes_A A'$ soit exacte et l'ensemble des idéaux à droite $\mathfrak{U}'$ de A' . Cette bijection induit une bijection de l'ensemble des idéaux P premiers à droite de Goldman, tels que $0 \rightarrow A/P \rightarrow A/P \otimes_A A'$ soit exacte sur l'ensemble des idéaux premiers à droite de Goldman de A' . Si P et P' se correspondent dans cette bijection, on a $P = \rho^{-1}(P')$ et $P' = P \otimes_A A'$.

Donnons une application de la notion d'idéal premier à droite de Goldman ; les épimorphismes plats à droite d'anneaux à but local sont caractérisés par le résultat suivant.

2.17 PROPOSITION. - Soit A' un anneau local (pour la définition, voir [10]). Pour qu'il existe un épimorphisme plat à droite de A dans A' , il faut et il suffit que A' soit le localisé de A pour la localisation première définie par un idéal complètement premier P , tel que $S = A - P$ forme un système multiplicatif calculable à droite. (Voir aussi [19].)

Un système multiplicatif calculable à droite S est une partie multiplicative satisfaisant à la condition de Ore à droite et à la proposition suivante : Pour tout $a \in A$ et tout $s \in S$, tels que $sa = 0$, il existe $t \in S$ tel que $at = 0$.

3. Sur une classe d'anneaux.

Il peut se faire que dans Mod_A tout module non nul contienne un module homogène; les anneaux pour lesquels cette situation se produit sont caractérisés comme suit.

3.1 PROPOSITION. - Pour tout anneau A , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout A-module à droite M, tout sous-module propre de M est une intersection réduite de sous-modules primaires dans M au sens de Goldman ;

(2) Tout idéal à droite propre de A est intersection réduite d'idéaux à droite primaires au sens de Goldman ;

(3) Tout A-module non nul contient un module homogène ;

(4) Pour tout A-module à droite M et tout sous-module propre N de M, il existe $m \in M$ tel que $N \,\dot{:}\, m$ soit un idéal premier à droite de Goldman ;

(5) Pour tout idéal à droite propre $\mathfrak{A}$ de A, il existe $a \in A$ tel que $\mathfrak{A} \,\dot{:}\, a$ soit un idéal à droite premier de Goldman ;

(6) L'anneau A est l. c. à droite, et le coeur de tout injectif indécomposable est non nul.

Si A satisfait à l'une des conditions équivalentes précédentes, on dit que A est localement homogène à droite (en abrégé, on dit l. h. à droite). Les exemples suivants montrent que les l. h. anneaux constituent une "vaste" classe d'anneaux.

Exemples.

(a) Les anneaux semi-artiniens à droite [15] ;
(b) Les anneaux noethériens à droite ;
(c) Dans [3], P. GABRIEL définit la notion de dimension de Krull d'une catégorie abélienne. Si Mod_A a sa dimension de Krull définie, alors A est un anneau l. h. à droite.

Donnons quelques propriétés des anneaux l. h. à droite.

3.2 PROPOSITION. - La classe des anneaux l. h. à droite est stable par image homomorphe, par épimorphisme plat à droite et par produit fini.

3.3 PROPOSITION. - Si A est un anneau l. h. à droite, toute topologie à droite est intersection des topologies premières qui les contiennent ;

3.4 PROPOSITION. - Si A est un anneau l. h. à droite régulier au sens de von Neumann, le socle droit de A est essentiel et l'anneau maximal des fonctions à droite au sens d'Utumi de A est un produit d'anneau d'endomorphismes d'espaces vectoriels.

