Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Marie-Paule Malliavin

Une remarque sur les anneaux locaux réguliers

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, nº 2 (1970-1971), exp. nº 13, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 13, 7 p.

3 mai 1971

UNE REMARQUE SUR LES ANNEAUX LOCAUX RÉGULIERS

par Marie-Paule MALLIAVIN

Tous les anneaux considérés sont commutatifs noethériens, locaux et unitaires. Tous les modules sont unitaires et de type fini :

Si A est un anneau, on désignera par $m(A)$ son idéal maximal. On appelle <u>support d'un A-module</u> M, l'ensemble $\mathrm{Supp}_A(M)$ des idéaux premiers p de A tels que $M_p \neq 0$.

LEMME 1. - <u>Si, sur l'anneau local</u> A, <u>la longueur du produit tensoriel de deux modules</u> M <u>et</u> N <u>est finie, alors la longueur des modules</u> $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$ <u>est finie, pour tout</u> i.

<u>Preuve</u>. - On remarque que $\mathrm{Supp}_A M \cap \mathrm{Supp}_A N \subseteq \mathrm{Supp}_A(M \otimes_A N)$. En effet, ceci résulte du fait que, sur un anneau local, un produit tensoriel $M \otimes_A N$ n'est nul que si l'un des deux modules est nul. Donc, si $\mathrm{Supp}_A(M \otimes_A N) = \{m(A)\}$, et si p est un idéal premier de A, $p \neq m(A)$, alors

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N)_p = \mathrm{Tor}_i^{A_p}(M_p, N_p) = 0 \quad ;$$

d'où

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{Tor}_i^A(M, N)) = \{m(A)\} \quad .$$

Si, pour j assez grand, les $\mathrm{Tor}_j^A(M, N)$ sont tous nuls, la somme

$$\sum_{i\geq 0} (-1)^i \, \lg_A(\mathrm{Tor}_i^A(M, N))$$

(où $\lg_A$ = longueur du A-module) a un sens ; on l'appelle <u>caractéristique d'Euler-Poincaré</u> (d'ordre 0) de M et N, et on la note $\chi_0^A(M, N)$.

On appellera <u>dimension</u> d'un anneau A, sa dimension de Krull, et <u>dimension d'un A-module</u> M, la dimension de l'anneau $A/\mathrm{Ann}(M)$, où $\mathrm{Ann}(M) = \{x \in A , \ xM = 0\}$. On notera respectivement $\dim A$ et $\dim_A M$ ces dimensions, en convenant de poser : $\dim_A(0) = -1$.

On notera $\mathrm{dh}_A M$ la <u>dimension homologique</u> d'un A-module M. C'est, soit $+\infty$, soit le plus petit entier n pour lequel il existe une suite exacte

$$0 \to P_n \to \dots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \quad ,$$

où les P_i sont projectifs (c'est-à-dire ici libres). On a alors $\mathrm{Ext}^i_A(M\ ,\ .) = 0$ pour tout $i > \mathrm{dh}_A\, M$.

Rappelons une conjecture de SERRE : Si A est un anneau régulier (i. e. sur lequel tout module est de dimension homologique finie), et si M et N sont deux A-modules tels que $\lg_A(M \otimes_A N) < \infty$, alors $\chi_0^A(M\ ,\ N)$ est positif ou nul, et on a $\chi_0^A(M\ ,\ N) = 0$ si, et seulement si, $\dim_A M + \dim_A N < \dim A$ et $\neq \dim A$.

On remarquera que si $\lg_A(M \otimes_A N)$ est finie (A étant régulier), alors on a $\dim_A M + \dim_A N \leqslant \dim A$.

