Alain Faisant

Demi-groupes de fractions et plongement d'un demi-groupe dans un groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 2 (1970-1971), exp. n° 12, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A1_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 12, 14 p.

15 mars 1971

DEMI-GROUPES DE FRACTIONS ET PLONGEMENT D'UN DEMI-GROUPE DANS UN GROUPE

par Alain FAISANT

Par application des techniques catégoriques de GABRIEL et ZISMAN [9], nous construirons d'abord, dans le cas le plus général, le demi-groupe des fractions d'un demi-groupe quelconque D par rapport à un complexe quelconque de D : les démonstrations détaillées se trouvent dans [6]. Nous donnerons quelques applications de cette construction, qui fournit un cadre assez général pour les problèmes de plongement d'un demi-groupe dans un groupe. Après une petite synthèse de la notion de réversibilité, nous l'utiliserons pour donner un premier théorème de plongement. En utilisant les conditions de MAL'CEV et certaines propriétés des chaînes de MAL'CEV, nous donnerons un second théorème de plongement qui, combiné avec le premier, fournira une propriété de plongement, due à DOSS [4], et dont la démonstration était incomplète.

1. Demi-groupes de fractions.

Soient D un demi-groupe (non nécessairement commutatif, ni unitaire), et S un complexe de D. Le problème consistant à "rendre les éléments de S inversibles" peut se formaliser ainsi :

PROBLÈME (D.S). - Trouver un couple (Δ , φ) tel que :

$(D.S)_1$ Δ est un demi-groupe unitaire, et $\varphi : D \to \Delta$ un homomorphisme ;

$(D.S)_2$ $\forall s \in S$, $\varphi(s)$ est inversible dans Δ ;

$(D.S)_3$ Pour tout couple (Δ' , φ'), vérifiant $(D.S)_1$ et $(D.S)_2$, il existe un unique homomorphisme $\sigma : \Delta \to \Delta'$ tel que $\sigma \circ \varphi = \varphi'$.

Il est facile de voir que ce problème équivaut à un problème universel, et que les conditions suffisantes de BOURBAKI [1] pour qu'un tel problème ait une solution sont réalisées : on peut donc affirmer qu'il existe toujours une solution "unique à un isomorphisme près". La construction théorique de BOURBAKI n'étant pas utilisable, en voici une autre, inspirée des techniques de GABRIEL et ZISMAN :

• Soient $D \vee S$ la somme directe ensembliste de D et S, $in_1 : D \to D \vee S$ et $in_2 : S \to D \vee S$ les injections canoniques ;

• Soit $d : D \vee S \to \mathfrak{F}^1_{D\vee S}$ l'injection naturelle ; $\mathfrak{F}^1_{D\vee S}$ désigne le demi-groupe libre avec élément neutre sur l'ensemble $D \vee S$ [3] ;

. Soit R_0 la relation sur $\mathfrak{F}^1_{D\vee S}$ définie par :

(a) $(in_1\, x)(in_1\, y)\ R_0\ (in_1\, xy)$ pour tout $x\ ,\ y \in D$,

(b) $\left.\begin{array}{l}(in_2\, s)(in_1\, s)\ R_0\ 1\\(in_1\, s)(in_2\, s)\ R_0\ 1\end{array}\right\}$ pour tout $s \in S$;

. Si R est la congruence engendrée par R_0 , et si

$$r\ :\ \mathfrak{F}^1_{D\vee S} \to \mathfrak{F}^1_{D\vee S} / R = D[S^{-1}] \qquad \text{et} \qquad \varphi_S = r \circ d \circ in_1\ :\ D \to D[S^{-1}]\ ,$$

le couple $(D[S^{-1}]\ ,\ \varphi_S)$ ainsi construit est solution du problème (D.S) :

- La construction même de $D[S^{-1}]$ est la plus "économique" possible, c'est ce qu'exprime la condition $(D.S)_3$,

- La condition (a) sert à faire de φ_S un homomorphisme (alors que d et in_1 n'en sont pas), d'où la condition $(D.S)_1$,

- La condition (b) exprime que les éléments de $in_2\, S$ sont inverses formels des éléments de $in_1\, S$, d'où la condition $(D.S)_2$.

La justification complète se trouve dans [6]. Voici quelques propriétés de cette construction :

. L'homomorphisme φ_S "préconserve" l'élément neutre (i. e., si D possède un neutre, φ_S conserve le neutre de D), et $D[S^{-1}]$ est engendré par $\varphi_S(D) \cup \varphi_S(S)^{-1}$;

. φ_S est un épimorphisme de la catégorie des demi-groupes ; il est facile de voir que φ_S est un épimorphisme de la catégorie des demi-groupes avec neutre (ce qui semble être une propriété générale aux solutions de problèmes universels), le résultat indiqué est strictement plus fort [2] ;

. Si $\overline{S}$ est le sous-demi-groupe engendré par S , on a

$$D[S^{-1}] \simeq D[\overline{S}^{-1}] \simeq D[\overline{S} \cup \mathcal{U}(D)]\ ,$$

$\mathcal{U}(D)$ désignant le groupe des unités de D (éventuellement vide) ;

. Il y a équivalence entre $S \subseteq \mathcal{U}(D)$ et $D[S^{-1}] \simeq D$;

. Si $J(S) = \{x \in D\ ,\ \varphi_S(x)\ \text{inversible}\}$, l'application J est une fermeture dans $\mathcal{P}(D) - \{\emptyset\}$ [2] (on peut, dans certains cas, caractériser entièrement $J(S)$).

<u>Applications</u>.

1° <u>Demi-groupes de fractions à droite</u>. - On dit que $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite de D par rapport à S , si tout élément x de $D[S^{-1}]$ peut s'écrire $x = \varphi_S(a)\ \varphi_S(s)^{-1}$, avec $a \in D$ et $s \in \overline{S}$. Cette condition équivaut au "renversement" des fractions à gauche : $\varphi_S(s)^{-1}.\varphi_S(a) = \varphi_S(b).\varphi_S(t)^{-1}$, c'est-à-dire à la condition suivante :

(C_d) mod $R\varphi_S$ $\quad \forall\,(a\,,\,s) \in D \times \overline{S}\,, \quad \exists\,(b\,,\,t) \in D \times \overline{S}$ tel que $at\ R\varphi_S\ sb$

(i. e. $\varphi_S(at) = \varphi_S(sb)$),

elle-même équivalente à la condition :

(C_d) mod R_S $\quad \forall\,(a\,,\,s) \in D \times \overline{S}\,, \quad \exists\,(b\,,\,t) \in D \times \overline{S}$ tel que $at\ R_S\ sb$,

où R_S désigne la plus fine congruence sur D simplifiable par les éléments de S. Si l'une de ces conditions est réalisée, on a $R\varphi_S = R_S$ (en général, on a seulement $R_S \subseteq R\varphi_S$). En particulier, lorsque S est simplifiable dans D, on a $R_S = E_D$ (égalité dans D), et la condition précédente s'écrit :

(C_d) $\quad \forall\,(a\,,\,s) \in D \times \overline{S}\,, \quad \exists\,(b\,,\,t) \in D \times \overline{S}$ tel que $at = sb$

(condition de Ore généralisée), et, si elle est réalisée, on a $R\varphi_S = R_S = E_D$, donc φ_S est injectif. On retrouve donc le théorème de Ore "généralisé".

THÉORÈME 1 (ORE-ASANO).

(a) D est immersible dans $D[S^{-1}]$, et $D[S^{-1}]$ est un demi-groupe de fractions à droite, si, et seulement si, S est simplifiable dans D , et le couple $(D\,,\,S)$ vérifie la condition (C_d). De plus, si D est simplifiable, $D[S^{-1}]$ aussi.

(b) En particulier, D est immersible dans un groupe de fractions à droite, si, et seulement si, D est simplifiable et vérifie la condition de Ore.

La propriété (b) s'obtient à partir de (a) en prenant $S = D$, et en remarquant que $D[D^{-1}]$ est un groupe, puisque $D[D^{-1}] = \langle \varphi_D(D) \cup \varphi_D(D)^{-1} \rangle$.

2° Groupe des fractions. - Il est facile de démontrer que D est immersible dans un groupe si, et seulement si, D est immersible dans $D[D^{-1}]$, groupe des fractions de D , c'est-à-dire si, et seulement si, $\varphi_D : D \to D[D^{-1}]$ est injectif.

$D[D^{-1}]$ est aussi un D-groupe libre, au sens de CLIFFORD [3], et fournit ainsi une construction beaucoup plus simple des D-groupes libres.

On peut également retrouver les conditions de MAL'CEV, nécessaires et suffisantes, pour que D soit immersible dans un groupe, en exprimant que φ_D est injectif, c'est-à-dire que

$$(in_1\ x)\ R\ (in_1\ y) \implies x = y \ .$$

2. Réversibilité.

Nous utilisons la terminologie de CLIFFORD et PRESTON [3].

On notera $\mathcal{U}_g(D)$ l'ensemble éventuellement vide des éléments inversibles à gauche de D , $\mathcal{U}_d(D)$ l'ensemble des éléments inversibles à droite.

. Un élément $a \in D$ est <u>réversible à gauche</u> (resp. <u>réversible à droite</u>), si, $\forall x \in D$, $Dx \cap Da \neq \emptyset$ (resp. $xD \cap aD \neq \emptyset$). On notera $\Gamma(D)$ (resp. $\Delta(D)$) l'ensemble des éléments réversibles à gauche (resp. à droite).

PROPOSITION 1.

(a) $\mathcal{U}_g(D) \subseteq \Gamma(D)$, $\mathcal{U}_d(D) \subseteq \Delta(D)$.

(b) $\Gamma(D)$ <u>et</u> $\Delta(D)$ <u>sont des parties stables de</u> D .

(c) $\Gamma(D)$ <u>(resp.</u> $\Delta(D)$) <u>est consistant à droite (resp. à gauche)</u>.

(d) <u>Si</u> D <u>est simplifiable à droite (resp. à gauche), alors</u> $\Gamma(D)$ <u>est consistant (resp.</u> $\Delta(D)$ <u>est consistant</u>).

La démonstration détaillée de ces résultats se trouve dans [7].

. D est <u>réversible à gauche</u> (resp. <u>réversible à droite</u>), si tout élément de D est réversible à gauche, i. e. $\Gamma(D) = D$ (resp. $\Delta(D) = D$).

<u>Remarque</u>. - Les demi-groupes de Ore à droite sont les demi-groupes simplifiables, réversibles à droite.

<u>Exemple</u> 1. - Tout demi-groupe commutatif est réversible à droite et à gauche.

<u>Exemple</u> 2. - $D = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, muni de la loi $(i , j).(k , \ell) = (i + k , 2^k j + \ell)$ (cf. [3]), est un demi-groupe réversible à droite et non réversible à gauche.

. D est <u>quasi-réversible à gauche</u>, si, $\forall a , b \in D$,

$$(Da \cap Db \neq \emptyset) \implies (xa = yb \text{ avec } x \text{ ou } y \text{ élément de } \Gamma(D)) .$$

De même :

. D est <u>quasi-réversible à droite</u>, si, $\forall a , b \in D$,

$$(aD \cap bD \neq \emptyset) \implies (ax = by \text{ avec } x \text{ ou } y \text{ élément de } \Delta(D)) .$$

Cette notion a été introduite par DOSS [4]. Remarquons que, si D est quasi-réversible à gauche (resp. à droite), on a $\Gamma(D) \neq \emptyset$ (resp. $\Delta(D) \neq \emptyset$).

<u>Exemple</u> 3. - Tout demi-groupe réversible à droite (resp. à gauche) est quasi-réversible à droite (resp. à gauche).

<u>Exemple</u> 4. - Le demi-groupe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'exemple 2 est quasi-réversible à droite et à gauche.

<u>Exemple</u> 5. - Tout zéro-demi-groupe à gauche, ayant plus d'un élément, est quasi-réversible à gauche et non à droite.

• D vérifie la <u>condition</u> (Q_d) (resp. la <u>condition</u> (Q_g)), si

$$(Q_d) \qquad (aD^1 \cap bD^1 \neq \emptyset) \implies (aD^1 \text{ et } bD^1 \text{ sont comparables pour l'inclusion})$$

(resp.

$$(Q_g) \qquad (D^1 a \cap D^1 b \neq \emptyset) \implies (D^1 a \text{ et } D^1 b \text{ comparables}) \text{).}$$

<u>Exemple</u> 6. – Si D vérifie (Q_d) (resp. (Q_g)) et possède un neutre, alors D est quasi-réversible à droite (resp. à gauche).

<u>Exemple</u> 7. – $\mathbb{N}$ additif vérifie (Q_d) et (Q_g).

<u>Exemple</u> 8. – $\mathbb{N}^*$ multiplicatif ne vérifie, ni (Q_d), ni (Q_g).

<u>Exemple</u> 9. – Tout demi-groupe équidivisible avec neutre [10] vérifie (Q_d) et (Q_g), donc en particulier $\mathcal{F}_X^1$ pour tout ensemble X .

On peut résumer ces notions dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{réversible à droite} \arrow[r, Rightarrow] & \text{quasi-réversible à droite} & (Q_d) + \text{neutre} \arrow[l, Rightarrow] & & \\
\text{commutatif} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & & \text{équidivisible + neutre} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \mathcal{F}_X^1 \arrow[l, Rightarrow] \\
 & \text{réversible à gauche} \arrow[r, Rightarrow] & \text{quasi-réversible à gauche} & (Q_g) + \text{neutre} \arrow[l, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Il est facile de voir que, si D est simplifiable, les propriétés (Q_d), (Q_g), et équidivisible, sont équivalentes : un demi-groupe simplifiable vérifiant l'une de ces propriétés sera appelé <u>quasi-réversible</u>. On a donc les implications suivantes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{de Ore à droite} \arrow[r, Rightarrow] & \text{quasi-réversible à droite simplifiable} & & \\
\text{commutatif simplifiable} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \text{quasi-réversible avec neutre} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \mathcal{F}_X^1 \arrow[l, Rightarrow] \\
 & \text{de Ore à gauche} \arrow[r, Rightarrow] & \text{quasi-réversible à gauche simplifiable} & &
\end{tikzcd}$$

<u>Exemple</u> 10. – Pour tout ensemble X , $\mathcal{F}_X$ et $\mathcal{F}_X^1$ sont quasi-réversibles. Le premier n'est quasi-réversible ni à gauche ni à droite, le second l'est des deux côtés.

<u>Exemple</u> 11. – Le demi-groupe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'exemple 2 est quasi-réversible à droite et à gauche, mais n'est pas quasi-réversible : il est facile de voir que $(1\,,\,1)D^1 \cap (2\,,\,1)D^1 \neq \emptyset$, ces idéaux étant incomparables.

Mme DUBREIL-JACOTIN et LÉVI ont caractérisé les demi-groupes libres ([3], [5]) ; avec notre terminologie, cette caractérisation est la suivante :

D est un demi-groupe libre, si, et seulement si :

1° D est sans élément neutre ;

2° D est quasi-réversible ;

3° Tout élément de D possède un nombre fini de diviseurs à gauche.

On peut de même caractériser les demi-groupes libres avec élément neutre.

Exemple 12. - Le demi-groupe $\mathfrak{F}_X^1 \times \underset{\sim}{Z}$, muni de la structure produit, est quasi-réversible, mais n'est pas libre avec élément neutre.

On voit que les demi-groupes quasi-réversibles sont assez proches des demi-groupes libres ; comme pour les demi-groupes libres, un sous-demi-groupe d'un demi-groupe quasi-réversible ne l'est pas nécessairement. Pour d'autres propriétés, voir [7].

Les liens entre les demi-groupes quasi-réversibles et quasi-réversibles à gauche ou à droite sont assez étroits. Ils se précisent dans le théorème de plongement suivant :

THÉORÈME 2. - Tout demi-groupe simplifiable quasi-réversible à droite (resp. à gauche) est immersible dans un demi-groupe quasi-réversible avec élément neutre.

Faisons la démonstration pour D , demi-groupe quasi-réversible à gauche : d'après la proposition 1, $\Gamma(D)$ est une partie stable consistante ; de plus, $\Gamma(D) \neq \emptyset$, puisque D est quasi-réversible à gauche, donc $\Gamma(D)$ est un sous-demi-groupe consistant. Nous allons montrer que $\Gamma(D)$ vérifie la condition

(C_g) $\forall\ (a\ ,\ s) \in D \times \Gamma(D)\ ,\qquad \exists\ (b\ ,\ t) \in D \times \Gamma(D)$ tel que $ta = bs$.

En effet, si $a \in D$ et $s \in \Gamma(D)$, on a $Da \cap Ds \neq \emptyset$, donc $xa = ys$; or D est quasi-réversible à gauche, donc $x'a = y's$ avec x' ou $y' \in \Gamma(D)$:

- Si $x' \in \Gamma(D)$, on prend $b = y'$, $t = x'$;
- Si $y' \in \Gamma(D)$, $y's \in \Gamma(D)$, donc $x'a \in \Gamma(D)$ et $x' \in \Gamma(D)$ (car $\Gamma(D)$ est consistant), retour au cas précédent.

Alors, $\Gamma(D)$ étant simplifiable dans D , on peut appliquer le théorème 1 (a) : D est immersible dans $D[\Gamma(D)^{-1}] = D_1$, et D_1 est simplifiable, l'injection étant $\varphi_\Gamma : D \twoheadrightarrow D_1$. D'autre part, D_1 est simplifiable par construction. Il reste à montrer que D_1 est quasi-réversible : pour cela, identifions D et $\varphi_\Gamma(D)$ en écrivant les éléments de D_1 sous la forme $s^{-1}\ a$, $s \in \Gamma(D)$, $a \in D$. On notera que l'on "peut" réduire deux fractions à gauche au même dénominateur. On va démontrer par exemple la condition (Q_d) :

Supposons $s^{-1}\ a.D_1 \cap s^{-1}\ b.D_1 \neq \emptyset$ ($s^{-1}\ a$ et $s^{-1}\ b$ étant réduits au même dénominateur), et montrons que ces deux idéaux sont comparables. On a donc deux fractions (que l'on peut réduire au même dénominateur) $t^{-1}x$ et $t^{-1}y$ telles que $s^{-1}a.t^{-1}x = s^{-1}b.t^{-1}y$, d'où

$$at^{-1}x = bt^{-1}y \quad . \tag{1}$$

Appliquons la condition (C_g) :

$$\left.\begin{array}{l} \text{. au couple } (a\ ,\ t) :\ t'a = a't \text{ , i. e. } at^{-1} = t'^{-1}a' \\ \text{. au couple } (b\ ,\ t) :\ t''b = b't \text{ , i. e. } bt^{-1} = t''^{-1}b' \end{array}\right\} \text{fractions que l'on}$$

réduit au même dénominateur :

$$\begin{cases} at^{-1} = u^{-1}c \ , \\ bt^{-1} = u^{-1}d \ . \end{cases}$$

(1) s'écrit :

$$(u^{-1}cx = u^{-1}dy) \implies (cx = dy) \ , \quad \text{i. e. } \ Dx \cap Dy \neq \emptyset \ ;$$

or D est quasi-réversible à gauche, donc $vx = wy$ avec v ou $w \in \Gamma(D)$:

- Si $v \in \Gamma(D)$, $(x = v^{-1}wy) \implies (s^{-1}a.t^{-1}v^{-1}wy = s^{-1}b.t^{-1}y)$; D_1 étant simplifiable, on a

$$(s^{-1}a.t^{-1}v^{-1}w = s^{-1}b.t^{-1}) \implies (s^{-1}a.(vt)^{-1}wt = s^{-1}b)$$
$$\implies (s^{-1}b.D_1 \subseteq s^{-1}a.D_1) \ ;$$

- Si $w \in \Gamma(D)$, $(y = w^{-1}vx) \implies (s^{-1}a.t^{-1}x = s^{-1}b.t^{-1}w^{-1}vx)$, et de même

$$(s^{-1}a.t^{-1} = s^{-1}b.t^{-1}w^{-1}v) \implies (s^{-1}a = s^{-1}b.(wt)^{-1}vt) \ ,$$
$$\text{i. e. } s^{-1}a.D_1 \subseteq s^{-1}b.D_1 \ .$$

<u>Remarque</u> 1. - On démontre [8] que, lorsque S est une partie simplifiable dans D , et que $(D\ ,\ S)$ vérifie la condition (C_g), on a

$$J(S) = \{x \in D\ ,\ x \text{ simplifiable à droite et } Dx \cap \bar{S} \neq \emptyset\} \ .$$

Donc ici

$$J(\Gamma(D)) = \{x \in D\ ,\ Dx \cap \Gamma(D) \neq \emptyset\} = \Gamma(D) \ ,$$

car $\Gamma(D)$ est consistant. Ceci signifie que seuls deviennent inversibles dans D_1 les éléments de $\Gamma(D)$. Il est facile de montrer que, de plus, $\mathcal{U}(D_1) = \Gamma(D_1)$.

<u>Remarque</u> 2. - La notion de demi-groupe quasi-réversible à droite est latéralisée, alors que celle de quasi-réversibilité ne l'est pas. C'est principalement ce fait, joint au théorème 2, qui permettra de montrer plus facilement le résultat de DOSS.

Soit D un demi-groupe quasi-réversible ; la propriété caractéristique peut s'exprimer ainsi : Si a et b ont un multiple commun à gauche, alors $a = xb$ ou $b = xa$ (et de même à droite). La proposition qui suit est une sorte de généralisation à l'ordre n de cette propriété. DOSS [4] a montré cette propriété, la partie (a) seulement étant vraie dans les demi-groupes simplifiables quasi-réversibles à gauche, et (b) pour les demi-groupes quasi-réversibles à droite.

PROPOSITION 2. - Soit D un demi-groupe quasi-réversible avec élément neutre.

(a) Pour tout $n \geqslant 1$, et tout système d'égalités

$$\left.\begin{array}{rcl} c_n \cdot b_n & = & c_{n-1} \cdot s_{n-1} \\ c_{n-1} \cdot b_{n-1} & = & c_{n-2} \cdot s_{n-2} \\ & \vdots & \\ c_2 \cdot b_2 & = & c_1 \cdot s_1 \\ c_1 \cdot b_1 & = & c_0 \cdot s_0 \end{array}\right\} \Gamma_n ,$$

on peut trouver $c'_0 , c'_1 , \ldots , c'_n$ tels que

$$\left.\begin{array}{rcl} c'_n \cdot b_n & = & c'_{n-1} \cdot s_{n-1} \\ c'_{n-1} \cdot b_{n-1} & = & c'_{n-2} \cdot s_{n-2} \\ & \vdots & \\ c'_2 \cdot b_2 & = & c'_1 \cdot s_1 \\ c'_1 \cdot b_1 & = & c'_0 \cdot s_0 \end{array}\right\} \Gamma'_n ,$$

avec l'un des c'_i égal à 1 .

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, et tout système d'égalités

$$\left.\begin{array}{rcl} d_n \cdot f_n & = & t_{n-1} \cdot f_{n-1} \\ d_{n-1} \cdot f_{n-1} & = & t_{n-2} \cdot f_{n-2} \\ & \vdots & \\ d_2 \cdot f_2 & = & t_1 \cdot f_1 \\ d_1 \cdot f_1 & = & t_0 \cdot f_0 \end{array}\right\} \Delta_n ,$$

on peut trouver $f'_0 , f'_1 , \ldots , f'_n$ tels que

$$\left.\begin{aligned} d_n . f'_n &= t_{n-1} . f'_{n-1} \\ d_{n-1} . f'_{n-1} &= t_{n-2} . f'_{n-2} \\ &\vdots \\ d_2 . f'_2 &= t_1 . f'_1 \\ d_1 . f'_1 &= t_0 . f'_0 \end{aligned}\right\} \Delta'_n ,$$

<u>avec l'un des</u> f'_i <u>égal à</u> 1 .

La démonstration détaillée se trouve dans [4] et [7].

COROLLAIRE.

(a) <u>Si dans le système</u> Γ_n , <u>on a</u> $c_0 = c_n$, <u>dans le système</u> Γ'_n , <u>on a</u> $c'_0 = c'_n$.
(b) <u>Si dans le système</u> Δ_n , <u>on a</u> $f_0 = f_n$, <u>dans le système</u> Δ'_n , <u>on a</u> $f'_0 = f'_n$.

Pour la démonstration, voir [4] et [7].

3. Chaînes de Mal'cev.

Nous reprenons, avec quelques modifications, les notations de [3].

Une <u>chaîne de Mal'cev</u> I , de <u>niveau</u> (m , n) et d'<u>ordre</u> $m + n > 0$, est une suite de $2m + 2n$ symboles : m symboles $G_1 , G_2 , \ldots , G_m$; m symboles $G^*_1 , G^*_2 , \ldots , G^*_m$; n symboles $D_1 , D_2 , \ldots , D_n$; et n symboles $D^*_1 , D^*_2 , \ldots , D^*_n$ (éventuellement $m = 0$ ou $n = 0$, mais pas les deux à la fois), qui satisfait aux conditions :

(M1) <u>Chacun des symboles</u> G_i , G^*_i , D_j , D^*_j <u>figure une, et une seule fois</u> ;
(M2) $\forall\, i = 1 , 2 , \ldots , m$, G^*_i <u>figure après</u> G_i , <u>et,</u> $\forall\, j = 1 , 2 , \ldots , n$, D^*_j <u>figure après</u> D_j ;
(M3) $\forall\, i = 1 , 2 , \ldots , m$, <u>si</u> $G_k \in \,]G_i , G^*_i[$, <u>on a</u> $G^*_k \in \,]G_i , G^*_i[$, <u>et,</u> $\forall\, j = 1 , 2 , \ldots , n$, <u>si</u> $D_\ell \in \,]D_j , D^*_j[$, <u>on a</u> $D^*_\ell \in \,]D_j , D^*_j[$.

CONVENTIONS.

- On notera par des majuscules A , B , ... des éléments de la suite I ; elles représenteront donc toujours un G_i , G^*_i , D_j , ou D^*_j .
- $[A , B]$ désigne la suite extraite A , ... , B , de même $]A , B]$, $[A , B[$, $]A , B[$, avec les significations habituelles des intervalles.
- Les G_i et les D_j ne sont pas nécessairement dans l'ordre croissant, mais on le fera ainsi en pratique quand cela sera possible.

Par exemple : $G_2\, G_1\, D_1\, G_3\, D_2\, G^*_3\, G^*_1\, D^*_2\, G^*_2\, G_4\, D^*_1\, G^*_4$ est une chaîne de Mal'cev de niveau $(4 , 2)$ et d'ordre 6 .

A chaque symbole G_i , on fait correspondre deux suites de deux lettres :

La suite origine : $o(G_i) = d_i\ e_i$,
La suite extrémité : $e(G_i) = t_i\ e_i$.

Et, de même, pour les G_i^* , D_j , D_j^* . Cette correspondance est résumée dans le tableau suivant :

(I)

	G_i	G_i^*	D_j	D_j^*
origine	$d_i\ e_i$	$t_i\ f_i$	$a_j\ b_j$	$c_j\ s_j$
extrémité	$t_i\ e_i$	$d_i\ f_i$	$a_j\ s_j$	$c_j\ b_j$

.

Grâce à ce tableau, on associe à chaque chaîne de Mal'cev I un système d'équations $\sigma(I)$: pour chaque couple de symboles consécutifs AB de la suite, on écrit l'égalité formelle $e(A) = o(B)$; par exemple, au couple $G_4^*\ D_2$, on associe $d_4\ f_4 = a_2\ b_2$. Si I est de niveau (m , n) , le système $\sigma(I)$ a $2m + 2n - 1$ équations. La clôture de $\sigma(I)$ est l'équation $o(A) = e(Z)$, où A désigne le premier symbole et Z le dernier symbole de la suite ; cette équation est notée $\gamma(I)$. Par exemple,

$$I = G_1\ D_1\ G_1^*\ D_1^* , \qquad \sigma(I) : \begin{cases} t_1\ e_1 = a_1\ b_1 , \\ a_1\ s_1 = t_1\ f_1 , \\ d_1\ f_1 = c_1\ s_1 , \end{cases} \qquad \gamma(I) : \ d_1\ e_1 = c_1\ b_1 .$$

Si D est un demi-groupe, et I une chaîne de Mal'cev, on appelle système de D-équations associé à I , tout système d'égalités dans D obtenu à partir de $\sigma(I)$ en substituant aux lettres a_i , b_i , c_i , d_i , e_i , f_i , s_i , t_i des éléments de D de sorte que les égalités obtenues soient vraies dans D .

Le théorème de Mal'cev est le suivant :

THÉORÈME 3. - Soit D un demi-groupe avec élément neutre. D est immersible dans un groupe, si, et seulement si, la clôture de tout système de D-équations est une égalité vraie dans D .

On en trouvera une démonstration dans [3]. Il est à remarquer qu'un tel système de conditions nécessaires et suffisantes est prévisible par des moyens très différents : les problèmes d'immersion sont formalisables en logique dans la théorie des modèles ; on peut démontrer qu'il existe un système de conditions nécessaires et suffisantes ayant la forme des conditions de Mal'cev ; en particulier, le fait qu'on ne peut extraire des conditions de Mal'cev un nombre fini de conditions est conséquence du théorème de compacité. Pour plus de détails, voir [11].

Nous allons maintenant définir les types d'une chaîne de Mal'cev : Soit I une chaîne de Mal'cev de niveau (m, n).

. Le G-type de I : $G(I)$ est

$G(I) = \emptyset$, si $m = 0$,

$G(I) = \,]G_k, G_k^*[\,$, si $m > 0$,

où G_k est le dernier des symboles G_i apparaissant dans la suite I.

. Le D-type de I : $D(I)$ est

$D(I) = \emptyset$, si $n = 0$,

$D(I) = \,]D_\ell, D_\ell^*[\,$, si $n > 0$,

où D_ℓ désigne le dernier des symboles D_j apparaissant dans la suite I.

Il peut se faire que $G(I)$ soit $\emptyset$, bien que m soit non nul. Par exemple, $I = G_1 D_1 G_1^* D_1^* G_2 G_2^*$ de niveau $(2, 1)$, $G(I) = \,]G_2, G_2^*[\, = \emptyset$, $D(I) = G_1^*$.

PROPOSITION 3. - Toute chaîne de Mal'cev vérifie au moins l'une des propriétés suivantes :

(a) $G(I) = D_{i_1}^* D_{i_2}^* \dots D_{i_p}^*$;

(b) $G(I) = \emptyset$;

(c) $D(I) = G_{i_1}^* G_{i_2}^* \dots G_{i_q}^*$;

(d) $D(I) = \emptyset$.

Pour la démonstration, voir [7].

4. Le théorème de Doss.

THÉORÈME 4. - Tout demi-groupe quasi-réversible avec élément neutre est immersible dans un groupe.

On trouvera, dans [7], la démonstration détaillée. Nous donnerons ici succinctement les étapes de cette démonstration : on utilise le théorème 3 en démontrant que, si D est quasi-réversible avec neutre (donc simplifiable), alors la clôture de tout système de D-équations est vraie dans D ; pour cela, on raisonne par récurrence sur l'ordre $m + n$ des chaînes de Mal'cev :

. Si $m + n = 1$, on a $m = 0$ ou $n = 0$; les seules chaînes sont $D_1 D_1^*$ et $G_1 G_1^*$, et leur validité équivaut à la simplifiabilité du demi-groupe D.

. On suppose la propriété vraie pour $m + n \leqslant p$. Soient I une chaîne de Mal'cev de niveau (m , n) avec $m + n = p + 1$, et un système de D-équations associé à I . On considère 4 cas selon le type de I :

(a) $G(I) = \emptyset$, i. e. $I = A \dots KG_k\, G_k^* L \dots Z$, avec

$$\begin{aligned} e(K) = o(G_k) &= d_k\, e_k \ , \\ t_k\, e_k &= t_k\, f_k \ , \\ d_k\, f_k &= o(L) \ , \end{aligned}$$

d'où $e_k = f_k$ et $e(K) = o(L)$, donc on peut supprimer le couple $G_k\, G_k^*$, et l'on obtient une suite $J = A \dots KL \dots Z$ de niveau $(m - 1 , n)$, à laquelle est associé un système de D-équations que nous choisirons comme étant le même que celui associé à I en supprimant les équations associées à G_k et G_k^* (c'est bien un système de D-équations, car $e(K) = o(L)$) ; or J est d'ordre $m - 1 + n = p$, et, d'après l'hypothèse de récurrence, $\gamma(J) = \gamma(I)$ est valide dans D .

(b) $G(I) = D_{i_1}^* \dots D_{i_p}^*$, i. e. $I = A \dots KG_k\, D_{i_1}^* \dots D_{i_p}^*\, G_k^* L \dots Z$, le système de D-équations s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} e(A) & = & \dots \\ & \vdots & \\ & = & o(K) \\ e(K) & = & d_k\, e_k \\ \end{array}$$
$$\boxed{\begin{array}{rcl} t_k\, e_k & = & c_{i_1}\, s_{i_1} \\ c_{i_1}\, b_{i_1} & = & c_{i_2}\, s_{i_2} \\ & \vdots & \\ c_{i_p}\, b_{i_p} & = & t_k\, f_k \end{array}}$$
$$\begin{array}{rcl} d_k\, f_k & = & o(L) \\ e(L) & = & \dots \\ & \vdots & \\ & = & o(Z) \quad . \end{array}$$

On remarque que les équations encadrées forment un système Γ_{p+1} de la proposition 2 : on peut donc remplacer $t_k , c_{i_1} , \dots , c_{i_p}$ par $t'_k , c'_{i_1} , \dots , c'_{i_p}$ avec l'un d'eux valant 1 (puisque D est quasi-réversible avec neutre), et, comme l'on est dans les conditions du corollaire de la proposition 2 (t_k joue le rôle de $c_0 = c_n$), on est donc assuré que ceci est possible. D'autre part, les lettres

t_k et $c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}$ ne figurent pas ailleurs que dans ce cadre (il suffit de se reporter au tableau I pour le vérifier), donc cette substitution ne modifie en rien la validité du système $\sigma(I)$. Alors, selon que $t'_k = 1$, $c'_{i_p} = 1$ ou $c'_{i_r} = 1$ avec $r < p$, on fabrique une chaîne de Mal'cev d'ordre inférieur à celui de I ayant la même clôture que I. La technique est analogue à celle décrite au (a).

(c) $D(I) = \emptyset$. De façon analogue à (a), on se ramène à une chaîne de niveau inférieur ayant même clôture.

(d) $D(I) = G^*_{i_1} \ldots G^*_{i_q}$. La technique est analogue à (b), mais ici on utilise un système Δ_{q+1} de la proposition 2.

En combinant les théorèmes 2 et 4, on obtient le résultat de DOSS :

COROLLAIRE 1. - <u>Tout demi-groupe simplifiable quasi-réversible à droite (resp. à gauche) est immersible dans un groupe.</u>

<u>Remarque</u>. - Il serait très difficile et fastidieux de montrer directement ce corollaire, car ne pouvant utiliser de la proposition 2 que les systèmes Δ_n (pour un demi-groupe quasi-réversible à droite), on ne peut pas se servir de la proposition 3, puisque les G-types non vides ne pourraient être traîtés (car ils donnent lieu à des systèmes Γ_n).

COROLLAIRE 2.

(a) <u>Tout demi-groupe simplifiable réversible à droite (resp. à gauche) est immersible dans un groupe (théorème de Ore-Asano)</u>.

(b) <u>Tout demi-groupe libre, tout demi-groupe équidivisible simplifiable, est immersible dans un groupe</u>.

Le résultat (b) permet donc de construire le groupe libre sur un ensemble comme le groupe des fractions du demi-groupe libre sur cet ensemble.

Tout groupe étant un demi-groupe quasi-réversible, les demi-groupes immersibles dans un groupe sont donc les sous-demi-groupes des demi-groupes quasi-réversibles : il y a donc (théorème 2) les demi-groupes quasi-réversibles d'un côté, mais il y en a d'autres : si $D = \mathfrak{F}_{\{a,b\}}$, D est quasi-réversible ; soit $T = \langle a , ab , ba \rangle \subseteq D$, on peut démontrer que T n'est quasi-réversible ni à gauche ni à droite, ni quasi-réversible ; il est cependant immersible dans un groupe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Théorie des ensembles, Chapitre 4 : Structures. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1258 ; Bourbaki, 22).

[2] BOUVIER et FAISANT (A.). - Propriétés des demi-groupes de fractions, Publications du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon (à paraître).

[3] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Volume 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[4] DOSS (Raoul). - Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe, Bull. Sc. math., Paris, t. 72, 1948, p. 139-150.

[5] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 225, 1947, p. 787-788.

[6] FAISANT (Alain). - Sur les demi-groupes de fractions, Publications du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 6, 1969, fasc. 1, p. 73-85.

[7] FAISANT (Alain). - Immersion d'un demi-groupe dans un groupe, Séminaire P. Lefebvre, Lyon, 1970/71, n° 17-18.

[8] FAISANT (Alain). - Extension des ordres partiels aux demi-groupes de fractions, Séminaire P. Lefebvre, Lyon, 1970/71, n° 3 et 5.

[9] GABRIEL (P.) and ZISMAN (M.). - Calculus of fractions and homotopy theory. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Ergebnisse der Mathematik, 35).

[10] McKNIGHT (J. D.) and STOREY (A. J.). - Equidivisible semigroups, J. of Algebra, t. 12, 1969, p. 24-48.

[11] PABION (Jean-François). - Problèmes d'immersion en algèbre, Séminaire P. Lefebvre, Lyon, 1970/71, n° 14.

(Texte reçu le 24 juin 1971)

Alain FAISANT
Université de Lyon
Mathématiques 2e cycle
43 boulevard du 11 novembre 1918
69 - VILLEURBANNE