3.5 COROLLAIRE. - Si A est un anneau l. h. à droite régulier, alors A est soit semi-simple, soit de dimension infinie.

Décomposition primaire dans un anneau l. h. à droite. - Dans [4], GOLDMAN montre que tout sous-module d'un module noethérien sur un anneau quelconque est intersection réduite de sous-modules primaires. Pour un anneau quelconque, on peut considérer la classe $\mathcal{C}$ des modules qui possèdent cette propriété ($\mathcal{C}$ contient strictement la classe des modules noethériens et définit une sous-catégorie localisante). Les l. h. anneaux à droite A sont ceux pour lesquels $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_A$. Alors, pour tout type α d'injectif indécomposable et pour tout représentant Q_α de α , la topologie i_{Q_α} est première et ne dépend que de α , L'application $\alpha \to i_{Q_\alpha}$ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Mod}_A)$ dans l'ensemble $SP(A)$ des topologies premières à droite de A induit alors une théorie $\underset{\sim}{G}$ de décomposition au sens de N. POPESCU [14]. Pour tout A-module à droite M , $\underset{\sim}{G}(M)$ est l'ensemble des topologies premières i_N , où N est un sous-module homogène de M . Les modules $\underset{\sim}{G}$-connexes, c'est-à-dire pour lesquels $\underset{\sim}{G}(M)$ est réduit à un élément, sont les modules primaires de Goldman. Alors, pour tout sous-module propre N d'un module quelconque M sur un anneau l. h. à droite, il existe une famille $(N_i)_{i\in I}$ de sous-modules primaires au sens de Goldman de M telle que

(a) $N = \bigcap_{i\in I} N_i$ soit sans éléments superflus ;

(b) Pour tout $i \neq j$, on ait $\underset{\sim}{G}(M/N_i) \cap \underset{\sim}{G}(M/N_j) = \emptyset$;

(c) Pour tout $i \in I$, on ait $\underset{\sim}{G}(N_i/N) = \underset{\sim}{G}(M/N) - \underset{\sim}{G}(M/N_i)$;

(d) $\underset{\sim}{G}(M/N) = \bigcup_{i\in I} G(M/N_i)$.

Modules tertiaires et modules primaires de Goldman sur un l. h. anneau. - Considérons la condition suivante pour un anneau :

(C) "Pour tout A-module à droite M non nul, $\mathrm{Ass}\, M \neq \emptyset$ ".

Lorsque (C) est réalisée, il est possible de définir, comme l'a fait J. FORT dans [2], une notion de module tertiaire qui redonne celle de LESIEUR et CROISOT [12] dans le cas particulier où A est noethérien à droite. Si (C) est réalisée, les modules tertiaires M sont ceux pour lesquels $\mathrm{Ass}\, M$ est réduit à un élément. Si, de plus, A est l. c. à droite [14], N. POPESCU a montré, dans [14], que l'application canonique ρ de $\mathrm{Spec}(\mathrm{Mod}_A)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ induit une théorie de décomposition $\underset{\sim}{T}$; les modules $\underset{\sim}{T}$-connexes sont alors les modules tertiaires. Le résultat suivant permet de comparer les théories de décomposition $\underset{\sim}{G}$ et $\underset{\sim}{T}$ [14] lorsque A est l. h. à droite et, de plus, satisfait à la condition (C) ; les notations sont celles de [14].

3.6 PROPOSITION. - Si Γ_1 et Γ_2 sont deux théories de décomposition définies sur Mod_A et à valeurs respectivement dans V_1 et V_2 , il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes dès que A est un l. c. anneau à droite.

(1) Tout A-module à droite Γ_1-connexe est Γ_2-connexe ;

(2) Il existe une application g de $\operatorname{Im} f_{\Gamma_1}$ sur $\operatorname{Im} f_{\Gamma_2}$ telle que $gf_{\Gamma_1} = f_{\Gamma_2}$.

3.7 COROLLAIRE. - Si A est un l. h. anneau à droite satisfaisant à la condition (C) (c'est le cas si A est noethérien à droite, et il existe même dans le cas commutatif des l. h. anneaux satisfaisant à (C) et non noethériens), tout A-module à droite primaire au sens de Goldman est tertiaire. De plus, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Tout A-module tertiaire est primaire au sens de Goldman ;

(2) L'application canonique ρ de $\operatorname{Spec}(\operatorname{Mod}_A)$ dans $\operatorname{Spec}(A)$ est bijective.

Anneaux l. h. commutatifs. - Ils ont été caractérisés par la proposition 2.15. Ici, on va donner une propriété des anneaux A l. h. commutatifs qui sont finiment associés, c'est-à-dire tels que $\operatorname{Ass} A$ soit fini : les anneaux commutatifs noethériens ou parfaits en sont des exemples.