La conjecture, citée plus haut, a été démontré par SERRE dans le cas où l'anneau A est d'égales caractéristiques [i. e. son corps résiduel et son corps des quotients ont même caractéristique] et dans le cas où A est non ramifié [i. e. si p (caractéristique du corps résiduel de A) n'est pas contenue dans $\mathfrak{M}(A)^2$]. D'autre part, on sait qu'il suffirait de prouver cette conjecture dans le cas où A est complet (pour la topologie $\mathfrak{m}(A)$-adique), puisque les longueurs et les dimensions qu'elle fait intervenir sont invariantes par passage aux complétés. De plus, il suffirait de supposer que les modules M et N sont de la forme $A/\mathfrak{p}$ et $A/\mathfrak{q}$, avec $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ premiers, car tout A-module M possède une "suite de composition"

$$M_0 = 0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M \quad ,$$

où les facteurs M_i/M_{i-1} sont de la forme $A/\mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

La conjecture est vraie si $M = A/\mathfrak{p}$ et $N = A/\mathfrak{q}$, avec $p \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Précisément, on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - Soit A un anneau régulier complet d'inégales caractéristiques, et soit p la caractéristique du corps résiduel de A . Soient M et N deux A-modules tels que :

(i) $pM = pN = (0)$;

(ii) $\lg_A(M \otimes_A N)$ est finie.

Alors $\chi_0^A(M\ ,\ N)$ est positif, et l'on a $\chi_0^A(M\ ,\ N) = 0$ si, et seulement si, $\dim^A M + \dim^A N < \dim A$ et $\neq \dim A$.

Preuve. - On a (cf. [4]) $A = B/B\mathbf{x}$, où B est un anneau de séries formelles sur un anneau de valuation k , et où $\mathbf{x} \in B$, $\mathbf{x} \neq 0$.

Posons $\overline{A} = A/pB$; alors $\overline{A} = \overline{A}/\overline{\mathbf{x}}\overline{A}$, où $\overline{B} = B/pB$, et où $\overline{\mathbf{x}}$ est l'image de $\mathbf{x}$ dans $\overline{B}$.

L'anneau $\overline{B}$ est un anneau de séries formelles sur le corps $\overline{k} = k/pk$.

L'élément $\bar{x}$ de $\bar{B}$ n'est pas nul ; sinon, on aurait $x = pu$, avec $u \in B$; comme A est d'inégales caractéristiques, $p \notin xB$; comme l'idéal Bx est premier, on a alors $u \in xB$; donc $u = xv$, où $v \in B$; donc $1 = pv$, ce qui est impossible.

On a, d'autre part, deux suites spectrales [3]

$$\mathrm{Tor}_p^{\bar{A}}(M\ ,\ \mathrm{Tor}_q^{R}(N\ ,\ \bar{A})) \Longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^{R}(M\ ,\ N)\ ,$$

$$\mathrm{Tor}_p^{\bar{A}}(M\ ,\ \mathrm{Tor}_q^{\bar{B}}(N\ ,\ \bar{A})) \Longrightarrow \mathrm{Tor}_{p+q}^{\bar{B}}(M\ ,\ N)\ .$$

Puisque $\bar{x}$ n'est pas diviseur de zéro dans $\bar{B}$, et que p n'est pas diviseur de zéro dans R , on a

$$\mathrm{Tor}_q^{\bar{B}}(\bar{A}\ ,\ N) = 0 = \mathrm{Tor}_q^{A}(\bar{A}\ ,\ N)\ , \qquad \text{pour } q \geqslant 2\ .$$

Puisque $xN = 0 = pN$, on a

$$\mathrm{Tor}_1^{A}(N\ ,\ \bar{A}) = N \otimes_A \bar{A} = N = N \otimes_{\bar{B}} \bar{A} = \mathrm{Tor}_1^{\bar{B}}(N\ ,\ \bar{A})\ .$$

Par suite, les deux suites spectrales précédentes dégénèrent pour donner les suites exactes suivantes :

$$\dots \to \mathrm{Tor}_i^{\bar{A}}(M\ ,\ N) \to \mathrm{Tor}_{i+1}^{A}(M\ ,\ N) \to \mathrm{Tor}_{i+1}^{\bar{A}}(M\ ,\ N) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^{\bar{A}}(M\ ,\ N) \to \dots,$$

$$\dots \to \mathrm{Tor}_i^{\bar{A}}(M\ ,\ N) \to \mathrm{Tor}_{i+1}^{\bar{B}}(M\ ,\ N) \to \mathrm{Tor}_{i+1}^{\bar{A}}(M\ ,\ N) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^{\bar{A}}(M\ ,\ N) \to \dots$$

En explicitant, on voit que $\chi_0^A(M\ ,\ N) = \chi_0^{\bar{B}}(M\ ,\ N)$. Par suite, $\chi_0^A(M\ ,\ N)$ est positif, et est nul si, et seulement si,

$$\dim^{\bar{B}} M + \dim^{\bar{B}} N = \dim^{B} M + \dim^{B} N$$

est strictement inférieur à $\dim \bar{B} = \dim A$.

La conjecture est vraie lorsque le module $M = A/I$ est tel que I soit engendré par une A-suite $x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_i\ ,\ x_i \notin I$ (i. e. tel que x_k ne soit pas diviseur de zéro dans $A/(x_1\ ,\ \dots\ ,\ x_{k-1})$). Il en résulte, en particulier, que la conjecture est vraie si la dimension de A est < 2 ; en effet, A étant factoriel, tout idéal premier de A sera dans ce cas engendré par une A-suite.

On peut étendre ce résultat à la dimension 3 , en utilisant le résultat suivant de BUCHSBAUM [2].

PROPOSITION 2. - Soient R un anneau local régulier, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, x un élément de $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, et $\overline{M}$ un $\overline{R}(= R/xR)$-module monogène, tel que $dh_{\overline{R}}\, \overline{M} = 2$. Alors il existe un module M sur R , tel que $M/xM \simeq \overline{M}$, et que $\mathrm{Tor}_1^R(R/xR , M) = 0$ (i. e. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{x} M$ est exacte).

COROLLAIRE. - Si A est un anneau local régulier de dimension 3 , et si M , N sont deux A-modules tels que $\lg_A(M \otimes_A N)$ est finie, alors $\chi_0^A(M , N) \geqslant 0$, et $\chi_0^A(M , N) = 0$ si, et seulement si, $\dim M + \dim N \leqslant 2 < \dim A$.

Preuve. - On se ramène au cas où A est complet et $M = A/\mathfrak{p}$, $N = A/\mathfrak{q}$. Si $dh_A\, M = 0$, alors M est libre $(= A)$, $\chi_0^A(M , N) = \lg_A N$, et $\chi_0^A(M , N) = 0$ si, et seulement si, $N = 0$, donc si, et seulement si, $\dim N = -1 < 0$. Si $dh_A\, M = 1$, alors $\mathfrak{p}$ est libre, donc principal et engendré par une A-suite. Si $dh_A\, M = 3$, alors $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{p}$ est engendré par une A-suite.

Reste le cas où $dh_A\, M = 2$. Soit R un anneau local régulier complet non ramifié tel que $A = R/xR$, où $x \in \mathfrak{m}(R) - \mathfrak{m}(R^2)$. Alors il existe un idéal $\mathfrak{I}$ de R tel que $A/\mathfrak{p} = A \otimes_R R/\mathfrak{I}$ et $\mathrm{Tor}_1^R(A , R/I) = 0$. Mais alors

$$\mathrm{Tor}_i^A(A/\mathfrak{p} , A/\mathfrak{q}) = \mathrm{Tor}_i^A(A \otimes_R R/\mathfrak{I} , A/\mathfrak{q}) \simeq \mathrm{Tor}_i^R(R/\mathfrak{I} , A/\mathfrak{q}) \quad .$$

Donc

$$\chi_0^A(A/\mathfrak{p} , A/\mathfrak{q}) = \chi_0^R(R/\mathfrak{I} , A/\mathfrak{q}) \quad ,$$

et, pour l'anneau R , la conjecture étant vraie, cette quantité est positive, et elle est nulle si, et seulement si, $\dim R/\mathfrak{I} + \dim A/\mathfrak{q} < \dim R = \dim A + 1$. Mais $\dim A/\mathfrak{p} = \dim R/(\mathfrak{I} + xR) = \dim R/\mathfrak{I} - 1$, d'où le résultat.

Si A est un anneau régulier, et si M et N sont deux A-modules, tels que $\lg_A(\mathrm{Tor}_i^A(M , N)) < \infty$, alors on sait que $\lg_A(\mathrm{Tor}_j^A(M , N)) < \infty$, pour $j \geqslant i$, d'après un résultat de LICHTENBAUM. On introduit les caractéristiques d'Euler-Poincaré, d'ordre supérieur,

$$\chi_i^A(M , N) = \sum_{s \geqslant 0} (-1)^s_A\, (\mathrm{Tor}_{i+s}^A(M , N)) \quad .$$

Sauf dans les cas où A est d'égales caractéristiques et où A (ou son complété) est un anneau de série formelle sur un anneau de valuation (discret de rang 1), on ne sait rien sur la positivité des χ_i ni sur les conditions nécessaires ou suffisantes sous lesquelles elles seraient nulles.

PROPOSITION 3. - Si $\dim A = 2$, alors χ_i^A est positif ou nul, et, pour $i \geqslant 1$, $\chi_i^A(M , N) = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Tor}_i^A(M , N) = 0$.

Le seul cas à examiner est évidemment

$$\chi_1^A(M , N) = \lg_A \operatorname{Tor}_1^A(M , N) - \lg_A(\operatorname{Tor}_2^A(M , N)) \quad .$$

On utilisera le résultat suivant, cas particulier d'un théorème de M. AUSLANDER [1] :

<u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux</u> A-<u>modules, et soit</u> q <u>le plus grand entier tel que</u> $\operatorname{Tor}_q^A(M , N) \neq 0$. <u>Si</u> $q = 0$, <u>ou bien si</u> $dh_A(\operatorname{Tor}_q^A(M , N)) \geqslant \dim A - 1$, <u>on a</u>

$$dh_A(\operatorname{Tor}_q^A(M , N)) = dh_A M + dh_A N - q \quad .$$

Supposons que $\operatorname{Tor}_1^A(M , N)$ est non nul et de longueur finie, alors $dh_A(\operatorname{Tor}_q^A(M , N)) = 2$ pour $q \geqslant 1$, et $2 + q = dh_A M + dh_A N$, où q est le plus grand entier tel que $\operatorname{Tor}_q^A(M , N) \neq 0$; donc $q = 1$ ou 2 .

Si $dh_A M = 1$ ou $dh_A N = 1$, $2 + q \leqslant 1 + 2$ et $q = 1$. Alors

$$\chi_1^A(M , N) = \lg_A \operatorname{Tor}_1^A(M , N) > 0 \quad .$$

Si $dh_A M = 2 = dh_A N$, alors $m(A)$ est associé à M et à N . Soit H_0 le sous-module artinien maximal de M . Alors on a la suite exacte

$$0 \to H_0 \to M \to M' \to 0 \quad ,$$

où $dh_A M' \leqslant 1$. On a donc la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^A(H_0 , N) \to \operatorname{Tor}_1^A(M , N) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Tor}_1^A(M' , N) \to H_0 \otimes_A N$$
$$\to M \otimes_A N \to M' \otimes_A N \to 0 ,$$

et

$$\operatorname{Tor}_2^R(M , N) = \operatorname{Tor}_2^R(H_0 , N) \quad .$$

D'où

$$\lg \operatorname{Im} \varphi - \lg \operatorname{Tor}_1^A(M , N) + \lg \operatorname{Tor}_1^A(H_0 , N) = 0 \quad ,$$

et

$$\chi_1^A(M , N) = \lg \operatorname{Im} \varphi + \chi_1^A(H_0 , N) \quad .$$

Il suffit donc de prouver que $\chi_1^A(M , N) \geqslant 0$ si M est de longueur finie, et que $\chi_1^A(M , N) = 0$ avec M de longueur finie est équivalent à $\operatorname{Tor}_1^A(M , N) = 0$. En effet, dans ce cas, on aura, pour M quelconque,

$$\chi_1^A(M , N) \geqslant 0 \quad ,$$

et

$$(\chi_1^A(M\ ,\ N) = 0) \iff \{\varphi = 0 \text{ et } \mathrm{Tor}_1^A(H_0\ ,\ N) = 0\} \iff (\mathrm{Tor}_1^A(M\ ,\ N) = 0)\ .$$

On procède ensuite avec N de la même façon.

Soit H_0' le sous-module de longueur finie maximal de N. On a la suite exacte

$$0 \to H_0' \to N \to N' \to 0\ , \qquad \text{où } \mathrm{dh}_R\, N' \leqslant 1\ .$$

D'où la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(H_0'\ ,\ H_0) \to \mathrm{Tor}_1^A(N\ ,\ H_0) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Tor}_1^A(N'\ ,\ H_0) \to H_0' \otimes H_0$$
$$\to N \otimes H_0 \to N' \otimes H_0 \to 0\ ,$$

et

$$\mathrm{Tor}_2^A(N\ ,\ H_0) = \mathrm{Tor}_1^A(H_0'\ ,\ H_0)\ .$$

D'où

$$\lg \mathrm{Im}\ \psi - \lg \mathrm{Tor}_1^A(N\ ,\ H_0) + \lg \mathrm{Tor}_1^A(H_0'\ ,\ H_0) = 0\ ,$$

et

$$\chi_1^A(N\ ,\ H_0) = \chi_1^A(H_0'\ ,\ H_0) + \lg \mathrm{Im}\ \psi\ .$$

Il suffit donc de prouver que $\chi_1^A(H_0'\ ,\ H_0) \geqslant 0$, et que $\chi_1^A(H_0'\ ,\ H_0) = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Tor}_1^A(H_0'\ ,\ H_0) = 0$.

Mais, si $\lg H_0'$ et $\lg H_0$ sont $< \infty$, alors $\chi_0^A(H_0'\ ,\ H_0) = 0$. Donc $\chi_1^A(H_0'\ ,\ H_0) = \lg H_0 \otimes H_0' \geqslant 0$, et $\chi_1^A(H_0'\ ,\ H_0) = 0$ si, et seulement si, H_0 ou $H_0' = 0$, auquel cas $\mathrm{Tor}_1^A(H_0\ ,\ H_0') = 0$.

<u>Remarque</u>. - La condition $\mathrm{Tor}_1^A(H_0\ ,\ H_0') = 0$, avec H_0 et H_0' de longueur finie, est équivalente à H_0 ou $H_0' = 0$. En effet, on sait que $\mathrm{Tor}_1^A(H_0\ ,\ H_0') = 0$ et $H_0 \neq 0$, $\mathrm{codim}\ H_0 = 0$, entraîne que H_0' est libre [5]. Donc ici, $H_0' = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (M.). - Modules over unramified regular local rings, Illinois J. of Math., t. 5, 1961, p. 631-647.

[2] BUCHSBAUM (D. A.). - Complexes associated with the minors of a matrix, Symposia Mathematica, Vol. 4, p. 255-285. - London, New York, Academic Press, 1970 (Istituto nazionale di alta Matematica).

[3] CARTAN (Henri) and EILENBERG (Samuel). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[4] COHEN (I. S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[5] LICHTENBAUM (Stephen). - On the vanishing of Tor in regular local rings, Illinois J. of Math., t. 10, 1966, p. 220-226.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale. Multiplicités. Cours au Collège de France, 1957/58, rédigé par Pierre Gabriel. 2e édition. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1965 (Lecture Notes in Mathematics, 11).

(Texte reçu le 3 mai 1971)

Marie-Paule MALLIAVIN
10 rue Saint-Louis en l'Ile
75 - PARIS 04