

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MARIO PETRICH

## **L'enveloppe de translations d'un demi-treillis de groupes**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 11,  
p. 1-16

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1970-1971\\_\\_24\\_1\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A9_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## L'ENVELOPPE DE TRANSLATIONS D'UN DEMI-TREILLIS DE GROUPES

par Mario PETRICH

### 1. Introduction et sommaire.

L'enveloppe de translations d'un demi-groupe présente un intérêt particulier pour les deux raisons suivantes : d'une part, elle apparaît d'une façon naturelle dans la construction des extensions idéales des demi-groupe, et d'autre part, elle est souvent utilisée pour des caractérisations abstraites des demi-groupe. Afin de l'appliquer aux problèmes particuliers, il est important de fournir des constructions qui, pour un demi-groupe donné sous une forme ou une autre, soient aussi explicites que possible. Un exemple d'une telle construction est celle de l'enveloppe de translations d'un demi-groupe de matrices de Rees (voir [4]) et ses nombreuses applications ([5], [6], [7], [8]). Pour les demi-groupe appartenant à une classe plus large et dont la structure n'est pas connue en détails, il n'est pas possible de trouver une construction explicite, mais on peut au moins espérer déterminer si, par exemple, l'enveloppe de translations reste dans la même classe de demi-groupe, et d'en établir autant de propriétés que possible. Un théorème de Ponizovski donne un exemple de cette situation (PONIZOVSKI [10]) : il affirme que l'enveloppe de translations d'un demi-groupe inverse est un demi-groupe inverse.

Nous rencontrerons ici des exemples des deux espèces. Dans le paragraphe 3, pour un demi-treillis de groupe donné sous la forme de la construction de Clifford (voir [1], theorem 4.11), nous construisons son enveloppe de translations par un procédé qui généralise la construction de la limite inverse d'un ensemble filtrant inférieurement de groupe, ce qui donne un exemple du premier type mentionné ci-dessus. Dans le paragraphe 4, nous traitons le cas particulier d'un demi-groupe régulier, produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe, et nous montrons que son enveloppe de translation a la même propriété. Le paragraphe 5 fournit un exemple du deuxième type évoqué ci-dessus : nous étudions l'enveloppe de translation d'un demi-groupe commutatif séparatif. Dans tous les cas considérés, nous immergeons de façon dense les demi-groupe étudiés dans certains demi-groupe ayant une structure plus simple. Cela ajoute de nouveaux exemples d'immersions denses des demi-groupe réguliers.

## 2. Rappel des définitions.

Soit  $S$  un demi-groupe, et soient  $x$  et  $y$  des éléments quelconques de  $S$ . Une application  $\lambda$  de  $S$  dans lui-même, écrite à gauche, est une translation à gauche de  $S$ , si  $\lambda(xy) = (\lambda x)y$ ; de façon duale,  $\rho$  est une translation à droite de  $S$ , si  $(xy)\rho = x(y\rho)$ ; la paire  $(\lambda, \rho)$  est liée, si  $x(\lambda y) = (x\rho)y$ . Les translations à gauche forment un demi-groupe  $\Lambda(S)$  relativement à la composition des applications écrites à gauche; de façon duale, les translations à droite forment un demi-groupe  $\underline{P}(S)$  pour la composition des applications écrites à droite; le sous-demi-groupe du produit direct  $\Lambda(S) \times \underline{P}(S)$ , qui est constitué des paires de translations liées, est l'enveloppe de translations de  $S$ , notée  $\Omega(S)$ . Pour un élément  $a$  de  $S$ , les applications  $\lambda_a$  et  $\rho_a$ , définies par  $\lambda_a x = ax$ ,  $x\rho_a = xa$ , sont des translations internes à gauche et à droite, respectivement, engendrées par l'élément  $a$ . L'ensemble  $\Pi(S) = \{(\lambda_a, \rho_a) \mid a \in S\}$  est un idéal de  $\Omega(S)$ , appelé la partie interne de  $\Omega(S)$ . Le groupe des unités de  $\Omega(S)$  sera noté  $\Sigma(S)$ , le demi-groupe des translations à gauche internes par  $\Gamma(S)$ .

Si  $I$  est un idéal de  $S$ , on appelle  $S$  une extension (idéale) de  $I$ ; cette extension est dite dense, si l'égalité est la seule congruence sur  $S$  dont la restriction à  $I$  est l'égalité sur  $I$ ; si, de plus,  $S$  est une extension maximale (pour l'ordre de l'inclusion des ensembles) de  $I$ , alors  $I$  est appelé un idéal densément immergé de  $S$ . Un sous-demi-groupe  $A$  de  $S$  est un sous-demi-groupe densément immergé, si  $A$  est un idéal densément immergé de son idéalisateur  $i_S(A)$  dans  $S$ . Remarquons que  $i_S(A) = \{s \in S \mid as, sa \in A \text{ pour tout } a \in A\}$ . Un isomorphisme  $\varphi$  d'un demi-groupe  $B$  sur un demi-groupe  $A$  densément immergé dans un demi-groupe  $S$  est une immersion dense de  $A$  dans  $S$ , et on dit que  $S$  peut être densément immergé dans  $S$ .

Pour toutes les définitions et notations non expliquées, nous renvoyons le lecteur au mémoire [1]. Pour les extensions idéales, on peut consulter [3], et pour les idéaux densément immergés, [2].

## 3. Demi-treillis de groupes.

Selon la construction de Clifford ([1], theorem 4.11), un tel demi-groupe peut être donné par un système de groupes  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ , deux à deux disjoints, indexés par un demi-treillis  $Y$  et un système d'homomorphismes  $\varphi_{\alpha, \beta} : G_\alpha \rightarrow G_\beta$ , pour tout couple  $\alpha \geq \beta$  d'éléments de  $Y$ , satisfaisant aux conditions:  $\varphi_{\alpha, \alpha}$  est l'application identique,  $\varphi_{\alpha, \beta} \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\alpha, \gamma}$  dès que  $\alpha > \beta > \gamma$ , et dont la multiplication est donnée par

$$a \star b = (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta}), \quad \text{si } a \in G_\alpha, \quad b \in G_\beta.$$

Notons  $S = [Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ , et désignons par  $e_\alpha$  l'élément unité de  $G_\alpha$ .

Soit  $Y$  un demi-treillis. Le demi-treillis des idéaux de  $Y$  (demi-groupe pour l'opération intersection ensembliste) sera noté  $\mathfrak{I}_Y$ . Un idéal  $I$  de  $Y$  est un idéal rétracté, s'il existe un homomorphisme  $\varphi$  de  $Y$  sur  $I$  qui laisse les éléments de  $I$  invariants ; leur ensemble sera noté  $\mathcal{R}_Y$ . L'idéal principal engendré par un élément  $\alpha$  de  $Y$  sera noté  $(\alpha)$ , et leur ensemble sera noté  $\mathcal{P}_Y$ .

Soit  $S = [Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$  un demi-treillis de groupes ; pour tout  $I \in \mathfrak{I}_Y$ , posons

$$\text{inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y} = \{(g_\alpha) \in \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \mid g_\alpha = g_\beta \varphi_{\beta,\alpha} \text{ si } \alpha < \beta\},$$

avec la multiplication par coordonnées, et posons

$$\text{Inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y} = \bigcup_{I \in \mathfrak{I}_Y} \text{inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in I},$$

avec la multiplication

$$(a_\alpha)_{\alpha \in I} (b_\beta)_{\beta \in J} = (a_\gamma b_\gamma)_{\gamma \in I \cap J}.$$

$\text{Inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$  sera dite la limite inverse de  $S = [Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ .

Le résultat principal de ce paragraphe exprime le fait que l'enveloppe de translations de  $S$  est isomorphe à un sous-demi-groupe, que nous caractériserons, de  $\text{Inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ . Toutes les notations introduites sont fixées pour tout le paragraphe.

LEMME 1. - Pour tout  $I \in \mathfrak{I}_Y$ ,  $\text{inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$  est un groupe, et

$$\text{Inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y} \simeq [\mathfrak{I}_Y ; \text{inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}, \psi_{I,J}],$$

où, pour tout  $I \supseteq J$ ,

$$(a_\alpha)_{\alpha \in I} \psi_{I,J} = (a_\alpha)_{\alpha \in J}.$$

Démonstration. - La première assertion est bien connue. Pour la deuxième, il suffit de remarquer que la construction de  $\text{Inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$  entraîne immédiatement que c'est un demi-groupe demi-treillis  $\mathfrak{I}_Y$  de groupes  $\text{inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , dont la multiplication est déterminée par les homomorphismes  $\psi_{I,J}$ .

LEMME 2. - L'ensemble des translations à gauche (ou à droite) d'un demi-treillis  $Y$  coïncide avec l'ensemble des endomorphismes de  $Y$  sur ses idéaux. Un tel idéal  $I$  est caractérisé par la propriété suivante : l'intersection de  $I$  avec tout idéal principal de  $Y$  est un idéal principal de  $Y$ . De plus,  $I$  détermine la

translation (endomorphisme)  $\lambda$  définie par la relation  $I \cap (\alpha) = (\lambda\alpha)$  pour tout  $\alpha \in Y$ , et la correspondance  $\lambda \rightarrow I$  est un isomorphisme de  $\Lambda(S)$  sur  $\mathcal{R}_Y$ .

Démonstration. - Voir [9], propositions 1 et 3.

La propriété évoquée peut donc être prise comme définition d'un idéal rétracté de  $Y$ . Les idéaux principaux en sont un cas particulier.

THÉORÈME 1. - Notons  $A = \text{Inv} \lim_{\alpha \in Y} \{G_\alpha\}$ . La fonction  $\sigma$ , définie sur  $\Lambda(S)$  par

$$(1) \quad \sigma : \lambda \rightarrow (\lambda e_\alpha)_{\alpha \in I}, \quad \text{où } I = \{\alpha \in Y \mid \lambda S \cap G_\alpha \neq \emptyset\},$$

est un isomorphisme de  $\Lambda(S)$  dans  $A$ . De plus,

$$(2) \quad \Gamma(S)\sigma = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in A \mid I \in \mathcal{R}_Y\},$$

$$(3) \quad \Lambda(S)\sigma = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in A \mid I \in \mathcal{R}_Y\} = i_A(\Gamma(S)\sigma).$$

Démonstration. - Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $G_\alpha$ . Si  $\lambda x \in G_\gamma$  et  $\lambda y \in G_\delta$ , les égalités  $\lambda x = \lambda(y\gamma^{-1}x) = (\lambda y)(\gamma^{-1}x)$  entraînent  $\gamma \leq \delta$ ; par symétrie, on a  $\delta \leq \gamma$ , et par suite  $\gamma = \delta$ . Notant  $x \rightarrow \bar{x}$  l'homomorphisme canonique de  $S$  sur  $Y$ , nous pouvons définir une fonction  $\bar{\lambda}$  sur  $Y$  par  $\bar{\lambda}\bar{x} = \overline{\lambda x}$ . En particulier,

$$\bar{\lambda}(\overline{xy}) = \overline{\lambda xy} = \overline{(\lambda x)y} = \overline{(\lambda x)}y = \bar{\lambda}\bar{x}y = (\bar{\lambda}\bar{x})\bar{y},$$

ce qui montre que  $\bar{\lambda} \in \Lambda(Y)$ . D'après le lemme 2,  $\bar{\lambda}$  est complètement déterminée par l'idéal rétracté  $I = \bar{\lambda}Y$ , et, de plus,  $I$  coïncide avec  $I$  définie dans (1), et la restriction  $\bar{\lambda}|_I$  est la fonction identité. Il en résulte que  $\lambda e_\alpha \in G_\alpha$  pour tout  $\alpha \in I$ , et si  $\alpha < \beta$ , on a

$$\lambda e_\alpha = \lambda(e_\beta \star e_\alpha) = (\lambda e_\beta) \star e_\alpha = (\lambda e_\beta) \varphi_{\beta, \alpha},$$

ce qui montre que  $\sigma$  est une fonction de  $S$  dans  $A$ .

Soient  $\lambda, \mu \in \Lambda(S)$ . Avec les notations ci-dessus, on a  $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \Lambda(Y)$  et  $(\bar{\lambda}\bar{\mu})Y = \bar{\lambda}Y \cap \bar{\mu}Y$ . En posant  $\lambda\sigma = (c_\alpha)_{\alpha \in I}$  et  $\mu\sigma = (d_\alpha)_{\alpha \in J}$ , et supposant que  $e_\alpha \in \lambda\mu S$ , on en déduit

$$(\lambda\mu)e_\alpha = \lambda(\mu e_\alpha) = \lambda d_\alpha = \lambda(e_\alpha \star d_\alpha) = (\lambda e_\alpha) \star d_\alpha = c_\alpha \star d_\alpha,$$

ce qui signifie que  $\sigma$  est un homomorphisme.

Soit  $\lambda\sigma = \mu\sigma = (c_\alpha)_{\alpha \in I}$ , et soit  $a \in G_\alpha$ . En vertu du lemme 2, on a  $I \cap (\alpha) = (\bar{\lambda}\alpha) = (\bar{\mu}\alpha)$  pour tout  $\alpha \in Y$ . Donc

$$\lambda a = \lambda(e_\alpha \star a) = (\lambda e_\alpha) \star a = (\lambda e_{\bar{\lambda}\alpha}) \star a = (\mu e_{\bar{\mu}\alpha}) \star a = (\mu e_\alpha) \star a = \mu(e_\alpha \star a) = \mu a,$$

ce qui montre que  $\sigma$  est une fonction injective.

Pour  $a \in G_\alpha$ , on voit sans peine que  $\bar{\lambda}_a = (\alpha)$ , idéal principal engendré par  $\alpha$ , ce qui entraîne  $\lambda\sigma = (c_\beta)_{\beta \in (\alpha)}$ . Inversement, si  $(a_\beta)_{\beta \in (\alpha)} \in A$ , on a, pour tout  $S \leq \alpha$ ,

$$a_\beta = a_\alpha \varphi_{\alpha, \beta} = a_\alpha \star e_\beta = a_\alpha e_\alpha \star e_\beta = (\lambda_{a_\alpha} e_\alpha) \star e_\beta = \lambda_{a_\alpha} (e_\alpha \star e_\beta) = \lambda_{a_\alpha} e_\beta,$$

ce qui implique que  $\lambda_{a_\alpha} \sigma = (a_\beta)_{\beta \in (\alpha)}$ . Ceci établit la formule (2).

Nous avons remarqué ci-dessus que, pour  $\lambda\sigma = (a_\alpha)_{\alpha \in I}$ , on a toujours  $I \in \mathcal{R}_Y$ , ce qui montre que le premier ensemble de (3) est contenu dans le second. Soient  $(a_\gamma)_{\gamma \in I} \in A$  avec  $I \in \mathcal{R}_Y$ , et  $(b_\beta)_{\beta \in (\alpha)} \in \Gamma(S)\sigma$ . On obtient

$$(a_\gamma)_{\gamma \in I} (b_\beta)_{\beta \in (\alpha)} = (a_\delta b_\delta)_{\delta \in I \cap (\alpha)};$$

or, d'autre part, en vertu du lemme 2, on a  $I \cap (\alpha) = (\varepsilon)$  pour un  $\varepsilon$  dans  $Y$ , ce qui entraîne  $(a_\delta b_\delta)_{\delta \in (\varepsilon)} \in \Gamma(S)\sigma$ , d'après (2). On voit de la même façon que le produit  $(b_\beta)_{\beta \in (\alpha)} (a_\gamma)_{\gamma \in I}$  est aussi contenu dans  $\Gamma(S)\sigma$ . Par conséquent  $(a_\gamma)_{\gamma \in I} \in i_A(\Gamma(S)\sigma)$ , et le second ensemble de (3) est contenu dans le troisième.

Soit enfin  $(c_\gamma)_{\gamma \in I} \in i_A(\Gamma(S)\sigma)$ . Pour tout  $\alpha \in Y$ , le produit  $(c_\gamma)_{\gamma \in I} (e_\beta)_{\beta \in (\alpha)}$  est contenu dans  $\Gamma(S)\sigma$ , et par conséquent  $I \cap (\alpha)$  est un idéal principal de  $Y$ , et le lemme 2 implique que  $I \in \mathcal{R}_Y$ . Définissons une fonction  $\lambda$  sur  $S$  par

$$(4) \quad \lambda a = c_\gamma \star a, \quad \text{si } a \in G_\alpha \text{ et } I \cap (\alpha) = (\gamma).$$

Il est évident que la fonction  $\bar{\lambda}$ , définie ci-dessus pour  $\lambda \in \Lambda(S)$ , peut s'appliquer ici aussi, et donne  $I \cap (\alpha) = (\bar{\lambda}\alpha)$ . On en déduit que  $\lambda a = c_{\bar{\lambda}\alpha} \star a$  si  $a \in G_\alpha$ . Par conséquent, pour tout  $a \in G_\alpha$ ,  $b \in G_\beta$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda a) \star b &= (c_{\bar{\lambda}\alpha} \star a) \star b = (c_{\bar{\lambda}\alpha} \varphi_{\bar{\lambda}\alpha, (\bar{\lambda}\alpha)\beta}) (a \varphi_{\alpha, (\bar{\lambda}\alpha)\beta}) (b \varphi_{\beta, (\bar{\lambda}\alpha)\beta}) \\ &= c_{\bar{\lambda}(\alpha\beta)} [ (a \varphi_{\alpha, \alpha\beta}) (b \varphi_{\beta, \alpha\beta}) ] \varphi_{\alpha\beta, \bar{\lambda}(\alpha\beta)} = \lambda(a \star b), \end{aligned}$$

ce qui implique  $\lambda \in \Lambda(S)$ . D'après (4), il est clair que  $\lambda\sigma = (c_\gamma)_{\gamma \in I}$ , et on a bien  $i_A(\Gamma(S)\sigma) \subseteq \Lambda(S)\sigma$ . Ceci démontre la formule (3), et achève la démonstration du théorème.

Nous pouvons maintenant énoncer un des principaux résultats de ce travail.

**THÉORÈME 2.** - Soit  $S = [Y; G_\alpha, \varphi_{\alpha, \beta}]$  un demi-treillis de groupes. La fonction  $\chi$ , définie sur  $S$  par

$$\chi : a \rightarrow (a \varphi_{\alpha, \beta})_{\beta \leq \alpha}, \quad \text{si } a \in G_\alpha, \quad \alpha \in Y,$$

est une immersion dense de  $S$  dans  $A = \text{Inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ . De plus,

$$(5) \quad \Omega(S) \simeq \underline{P}(S) \simeq \Lambda(S) \simeq [\mathcal{R}_Y ; \text{inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in I} , \psi_{I,J}] ,$$

où  $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \psi_{I,J} = (a_\alpha)_{\alpha \in J}$  si  $I \supseteq J$ , et

$$(6) \quad S_X = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in A \mid I \in \mathcal{P}_Y\} , \quad \Sigma(S) \simeq \text{inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y} .$$

Démonstration. - Montrons d'abord que, pour toute translation à gauche  $\lambda$  de  $S$ , il existe une translation à droite  $\rho$  de  $S$  liée à  $\lambda$ . Soit  $\lambda \in \Lambda(S)$ , et soit  $\lambda\sigma = (c_\gamma)_{\gamma \in I}$  avec la notation du théorème précédent, de telle façon que  $\lambda$  peut être donnée sous la forme (4). Définissons  $\rho$  par

$$a\rho = a \star c_\gamma , \quad \text{si } a \in G_\alpha \text{ et } I \cap (\alpha) = (\gamma) .$$

Comme pour  $\lambda$ , on montre ici que  $\rho$  est une translation à droite de  $S$ . De plus, pour  $a \in G_\alpha$ ,  $b \in G_\beta$ , et  $I \cap (\alpha) = (\gamma)$ ,  $I \cap (\beta) = (\delta)$ , on obtient

$$(\alpha\delta) = (\alpha) \cap (\varepsilon) = (\alpha) \cap (I \cap (\beta)) = (I \cap (\alpha)) \cap (\beta) = (\gamma) \cap (\beta) = (\gamma\beta) ,$$

ce qui implique  $\alpha\delta = \gamma\beta$ . On en déduit que  $c_\delta \varphi_{\delta, \alpha\delta} = c_\gamma \varphi_{\gamma, \gamma\beta}$ , d'où

$$\begin{aligned} a \star (\lambda b) &= a \star c_\delta \star b = (a\rho_{\alpha, \alpha\delta})(c_\delta \varphi_{\delta, \alpha\delta})(b\varphi_{\beta, \alpha\delta}) = (a\rho_{\alpha, \gamma\beta})(c_\gamma \varphi_{\gamma, \gamma\beta})(b\varphi_{\beta, \gamma\beta}) \\ &= a \star c_\gamma \star b = (a\rho) \star b , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $\lambda$  et  $\rho$  sont liées.

Par symétrie, toute translation à droite est liée à une translation à gauche. D'autre part, il est clair que  $S$  est un demi-groupe réductif, ce qui entraîne que les projections de  $\Omega(S)$  dans  $\Lambda(S)$  et dans  $\underline{P}(S)$  sont des isomorphismes de  $\Omega(S)$  sur  $\Lambda(S)$  et  $\underline{P}(S)$ , respectivement. Nous avons vu, dans le théorème précédent, que  $\Lambda(S)$  est isomorphe à  $\{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in A \mid I \in \mathcal{R}_Y\}$ ; il est facile de voir que ce dernier est isomorphe au dernier demi-groupe de (5). Ceci complète la démonstration de (5).

Si  $a \in G_\alpha$ , on a, avec la notation du théorème précédent,

$$\lambda_a \sigma = (\lambda_a e_\beta)_{\beta \leq \alpha} = (a \star e_\beta)_{\beta \leq \alpha} = (a\rho_{\alpha, \beta}) .$$

Par conséquent, la fonction  $\chi$ , dans l'énoncé du théorème, est la composition de l'isomorphisme  $\nu : a \rightarrow \lambda_a$  de  $S$  sur  $\Gamma(S)$  et de  $\sigma$  restreinte à  $\Gamma(S)$ . Le fait, démontré au début de la démonstration, que la projection de  $\Omega(S)$  dans  $\Lambda(S)$  est un isomorphisme de  $\Omega(S)$  sur  $\Lambda(S)$ , entraîne que  $\Gamma(S)$  est un idéal densément immergé de  $\Lambda(S)$ , d'après [2], 1.3.5. En vertu de l'isomorphisme  $\sigma$ ,  $\Gamma(S)\sigma = S_X$  est un idéal densément immergé de  $i_A(S_X)$ , ce qui, par définition,

implique que  $S_\chi$  est un sous-demi-groupe dense de  $A$  ; et, par suite,  $\chi$  est une immersion dense de  $S$  dans  $A$  .

La première formule de (6) découle du théorème précédent et du fait que  $\Gamma(S)\sigma = S_\chi$  ; la dernière formule est, à présent, évidente.

**COROLLAIRE.** - Si  $S$  est un demi-treillis de groupes,  $\Omega(S)$  l'est aussi.

#### 4. Demi-groupes réguliers, produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe.

Soit  $S$  un sous-demi-groupe du produit direct  $Y \times G$ , où  $Y$  est un demi-treillis, et  $G$  un groupe, tel que les projections de  $S$  dans  $Y$  et dans  $G$  sont surjectives. Pour tout  $\alpha \in Y$ , posons  $G_\alpha = \{g \in G \mid (\alpha, g) \in S\}$ . On voit sans peine que la fonction  $\eta$  qui, à tout  $\alpha \in Y$ , associe l'ensemble  $G_\alpha$ , est une fonction antitone du demi-treillis  $Y$  dans le treillis  $\mathcal{L}(G)$  des sous-groupes de  $G$ , et que  $\bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha = G$ . Posons  $\alpha\eta = G_\alpha$  ; remarquons aussi que

$$S = \{(\alpha, g) \in Y \times G \mid g \in \alpha\eta\} ,$$

et notons  $S = (Y, \eta, G)$ . Il est clair que  $S$  est un demi-treillis de groupes, et nous pouvons utiliser les résultats antérieurs concernant l'enveloppe de translations de  $S$ . Il faut d'abord noter qu'il suffit de considérer les translations d'un côté seulement, par exemple les translations à gauche.

Soit  $\lambda \in \Lambda(S)$  ; définissons les fonctions  $\tau$  et  $\theta$  par la formule

$$(7) \quad \lambda(\alpha, g) = (\tau(\alpha, g), \theta(\alpha, g)) \quad ((\alpha, g) \in S) .$$

Pour tout  $(\alpha, g), (\beta, h) \in S$ , on a

$$[\lambda(\alpha, g)](\beta, h) = (\tau(\alpha, g), \theta(\alpha, g))(\beta, h) = (\tau(\alpha, g)\beta, \theta(\alpha, g)h) ,$$

$$\lambda[(\alpha, g)(\beta, h)] = \lambda(\alpha\beta, gh) = (\tau(\alpha\beta, gh), \theta(\alpha\beta, gh)) ,$$

d'où

$$(8) \quad \tau(\alpha, g)\beta = \tau(\alpha\beta, gh) \quad ((\alpha, g), (\beta, h) \in S) ,$$

$$(9) \quad \theta(\alpha, g)h = \theta(\alpha\beta, gh) \quad ((\alpha, g), (\beta, h) \in S) .$$

Si  $(\alpha, g), (\alpha, h) \in S$ , on a aussi  $(\alpha, h^{-1}g) \in S$ , et, d'après (8), il vient

$$\tau(\alpha, g) = \tau(\alpha, h(h^{-1}g)) = \tau(\alpha, h)\alpha = \tau(\alpha, h1) = \tau(\alpha, h) ,$$

où 1 est l'élément unité de  $G$ . Nous pouvons donc écrire  $\tau(\alpha, g) = \tau\alpha$ , et considérer  $\tau$  comme une application de  $Y$  dans lui-même. La formule (8) entraîne de plus que  $\tau \in \Lambda(Y)$ . Si  $(\alpha, g), (\beta, g) \in S$ , on a  $(\beta, 1) \in S$ , et en appliquant (9) aux couples  $(\alpha, g), (\beta, 1)$ , on obtient  $\theta(\alpha, g) = \theta(\alpha\beta, g)$ . Par symétrie, on a aussi  $\theta(\beta, g) = \theta(\alpha\beta, g)$ , d'où  $\theta(\alpha, g) = \theta(\beta, g)$ . Par

conséquent, on peut écrire  $\theta(\alpha, g) = \theta g$ , et considérer  $\theta$  comme une application de  $G$  dans lui-même. De plus, la formule (9) implique que  $\theta \in \Lambda(G)$ .

En vertu du lemme 2, à  $\tau \in \Lambda(Y)$  on peut associer l'idéal rétracté  $\tau Y = I$  de  $Y$ ; en ce qui concerne  $\theta \in \Lambda(G)$ , on a  $\theta = \lambda_a$ , où  $a = \theta 1$ . Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

**THÉORÈME 3.** - Notons  $B = \mathfrak{J}_Y \times G$ . La fonction  $\xi$ , définie sur  $\Lambda(S)$  par

$$\xi : \lambda \rightarrow (I, a), \quad \text{où } I \text{ et } a \text{ sont définis ci-dessus,}$$

est un isomorphisme de  $\Lambda(S)$  dans  $B$ . De plus,

$$(10) \quad \Gamma(S)\xi = \{((\alpha), a) \in B \mid (\alpha, a) \in S\},$$

$$(11) \quad \Lambda(S)\xi = \{(I, a) \in B \mid I \in \mathcal{R}_Y, a \in \bigcap_{\alpha \in I} \alpha\eta\} = i_B(\Gamma(S)\xi).$$

Démonstration. - Remarquons d'abord que la formule (7) peut s'écrire

$$(12) \quad \lambda(\alpha, g) = (\tau\alpha, \theta g) = (\beta, ag) \quad ((\alpha, g) \in S),$$

où  $\tau \in \Lambda(Y)$ ,  $\theta \in \Lambda(G)$ , et  $I \cap (\alpha) = (\beta)$ ,  $a \in G$ . Il est clair que  $\xi$  est la composition des isomorphismes  $\lambda \rightarrow (\tau, \theta) \rightarrow (I, a)$ , et est par conséquent un isomorphisme de  $\Lambda(S)$  dans  $B$ . Pour tout  $(\alpha, a), (\beta, g) \in S$ , on a

$$\lambda_{(\alpha, a)}(\beta, g) = (\alpha, a)(\beta, g) = (\alpha\beta, ag) = (\gamma, ag), \quad \text{où } (\alpha) \cap (\theta) = (\gamma),$$

ce qui, d'après (12), entraîne que  $\lambda_{(\alpha, a)} \xi = ((\alpha), a)$ ; ceci démontre (10).

Soit  $\lambda \in \Lambda(S)$ , et  $\lambda\xi = (I, a)$ . Dans la construction de  $I$  ci-dessus, nous avons vu que  $I = \tau Y$ , où  $\tau \in \Lambda(Y)$ , ce qui, d'après le lemme 2, entraîne que  $I \in \mathcal{R}_Y$ . Soit  $\alpha \in I$ ; l'égalité  $I = \tau Y$  montre aussi que  $\tau\alpha = \alpha$ . Rappelons que, dans (12), on a  $a = \theta 1$ . D'autre part,  $(\alpha, 1) \in S$  pour tout  $\alpha \in Y$ . Il s'ensuit que, pour  $\alpha \in I$ , l'appartenance de  $\lambda(\alpha, 1) = (\tau\alpha, \theta 1)$  à  $S$  implique  $(\alpha, a) \in S$ , c'est-à-dire que  $a \in \alpha\eta$ . Ceci montre que le premier ensemble de (11) est contenu dans le second.

Considérons  $(I, a) \in B$ , où  $I \in \mathcal{R}_Y$  et  $a \in \bigcap_{\gamma \in I} \gamma\eta$ , et prenons  $((\alpha), g) \in \Gamma(S)\xi$ . On a  $(I, a)((\alpha), g) = ((\beta), ag)$ , où  $I \cap (\alpha) = (\beta)$ . En vertu de (10), on sait que  $(\alpha, g) \in S$ , d'où  $g \in \alpha\eta$ . Puisque  $\beta \leq \alpha$ , l'antitonicité de  $\eta$  entraîne que  $g \in \beta\eta$ . D'autre part,  $a \in \beta\eta$ , parce que  $\beta \in I$ , et on en déduit que  $ag \in \beta\eta$ , ce qui implique  $(\beta, ag) \in S$ . D'après (10), cela donne  $((\beta), ag) \in \Gamma(S)\xi$ , et par conséquent  $(I, a)((\alpha), g) \in \Gamma(S)\xi$ . On montre de façon analogue que  $((\alpha), g)(I, a) \in \Gamma(S)\xi$ . Il en résulte que le second ensemble de (11) est contenu dans le troisième.

Soit enfin  $(I, a) \in i_B(\Gamma(S)\xi)$ ; définissons une application  $\lambda$  sur  $S$  par

$$\lambda(\alpha, g) = (\beta, ag), \quad \text{si } (I, a)((\alpha), g) = ((\beta), ag) .$$

En utilisant (12), on vérifie sans difficulté que  $\lambda \in \Lambda(S)$  et  $\lambda\xi = (I, a)$ , ce qui montre que le troisième ensemble de (11) est contenu dans le premier.

Le résultat principal de ce paragraphe est alors le suivant.

**THÉORÈME 4.** - Soit  $S = (Y, \eta, G)$  un demi-groupe régulier, produit sous-direct d'un demi-treillis  $Y$  et d'un groupe  $G$ . La fonction  $\psi$ , définie sur  $S$  par

$$\psi : (\alpha, g) \rightarrow ((\alpha), g) ,$$

est une immersion dense de  $S$  dans le produit direct  $\mathfrak{A}_Y \times G$ . De plus,  $\Omega(S)$  est un demi-groupe régulier, produit sous-direct du demi-treillis  $\mathcal{R}_Y$  et du groupe  $G$ , et

$$\Omega(S) \simeq (\mathcal{R}_Y, \bar{\eta}, G), \quad \Sigma(S) \simeq \bigcap_{\alpha \in Y} \alpha\eta ,$$

où  $I\bar{\eta} = \bigcap_{\alpha \in I} \alpha\eta$  pour tout  $I \in \mathcal{R}_Y$ .

Démonstration. - La première assertion découle du théorème précédent, de la même manière que la première assertion du théorème 2 résulte du théorème 1.

D'après le théorème 1,  $\Omega(S) \simeq \Lambda(S)$  est un demi-treillis de groupes. Pour tout  $I \in \mathcal{R}_Y$ , la formule (11) entraîne que  $(I, 1) \in \Lambda(S)\xi$ . D'autre part, si  $a \in G$ , il existe  $\alpha \in Y$  tel que  $(\alpha, g) \in S$ , ce qui, d'après (10), implique que  $((\alpha), a) \in \Gamma(S)\xi \subseteq \Lambda(S)\xi$ . Il s'ensuit que  $\Lambda(S)\xi$  est un demi-groupe régulier, produit sous-direct de  $\mathcal{R}_Y$  et  $G$ . La construction du début de ce paragraphe est donc applicable à  $\Lambda(S)\xi$ , et donne  $\Lambda(S)\xi = [\mathcal{R}_Y, \bar{\eta}, G]$ , où  $I\bar{\eta} = \bigcap_{\alpha \in I} \alpha\eta$  pour tout  $I \in \mathcal{R}_Y$ , d'après (11), ce qui implique  $\Lambda(S) \simeq [\mathcal{R}_Y, \bar{\eta}, G]$ .

Le dernier isomorphisme résulte directement de (11); en effet, un élément  $(I, a)$  de  $\Lambda(S)\xi$  est inversible si, et seulement si,  $I = Y$ .

**COROLLAIRE 1.** - Pour tout demi-treillis  $Y$ , et tout groupe  $G$ , on a

$$\Omega(Y \times G) \simeq \mathcal{R}_Y \times G .$$

Démonstration. - Le cas  $S = Y \times G$ , dans la formule (11), donne  $\Lambda(S)\xi = \mathcal{R}_Y \times G$ .

**COROLLAIRE 2.** - Si  $S$  est un demi-groupe régulier, produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe,  $\Omega(S)$  l'est aussi.

Ce corollaire peut se déduire directement du théorème 2, si on remarque que, dans le cas où tout homomorphisme  $\varphi_{\alpha, \beta}$  est injectif, tout homomorphisme  $\varphi_{I, J}$  l'est aussi, d'après la propriété suivante : le demi-treillis de groupes  $[Y; G_\alpha, \varphi_{\alpha, \beta}]$

est produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe si, et seulement si, tous les homomorphismes  $\varphi_{\alpha, \beta}$  sont injectifs ; nous ne le démontrerons pas ici.

### 5. Demi-groupes commutatifs séparatifs.

Nous utiliserons d'abord quelques résultats de [1], § 4.3. Soit  $S$  un demi-groupe commutatif séparatif ; écrivons  $S$  comme réunion de ses composantes archimédiennes  $S_\alpha$  avec  $\alpha \in Y$ . Posons

$$F = \{(a, b) \in S \times S \mid a, b \in S_\alpha \text{ pour un } \alpha \in Y\},$$

avec la multiplication  $(a, b)(c, d) = (ab, cd)$ , et définissons une relation binaire  $\tau$  dans  $F$  par  $(a, b) \tau (c, d)$  si, et seulement si,  $a, c \in S_\alpha$  pour un  $\alpha \in Y$  et  $ad = bc$ . Alors  $\tau$  est une congruence sur  $F$ , et le demi-groupe quotient  $Q = F/\tau$  sera appelé le demi-groupe des fractions de  $S$ . En effet, notant par  $[a, b]$  la classe de  $\tau$  contenant  $(a, b)$ , la fonction  $\omega$ , définie sur  $S$  par  $a\omega = [a^2, a]$ , est une immersion de  $S$  dans  $Q$ . De plus,  $Q \simeq [Y; G_\alpha, \varphi_{\alpha, \beta}]$ , qui est un demi-treillis de groupes, avec le même demi-treillis  $Y$ ,  $G_\alpha$  étant le groupe des fractions de  $S_\alpha$ , et avec  $\varphi_{\alpha, \beta}$  définie par  $[a, b]\varphi_{\alpha, \beta} = [ac, bc]$  pour  $[a, b] \in G_\alpha$ ,  $c \in S_\beta$ ,  $\alpha \geq \beta$ . L'objet de ce paragraphe est d'abord de plonger  $\Lambda(S)$  dans  $\Lambda(Q)$ , puis d'appliquer les résultats du paragraphe 3 au demi-groupe  $Q$ . Les notations introduites resteront fixées dans le reste de ce travail.

Soit  $\lambda \in \Lambda(S)$ . Pour tout  $a \in S$ , montrons par récurrence que  $(\lambda a)^n = \lambda^n a^n$ . La formule est triviale pour  $n = 1$ , supposons qu'elle est valable pour  $n$ . On obtient

$$(\lambda a)^{n+1} = (\lambda a)(\lambda a)^n = (\lambda a)(\lambda^n a^n) = \lambda[(\lambda^n a^n)a] = \lambda(\lambda^n a^{n+1}) = \lambda^{n+1} a^{n+1}.$$

Soient  $a, b \in S_\alpha$ , on a  $a^n = bx$  et  $b^n = ay$  pour certains  $x, y \in S$  et un entier positif  $n$  qu'on peut supposer plus grand que 1. Par suite,

$$(\lambda a)^n = \lambda^n a^n = \lambda^{n-1} \lambda(bx) = \lambda^{n-1} [(\lambda b)x] = (\lambda b)(\lambda^{n-1} x),$$

et, de la même façon,  $(\lambda b)^n = (\lambda a)(\lambda^{n-1} y)$ , ce qui entraîne qu'il existe  $\beta \in Y$  tel que  $\lambda a, \lambda b \in S_\beta$ . Il s'ensuit que, pour tout  $\alpha \in Y$ , il existe  $\beta \in Y$  tel que  $\lambda S_\alpha \subseteq S_\beta$ . En particulier,  $(\lambda a)a = \lambda a^2$  entraîne  $\beta\alpha = \beta$ , d'où  $\beta \leq \alpha$ , et par suite  $(\lambda a)^2, (\lambda a)b \in S_\beta$ . Par conséquent,  $[a, b] \in G_e$  implique  $[(\lambda a)^2, (\lambda a)b] \in G_\beta$ , ce qui permet de définir la fonction  $\theta$  ci-dessous.

**THÉOREME 5.** - La fonction  $\theta$ , définie sur  $\Lambda(S)$  par

$$\theta : \lambda \rightarrow \bar{\lambda}, \quad \text{où } \bar{\lambda}[a, b] = [(\lambda a)^2, (\lambda a)b] \text{ pour tout } [a, b] \in Q,$$

est un isomorphisme de  $\Lambda(S)$  dans  $\Lambda(Q)$ , avec la propriété  $\Lambda(S)\theta = i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta)$ .

Démonstration. - Soient  $\lambda \in \Lambda(S)$ , et  $[a, b], [c, d] \in Q$ . On obtient

$$\begin{aligned} (\bar{\lambda}[a, b])[c, d] &= [(\lambda a)^2, (\lambda a)b][c^2, cd] = [(\lambda a)^2 c^2, (\lambda a)bcd] \\ &= [(\lambda(ac))^2, (\lambda(ac))bd] = \bar{\lambda}[ac, bd] = \bar{\lambda}([a, c][b, d]), \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\bar{\lambda} \in \Lambda(Q)$ . Si, de plus,  $\varphi \in \Lambda(S)$ , on calcule

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}\bar{\varphi}[a, b] &= \bar{\lambda}[(\varphi a)^2, (\varphi a)b] = [(\lambda(\varphi a))^2, (\lambda(\varphi a))(\varphi a)b] \\ &= [(\lambda\varphi a)^2, (\lambda\varphi a)(\varphi a)b] = [(\lambda\varphi a)^2, (\lambda\varphi a)b] = \bar{\lambda}\varphi[a, b], \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité se déduit de la remarque suivante : si  $a \in S_\alpha$ ,  $\varphi a \in S_\beta$ ,  $\lambda\varphi \in S_\gamma$ , on a  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ , comme nous l'avons vu ci-dessus, ce qui implique, pour tout  $c \in S_\beta$ ,

$$[a, b] = [a(ac), b(ac)] = [(ac)a, (bc)a] = [ac, bc].$$

Par conséquent,  $\theta$  est un homomorphisme de  $\Lambda(S)$  dans  $\Lambda(Q)$ . Si  $\bar{\lambda} = \bar{\varphi}$ , on obtient, pour  $[a, b] \in G_\alpha$ ,

$$[(\lambda a)^2, (\lambda a)b] = \bar{\lambda}[a, b] = \bar{\varphi}[a, b] = [(\varphi a)^2, (\varphi a)b],$$

d'où  $(\lambda a)^2 (\varphi a)b = (\lambda a)b (\varphi a)^2$ , où  $\lambda a, \varphi a \in S_\beta$  pour un certain  $\beta \leq \alpha$ . La simplifiabilité dans  $S_\beta$  entraîne  $\lambda a = \varphi a$ . Donc  $\lambda = \varphi$ , et  $\theta$  est injective.

Comme  $S$  est commutatif et réductif, la projection de  $\Omega(S)$  dans  $\Lambda(S)$  est surjective et injective. Par suite,  $\Gamma(S)$  est un idéal de  $\Lambda(S)$ , ce qui implique l'inclusion  $\Lambda(S)\theta \subseteq i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta)$ . Inversement, soit  $\varphi \in i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta)$ . Pour tout  $a \in S$ , il existe un unique  $b \in S$  tel que  $\varphi\bar{\lambda}_a = \bar{\lambda}_b$ , ce qui permet de définir une application de  $S$  dans lui-même par la formule  $\varphi\bar{\lambda}_a = \bar{\lambda}_{\lambda a}$ . Pour tout  $a, b \in S$ , on a

$$\bar{\lambda}(\lambda a)b = \bar{\lambda}_{\lambda a} \bar{\lambda}_b = \varphi\bar{\lambda}_a \bar{\lambda}_b = \varphi\bar{\lambda}_{ab} = \bar{\lambda}_{\lambda(ab)},$$

ce qui montre que  $(\lambda a)b = \lambda(ab)$ , c'est-à-dire que  $\lambda \in \Lambda(S)$ . De plus, pour tout  $[a, b] \in Q$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi[a, b] &= \varphi([a^2, a][b, b^2]) = \varphi\bar{\lambda}_a[b, b^2] = \bar{\lambda}_{\lambda a}[b, b^2] = [(\lambda_{\lambda a} b)^2, (\lambda_{\lambda a} b)b^2] \\ &= [(\lambda a)^2 b^2, (\lambda a)b^3] = [(\lambda a)^2, (\lambda a)b] = \bar{\lambda}[a, b], \end{aligned}$$

et  $\varphi = \lambda\theta \in \Lambda(\theta)$ . Par conséquent  $i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta) \subseteq \Lambda(S)\chi$ , et l'égalité est démontrée.

COROLLAIRE 1. - La fonction  $\varphi$ , définie sur  $S$  par  $\varphi : s \rightarrow \lambda_{[s^2, s]}$ , est une immersion dense de  $S$  dans  $\Lambda(Q)$ .

Démonstration. - Avec les notations introduites ci-dessus, pour  $s \in S$  et  $[a, b] \in Q$ , on obtient

$$\bar{\lambda}_s[a, b] = [(\lambda_s a)^2, (\lambda_s a)b] = [(sa)^2, (sa)b] = [s^2, s][a, b] = \lambda_{[s^2, s]}[a, b],$$

d'où  $\bar{\lambda}_s = \lambda_{[s^2, s]}$ . Il en résulte que  $S\varphi = \Gamma(S)\vartheta$ , et, en vertu du théorème précédent,  $\Lambda(S)\vartheta = i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\vartheta)$ . D'autre part,  $\Gamma(S)$  est un idéal densément immergé de  $\Lambda(S)$ , d'après [2], 1.3.5, et le fait que la projection de  $\Omega(S)$  dans  $\Lambda(S)$  est un isomorphisme de  $\Omega(S)$  sur  $\Lambda(S)$  qui applique la partie interne  $\Pi(S)$  de  $\Omega(S)$  sur  $\Gamma(S)$ . Par suite,  $S\varphi$  est un idéal densément immergé de son idéalisateur dans  $\Lambda(Q)$ . Par définition,  $\varphi$  est une immersion dense de  $S$  dans  $\Lambda(Q)$ .

COROLLAIRE 2. - Tout demi-groupe commutatif et séparatif peut être densément immergé dans l'enveloppe de translations de son demi-groupe des fractions.

Comme  $Q$  est un demi-treillis de groupes,  $\Omega(Q)$  l'est aussi, d'après le corollaire du théorème 2. Il résulte du théorème 5 que  $\Lambda(S)$  doit être commutatif et séparatif. Plus généralement, toute extension dense d'un demi-groupe commutatif séparatif est un demi-groupe commutatif séparatif, ce qu'on démontre sans difficulté.

Nous appliquerons maintenant quelques-uns des résultats du paragraphe 3 concernant les demi-treillis de groupes au demi-groupe des fractions  $Q$  de  $S$ , ce qui nous permettra d'établir une autre immersion dense des demi-groupes commutatifs séparatifs. Le résultat suivant donne les images de  $S$  dans la limite inverse relative à son demi-groupe des fractions. Nous conservons toutes les notations introduites antérieurement.

THÉORÈME 6. - Soit  $S$  un demi-groupe commutatif séparatif avec les composantes archimédiennes  $S_\alpha$ ,  $\alpha \in Y$ , et soit  $Q = [Y; G_\alpha, \omega_{\alpha, \beta}]$  son demi-groupe des fractions. En notant  $\theta$  la fonction du théorème 5 relative à  $S$ ,  $\sigma$  celle du théorème 1 relative à  $Q$ , et  $A = \text{Inv} \lim_{\alpha \in Y} \{G_\alpha\}$ , on a

$$\begin{aligned} \Gamma(S)\theta\sigma &= \{([s^2, s]_{\omega_{\gamma, \alpha}})_{\alpha \leq \gamma} \in A \mid s \in S_\gamma, \gamma \in Y\} \\ (13) \quad &= \{([c_\alpha, d_\alpha]_{\omega_{\gamma, \alpha}})_{\alpha \leq \gamma} \in A \mid c_\gamma \in d_\gamma S_\gamma, d_\gamma \in S_\gamma, \gamma \in Y\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(S)\theta\sigma &= \{([c_\alpha, d_\alpha]_{\omega_{\gamma, \alpha}})_{\alpha \in I} \in A \mid I \in \mathcal{R}_Y, c_\alpha S_\beta \subseteq d_\alpha S_\alpha \text{ si } I \cap (\beta) = (\alpha)\} \\ (14) \quad &= i_A(\Gamma(S)\theta\sigma). \end{aligned}$$

Démonstration. - Pour  $s \in S_\gamma$ , et pour tout  $a_\alpha \in S_\alpha$  avec  $\alpha \leq \gamma$ , on a

$$\lambda_s \theta \sigma = \lambda_{[s^2, s]} \sigma = ([s^2, s] [a_\alpha, a_\alpha])_{\alpha \leq \gamma} = ([s^2, s] \varphi_{\gamma, \alpha})_{\alpha \leq \gamma} .$$

Par suite, le premier ensemble dans (13) est contenu dans le second ; il est évident que celui-ci est contenu dans le troisième. Soit  $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \leq \gamma} \in A$  tel que  $c_\gamma = d_\gamma s$ , où  $s, d_\gamma \in S_\gamma$ . Pour tout  $a_\alpha \in S_\alpha$  avec  $\alpha \leq \gamma$ , on a

$$[s^2 a_\gamma, sa_\gamma] = [c_\gamma, d_\gamma] ,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} [c_\alpha, d_\alpha] &= [c_\gamma, d_\gamma] \varphi_{\gamma, \alpha} = [c_\gamma, d_\gamma] [a_\alpha, a_\alpha] = [s^2 a_\gamma, sa_\gamma] [a_\alpha, a_\alpha] \\ &= [s^2 a_\gamma a_\alpha, sa_\gamma a_\alpha] = [s^2 a_\alpha, sa_\alpha] = [s^2, s] [a_\alpha, a_\alpha] , \end{aligned}$$

ce qui entraîne  $\lambda_s \theta \sigma = ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \leq \gamma}$ . Ceci montre que le troisième ensemble de (13) est contenu dans le premier.

Afin de montrer (14), choisissons un élément quelconque  $\lambda$  dans  $\Lambda(S)$ . On a

$$(15) \quad \lambda \theta \sigma = ((\lambda \theta) [a_\alpha, a_\alpha])_{\alpha \in I} = ((\lambda a_\alpha)^2, (\lambda a_\alpha) a_\alpha)_{\alpha \in I} ,$$

où

$$(16) \quad I = \{ \alpha \in Y \mid (\lambda \theta) S \cap G_\alpha \neq \emptyset \} \in \mathcal{R}_Y \quad \text{et} \quad a_\alpha \in S_\alpha .$$

Soient  $I \cap (A) = (\alpha)$ ,  $a_\alpha \in S_\alpha$ ,  $b \in S_\beta$ . Nous avons vu, dans la démonstration du théorème 1, qu'alors  $(\lambda \theta) [b^2, b] \in G_\alpha$ , donc  $\lambda b \in S_\alpha$ , ce qui implique

$$(\lambda a_\alpha)^2 b = (\lambda a_\alpha) (\lambda a_\alpha) b = (\lambda a_\alpha) a_\alpha (\lambda b) \in (\lambda a_\alpha) a_\alpha S_\alpha ,$$

et par suite  $(\lambda a_\alpha)^2 S_\beta \subseteq (\lambda a_\alpha) a_\alpha S_\alpha$ . Ceci, en conjonction avec (15) et (16), montre que  $\Lambda(S) \theta \sigma$  est contenu dans le second ensemble de (14).

Soit  $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}$  un élément du second ensemble de (14), et soit  $([g_\alpha, h_\alpha])_{\alpha \leq \gamma}$  un élément du troisième ensemble de (13). On a

$$([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} ([g_\alpha, h_\alpha])_{\alpha \leq \gamma} = ([c_\alpha g_\alpha, d_\alpha h_\alpha])_{\alpha \leq \beta} ,$$

où  $I \cap (Y) = (\beta)$ . Par hypothèse,  $c_\beta S_\gamma \subseteq d_\beta S_\beta$  et  $g_\gamma \in h_\gamma S_\gamma$ . D'après la construction, on a, pour tout  $v \in S_\beta$ ,

$$[g_\gamma v, h_\gamma v] = [g_\gamma, h_\gamma] [v, v] = [g_\gamma, h_\gamma] \varphi_{\gamma, \beta} = [g_\beta, h_\beta] ,$$

ce qui entraîne  $g_\gamma v h_\beta = h_\gamma v g_\beta$ . D'autre part,  $g_\gamma \in h_\gamma S_\gamma$  implique l'existence de  $u \in S_\gamma$  tel que  $g_\gamma = h_\gamma u$ . Par suite  $(h_\gamma v) u h_\beta = (h_\gamma v) g_\beta$ , d'où

$g_\beta = h_\beta u \in h_\beta S_\gamma$ . Il en résulte

$$c_\beta g_\beta \in c_\beta h_\beta S_\gamma = h_\beta (c_\beta S_\gamma) \subseteq h_\beta d_\beta S_\beta = (d_\beta h_\beta) S_\beta ,$$

donc  $([c_\alpha g_\alpha, d_\alpha h_\alpha])_{\alpha \leq \beta} \in \Gamma(S)\theta\sigma$ , en vertu de (13). On en déduit que  $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} \in i_A(\Gamma(S)\theta\sigma)$ .

Supposons finalement que  $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} \in i_A(\Gamma(S)\theta\sigma)$ . On obtient, pour tout  $[a, b] \in Q$ ,

$$\begin{aligned} ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} (\lambda_{[a,b]} \sigma) &= ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} (\lambda_{[a^2, a]} \lambda_{[b, b^2]})_\sigma \\ &= \{([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} (\lambda_a \theta\sigma)\} (\lambda_{[b, b^2]} \sigma) \in \Gamma(Q)\sigma , \end{aligned}$$

où l'inclusion est valable, parce que l'expression entre les accolades est contenue dans  $\Gamma(S)\theta\sigma$  qui est contenu dans  $\Gamma(Q)\sigma$ . En utilisant le théorème 1, on en déduit

$$([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} \in i_A(\Gamma(Q)\sigma) = \Lambda(Q)\sigma .$$

Posons  $\lambda = ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} \sigma^{-1}$ . On a  $\lambda \in \Lambda(Q)$ , et, pour tout  $s \in S$ , on obtient

$$[\lambda(\lambda_s \theta)]\sigma = (\lambda\sigma)(\lambda_s \theta\sigma) = ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} (\lambda_s \theta\sigma) \in \Gamma(S)\theta\sigma ,$$

d'après l'hypothèse, ce qui implique  $\lambda(\lambda_s \theta) \in \Gamma(S)\theta$ . Par suite

$$\lambda \in i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta) = \Lambda(S)\theta ,$$

en vertu du théorème 5. Or, cela entraîne  $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} = \lambda\sigma \in \Lambda(S)\theta\sigma$ , ce qui achève la démonstration de (14).

Le théorème précédent permet d'établir une autre immersion dense d'un demi-groupe commutatif séparatif.

COROLLAIRE 1. - Soit  $S$  un demi-groupe commutatif séparatif avec les composantes archimédiennes  $S_\alpha$ ,  $\alpha \in Y$ , et soit  $Q = [Y; G_\alpha, \varphi_{\alpha, \beta}]$  son demi-groupe des fractions. La fonction  $\tau$ , définie sur  $S$  par

$$\tau : s \rightarrow ([s^2, s]_{\varphi_{\gamma, \alpha}})_{\alpha \leq \gamma} \quad (s \in S_\gamma, \gamma \in Y) ,$$

est une immersion dense de  $S$  dans  $\text{Inv lim}\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$ .

Démonstration. - La fonction  $\tau$  est la composition des isomorphismes suivants :

$$s \rightarrow \lambda_s \xrightarrow{\theta} \lambda_{[s^2, s]} \xrightarrow{\sigma} ([s^2, s]_{\varphi_{\gamma, \alpha}})_{\alpha \leq \gamma} \quad (s \in S) ,$$

et est donc une immersion de  $S$  dans  $\text{Inv} \lim_{\alpha \in Y} \{G_\alpha\}$ . De plus,  $S\tau = \Gamma(S)\rho\sigma$  est un sous-demi-groupe dense de  $\text{Inv} \lim_{\alpha \in Y} \{G_\alpha\}$ , d'après le théorème 6 et [2], 1.3.5.

COROLLAIRE 2. - Tout demi-groupe commutatif séparable peut être densément immergé dans la limite inverse de son demi-groupe des fractions.

On peut simplifier les démonstrations du théorème 6 et du corollaire 1 pour montrer que l'immersion canonique d'un demi-groupe commutatif simplifiable dans son groupe des fractions est une immersion dense. Le résultat suivant généralise cette propriété au cas d'un sous-demi-groupe quelconque d'un groupe.

THÉORÈME 7. - Tout sous-demi-groupe d'un groupe est un sous-demi-groupe dense.

Démonstration. - Soit  $S$  un sous-demi-groupe d'un groupe  $G$ , et soit  $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ . Pour tout  $a, b \in S$ , on a

$$(\lambda a)a^{-1} = b^{-1} b(\lambda a)a^{-1} = b^{-1}(b\rho)aa^{-1} = b^{-1}(b\rho)bb^{-1} = b^{-1} b(\lambda b)b^{-1} = (\lambda b)b^{-1} .$$

Il en résulte que la fonction  $\eta$ , définie sur  $\Omega(S)$  par

$$\eta : (\lambda, \rho) \rightarrow (\lambda a)a^{-1} ,$$

ne dépend pas de l'élément  $a$ . Pour  $(\lambda, \rho), (\lambda', \rho') \in \Omega(S)$  et  $a \in S$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda, \rho)\eta (\lambda', \rho')\eta &= \{[\lambda(\lambda'a)](\lambda'a)^{-1}\}(\lambda'a)a^{-1} \\ &= \lambda(\lambda'a)a^{-1} = [(\lambda\lambda')a]a^{-1} = (\lambda\lambda', \rho\rho')\eta , \end{aligned}$$

et  $\eta$  est un homomorphisme. Si  $(\lambda a)a^{-1} = (\lambda'a)a^{-1}$  pour un  $a \in S$ , on a, pour tout  $b \in S$ ,  $(\lambda b)b^{-1} = (\lambda'b)b^{-1}$ , et par suite  $\lambda b = \lambda'b$ . Il s'ensuit que  $\lambda = \lambda'$ , et la simplifiabilité entraîne que  $\rho = \rho'$ . De plus, pour  $a \in S$ , on a  $\lambda_a \eta = (\lambda_a a)a^{-1} = a$ , ce qui implique  $\Pi(S)\eta = S$ . Puisque  $\Pi(S)$  est un idéal de  $\Omega(S)$ , on en déduit que  $\eta$  est un isomorphisme de  $\Omega(S)$  dans  $i_G(S)$ . D'après [2], 1.3.5,  $\Pi(S)$  est un idéal densément immergé de  $\Omega(S)$ . Par conséquent,  $\Omega(S)\eta$  est une extension dense maximale de  $\Pi(S)\eta = S$ . D'autre part, à cause de la simplifiabilité,  $i_G(S)$  est une extension dense de  $S$ , ce qui implique que  $\Omega(S)\eta = i_G(S)$ . Cela montre que  $S$  est un sous-demi-groupe de  $G$  densément immergé.

COROLLAIRE. - Toute immersion d'un demi-groupe dans un groupe est dense.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
- [2] GLUSKIN (L. M.). - Les idéaux des demi-groupes [en russe], Mat. Sbornik, N. S., t. 55, 1961, p. 421-448.
- [3] GRILLET (P. A.) and PETRICH (M.). - Ideal extensions of semigroups, Pacific J. of Math., t. 26, 1968, p. 493-508.
- [4] PETRICH (Mario). - The translational hull of a completely 0-simple semigroup, Glasgow math. J., t. 9, 1968, p. 1-11.
- [5] PETRICH (Mario). - Translational hull and semigroups of binary relations, Glasgow math. J., t. 9, 1968, p. 12-21.
- [6] PETRICH (Mario). - The semigroup of endomorphisms of a linear manifold, Duke math. J., t. 36, 1969, p. 145-152.
- [7] PETRICH (Mario). - Representations of semigroups and the translational hull of a regular Rees matrix semigroup, Trans. Amer. math. Soc., t. 143, 1969, p. 303-318.
- [8] PETRICH (Mario). - Certain dense embeddings of regular semigroups, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).
- [9] PETRICH (Mario). - On ideals of a semilattice, Czech. math. J. (à paraître).
- [10] PONIZOVSKI (I. S.). - Une remarque sur les demi-groupes inverses [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 20, 1965, fasc. 6, p. 147-148.

(Texte reçu le 23 mars 1971)

Mario PETRICH  
 712 Franklin Street  
 STATE COLLEGE, Pa 16802  
 (Etats-Unis)

---