3.8 PROPOSITION. - Si A est un anneau l. h. commutatif, finiment associé, on a les propriétés suivantes :

(1) L'ensemble des idéaux rationnels de A coïncide avec l'ensemble des idéaux de A contenant un élément régulier ;

(2) L'anneau classique des fractions de A coïncide avec l'anneau maximal des fractions au sens d'Utumi et avec l'enveloppe épimorphe plate $M(A)$ de A ;

Si, de plus, A est réduit [16], $M(A)$ est un produit fini de corps.

Dans le cas commutatif, un module M est dit primaire au sens classique si $\operatorname{Ass}_\rho(M)$ est réduit à un élément. D'après 3.7, si A est un l. h. anneau commutatif, les modules primaires de Goldman sont les modules M pour lesquels $\operatorname{Ass} M$ est réduit à un élément. Il en résulte la proposition suivante.

3.9 PROPOSITION. - Si A est l. h. commutatif, tout module primaire au sens classique est primaire au sens de Goldman.

3.10 PROPOSITION. - Si A est un anneau l. h. commutatif pour tout A-module M , on a $\bigcup_{p \in \operatorname{Ass} M} P = \bigcup_{P' \in \operatorname{Ass}_f(M)} P'$. En particulier, si A est semi-artinien commutatif, les modules primaires de Goldman coïncident avec les modules primaires au sens classique (et il en est de même si A est noethérien commutatif).

En tenant compte de 3.1 et de 3.10, on retrouve le résultat suivant de C. NĂSTĂCESCU [13].

3.11 COROLLAIRE. - Si A est semi-artinien et commutatif, tout sous-module propre d'un module quelconque est intersection réduite de sous-modules primaires au

<u>sens classique de</u> M .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. Chap. 3-4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind.,1293 ; Bourbaki, 28).

[2] FORT (J.). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires et isotypiques dans les modules et les (𝔊)-algèbres, Bull. Soc. math. France, Mémoire 1, 1964, IV + 99 p.

[3] GABRIEL (P.). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[4] GOLDMAN (O.). - Rings and modules of quotients, J. of Algebra, t. 13, 1969, p. 10-47.

[5] GUPTA (R. N.). - Self-injective quotient rings and injective quotient modules, Osaka J. of Math., t. 5, 1968, p. 69-87.

[6] HACQUE (M.). - Localisations exactes et localisations plates, Publ. Dép. Math. Lyon, t. 6, 1969, fasc. 2, p. 97-117.

[7] HUDRY (A.). - Quelques remarques sur la notion d'extension rationnelle maximale d'un module et sur les anneaux maximaux de fractions au sens d'Utumi, Publ. Dép. Math. Lyon, t. 6, 1969, fasc. 2, p. 139-151.

[8] HUDRY (A.). - Thèse de 3e cycle, Lyon 1970.

[9] HUDRY (A.). - Sur la localisation dans une catégorie de modules, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 925-928.

[10] LAMBEK (J.). - Lectures on rings and modules. - Waltham, London, Blaisdell publishing Company, 1966 (A Blaisdell Book in pure and applied Mathematics).

[11] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - La notion de coeur dans un module, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 252, 1961, p. 52-54.

[12] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars, 1963 (Mémorial des Sciences mathématiques, 154).

[13] NĂSTĂCESCU (C.). - Décomposition primaire dans les anneaux semi-artiniens, J. of Algebra, t. 14, 1970, p. 170-181.

[14] POPESCU (N.). - Théorie générale de la décomposition, Rev. roum. Math. pures et appl., t. 12, 1967, p. 1365-1371.

[15] POPESCU (N.) et NĂSTĂCESCU (C.). - Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 357-368.

[16] RENAULT (G.). - Anneaux réduits non commutatifs, J. Math. pures et appl., t. 46, 1967, p. 203-214.

[17] SILVER (L.). - Non commutative localizations and applications, J. of Algebra, t. 7, 1967, p. 44-76.

[18] UTUMI (Y.). - On quotient rings, Osaka math. J., t. 8, 1956, p. 1-18.

[19] RAYNAUD (J.). - Sur la théorie de la localisation (Thèse 3e cycle, Lyon 1971).

(Texte reçu le 13 décembre 1971)

Alain HUDRY
Université Claude Bernard [Lyon-I]
Mathématiques
43 boulevard du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE