THÉRÈSE MERLIER

Sur les demi-groupes totalement ordonnés O-simples

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, nº 1 (1970-1971), exp. nº 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A3_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 4, 11 p.

7 décembre 1970

SUR LES DEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS 0-SIMPLES

par Thérèse MERLIER

E. Ja. GABOVIČ, dans [4], posait le problème suivant : "Décrire les demi-groupes abéliens totalement ordonnés 0-simples, et les demi-groupes (abéliens) finis totalement ordonnés 0-simples". Nous apportons ici une solution de ce problème dans quelques cas particuliers. Rappelons qu'un demi-groupe (totalement) ordonné est 0-simple, s'il n'admet pas d'idéal bilatère convexe propre.

Dans le premier paragraphe, nous montrerons que ce problème peut se formuler de diverses manières ; dans le second, nous donnerons quelques propriétés algébriques des demi-groupes ordonnés 0-simples, ayant un plus petit ou un plus grand élément, ou les deux. En particulier, un demi-groupe abélien 0-simple, ayant un plus grand ou un plus petit élément, est trivial (théorème 3). Les paragraphes 3 et 4 seront respectivement consacrés aux demi-groupes périodiques totalement ordonnés 0-simples et aux bandes finies totalement ordonnées 0-simples.

1. Conditions équivalentes à la condition " 0-simple".

DÉFINITIONS 1. - Dans un ensemble ordonné X , une partie A est :

- héréditaire, si $(x \in X\ ,\ a \in A\ ,\ x \leqslant a) \Longrightarrow (x \in A)$;
- héréditaire duale, si $(x \in X\ ,\ a \in A\ ,\ a \leqslant x) \Longrightarrow (x \in A)$.

Si A est un sous-ensemble de X , nous noterons $\overleftarrow{A}$ la partie héréditaire engendrée par A , c'est-à-dire que

$$\overleftarrow{A} = \{x \in X\ ;\ \exists\, a \in A\ ,\ x \leqslant a\}\ ,$$

et $\overrightarrow{A}$ désignera la partie héréditaire duale engendrée par A ,

$$\overrightarrow{A} = \{x \in X\ ;\ \exists\, a \in A\ ,\ a \leqslant x\}\ .$$

LEMME 1. - Dans un demi-groupe ordonné S , si I est un idéal à gauche [bilatère], $\overleftarrow{I}$ est un idéal à gauche [bilatère], partie héréditaire de S .

Soit $\overleftarrow{I} = \{y \in S\ ;\ \exists\, i \in I\ ,\ y \leqslant i\}$. Par définition, $\overleftarrow{I}$ est une partie héréditaire ; soit $y \in \overleftarrow{I}$; $y \in i$, $i \in I$; d'où, pour tout x de S , $xy \leqslant xi$. Comme xi appartient à I , qui est idéal à gauche, $xy \in \overleftarrow{I}$, qui est donc idéal à gauche aussi.

En particulier, pour tout élément a de S, $\overleftarrow{Sa}$, ($\overleftarrow{aS}$, $\overleftarrow{SaS}$) sont des idéaux à gauche (à droite, bilatères), parties héréditaires de S.

De façon duale, $\overrightarrow{I}$ est un idéal à gauche, partie héréditaire duale dès que I est un idéal à gauche.

PROPOSITION 1. - Dans un demi-groupe ordonné, tout idéal à gauche [à droite, bilatère] convexe est l'intersection d'un idéal à gauche [à droite, bilatère], partie héréditaire, et d'un idéal à gauche, partie héréditaire duale.

Si I est un idéal à gauche convexe, $\overleftarrow{I}$ et $\overrightarrow{I}$ sont des idéaux à gauche héréditaire et héréditaire dual respectivement, et I étant convexe, $\overleftarrow{I} \cap \overrightarrow{I}$ est égal à I.

DÉFINITION 2. - Un demi-groupe totalement ordonné est Θ-simple à gauche, s'il n'admet pas d'idéal à gauche convexe propre.

Avec cette définition, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit S un demi-groupe ordonné. Il y a équivalence entre :

(a) S est Θ-simple à gauche [Θ-simple] ;

(b) S n'admet, ni idéal à gauche [bilatère] héréditaire propre, ni idéal à gauche [bilatère] héréditaire dual propre ;

(c) $\forall\, a \in S$, $\overleftarrow{Sa} = \overleftrightarrow{Sa} = S$ $[\overleftarrow{SaS} = \overleftrightarrow{SaS} = S]$.

(a) ==> (b) : Toute partie héréditaire ou héréditaire duale est en particulier convexe ; donc cette implication est immédiatement vérifiée.

(b) ==> (a) : Il suffit d'appliquer la proposition 1.

(b) ==> (c) : C'est immédiat, d'après le lemme 1.

(c) ==> (b) : Soit I un idéal à gauche héréditaire, et soit $a \in I$; alors $\overleftarrow{Sa} \subseteq I$ et, $\overleftarrow{Sa}$ étant égal à S, $I = S$, et I est un idéal impropre.

THÉORÈME 2. - Soit S un demi-groupe ordonné abélien. Dans ce cas, S est Θ-simple, si, et seulement si, toute image Θ-homomorphe de S, positivement ou négativement ordonnée, est triviale.

En effet, toute image Θ-homomorphe $\varphi(S) = S'$ de S est positivement ordonnée si, et seulement si, l'équivalence d'application π_φ est telle que $\pi_\varphi = \bigcap_{i \in I} C^1_{H_i}$, où les H_i sont des idéaux, héréditaires duaux, et $C^1_{H_i}$ l'équivalence de Croisot associée à H_i. Comme C^1_H est l'équivalence universelle si, et seulement si, $H = S$, nous avons le résultat, en vertu du (b) du théorème 1.

2. Quelques propriétés algébriques des demi-groupes totalement ordonnés Θ-simples.

PROPOSITION 2. - *Soit* S *un demi-groupe ordonné, de plus petit élément* z . *Si* S *n'admet aucun idéal à gauche, héréditaire dual, propre,* z *est zéro à gauche de* S .

Puisque S n'admet aucun idéal à gauche héréditaire dual propre, $\overrightarrow{Sa} = S$ pour tout a de S ; en particulier, $z \in \overrightarrow{Sa}$, donc $z \leqslant xa \leqslant z$, puisque z est plus petit élément de S , d'où $xa = z$. Mais $z \leqslant x$, d'où $z \leqslant za \leqslant xa = z$ et $z = za$. z est donc zéro à gauche.

PROPOSITION 3. - *Soit* S *un demi-groupe totalement ordonné, de plus petit élément* z , *sans idéal bilatère héréditaire dual propre. Alors, pour tout* a *de* S , za *ou* $az = z$.

$\overrightarrow{SaS} = S$, donc, de la même façon que dans la proposition précédente, on a $zaz = z$ pour tout a de S . Mais S est supposé totalement ordonné ; donc, a étant donné, nous avons par exemple $z \leqslant za \leqslant az$, d'où, en vertu de l'isotonie, $z^2 \leqslant z^2 a \leqslant zaz = z$; et, par suite, $z = z^2 = za$.

THÉORÈME 3. - *Soit* S *un demi-groupe ordonné* abélien, *avec un plus petit élément* z *ou un plus grand élément* u ; S *est* Θ*-simple, si, et seulement si,* S *est réduit à un seul élément.*

D'après la proposition 2, si z est le plus petit élément de S , nous avons $za = z = az$ pour tout a de S , et z est un zéro de S , donc un idéal convexe et, par suite, $S = \{z\}$. Si u est le plus grand élément de S , une proposition duale de la proposition 2 permet d'affirmer que $ua = u = au$ pour tout u , donc $S = \{u\}$ dans ce cas.

COROLLAIRE 1. - *Un demi-groupe abélien totalement ordonné, ayant un plus petit ou un plus grand élément, est* Θ*-simple, si, et seulement si, il n'admet pas de sous-demi-groupes convexes propres.*

On sait, en effet [3], qu'un demi-groupe totalement ordonné sans sous-demi-groupes convexes propres est réduit à un élément.

COROLLAIRE 2. - *Un demi-groupe abélien fini, totalement ordonné, est* Θ*-simple, si, et seulement si, il est réduit à un élément.*

Remarque. - Dans le corollaire précédent, le résultat subsisterait si l'on supposait le demi-groupe abélien fini ordonné en demi-treillis.

PROPOSITION 4. - Soit S un demi-groupe totalement ordonné $\mathcal{O}$-simple. S admet un plus petit élément, si, et seulement si, l'ensemble de ses zéros à gauche (ou à droite) admet un plus petit élément z. Dans ce cas, z est le plus petit élément de S.

Si S admet un plus petit élément z, d'après la proposition 3, pour tout a de S, za ou $az = z$. Si S n'est pas réduit à un élément, z n'est pas un zéro, donc il existe $x \in S$ tel que $zx = z$ et $xz \neq z$. Dans ce cas, soit $y \leqslant x$, $z \leqslant zy \leqslant zx = z$ et $zy = z$. Soit $y > x$, alors $z < xz \leqslant yz$, puisque xz est distinct de z, yz est distinct de z, et, par conséquent, $zy = z$.

Ainsi, pour tout y de S, $zy = z$, et z est zéro à gauche de S.

Réciproquement, supposons que l'ensemble des zéros à gauche de S n'est pas vide, et soit z son plus petit élément. Supposons qu'il existe $x \in S$, $x < z$. S étant $\mathcal{O}$-simple, il existerait $\alpha, \beta \in S$ tels que $\alpha z \beta \leqslant x < z$. Or $z\beta = z$, et ainsi $\alpha z \leqslant x < z$. Mais αz est encore un zéro à gauche, donc $\alpha z < z$ est impossible, et z est le plus petit élément de S.

THÉORÈME 4. - Soit S un demi-groupe totalement ordonné, de plus petit élément z et de plus grand élément u $(z \neq u)$. S est $\mathcal{O}$-simple, si, et seulement si, z et u sont deux zéros à gauche (ou à droite).

Condition nécessaire : D'après la proposition précédente et celle qui s'en déduit par dualité, z et u sont zéros à gauche (ou à droite).

Condition suffisante : Il suffit de montrer que, pour tout a de S, $\overleftarrow{SaS} = \overrightarrow{SaS} = S$; or $ua = u$, $za = z$, donc $uau = u$, $zaz = z$, pour tout a de S. Ainsi, pour tout x de S, $x \in \overrightarrow{SaS}$, puisque $zaz = z \leqslant x$, et, de même, $x \in \overleftarrow{SaS}$, puisque $x \leqslant uau$. S est donc $\mathcal{O}$-simple.

COROLLAIRE 3. - Soit S un demi-groupe simple. S peut être totalement ordonné avec un plus petit et un plus grand élément, si, et seulement si, S est un zéro-demi-groupe à gauche [ou à droite].

Il est facile de voir que, si S est un zéro-demi-groupe à gauche ou à droite, toute relation d'ordre total définie sur S l'ordonne totalement. En particulier, S peut être totalement ordonné avec un plus petit et un plus grand élément.

Réciproquement, si S est un demi-groupe simple, il est $\mathcal{O}$-simple. Supposons qu'il soit ordonné avec un plus petit élément et un plus grand élément. D'après le théorème 4, ces deux éléments sont donc deux zéros à gauche (ou à droite). Mais l'ensemble des zéros à gauche est un idéal bilatère ; comme S est simple, S est un zéro-demi-groupe à gauche.

Nous savons [1] (theorem 8.45) que tout demi-groupe S peut être plongé dans un demi-groupe simple S' . De même, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - Tout demi-groupe S totalement ordonné [partiellement ordonné] peut être plongé dans un demi-groupe S' totalement ordonné [partiellement ordonné] 0-simple, l'ordre défini sur S' prolongeant celui donné sur S .

Considérons, en effet, l'ensemble $S' = S \cup \{z\} \cup \{u\}$, où z et u sont deux symboles n'appartenant pas à S . Définissons, dans S' , les relations suivantes :

$\forall x \in S$, $z < x < u$;

$zS' = z$; $Sz = z$; xy dans $S' = xy$ dans S ;

$uS' = u$; $Su = u$; si x et y appartiennent à S .

z et u sont donc zéros à gauche de S' . Si nous montrons que S' est un demi-groupe ordonné, il sera 0-simple, d'après le théorème 4. Pour vérifier que S' est un demi-groupe, il suffit de voir que $(xy)t = x(yt)$ lorsque $x \in S$ et y ou $t \notin S$. L'isotonie se vérifie facilement du fait que S est un demi-groupe ordonné, que z et u sont zéros à gauche de S' et zéros à droite pour les éléments de S .

Remarque. - Alors que tout demi-groupe peut être plongé dans un demi-groupe simple unitaire, il n'en est pas de même pour un demi-groupe ordonné, puisqu'un demi-groupe totalement ordonné ne peut en général être plongé dans un demi-groupe unitaire totalement ordonné (voir [2], par exemple).

3. Demi-groupes périodiques totalement ordonnés 0-simples.

On sait [2] que, si dans un demi-groupe S périodique totalement ordonné, les idempotents commutent, l'équivalence en fuseaux $\mathfrak{F}$ est une congruence, et les fuseaux sont des sous-demi-groupes convexes.

Nous considérerons ici des demi-groupes totalement ordonnés, périodiques, dans lesquels l'équivalence $\mathfrak{F}$ est une congruence. Les propriétés que nous obtiendrons seront donc valables, si E , demi-groupe des idempotents, est abélien, ou si S lui-même est abélien. Le fuseau d'un élément e sera noté F_e .

THÉORÈME 6. - Soit S un demi-groupe périodique totalement ordonné, dans lequel $\mathfrak{F}$ est une congruence, et soit E le demi-groupe des idempotents de S . S est 0-simple, si, et seulement si, E est 0-simple et vérifie : " e plus petit élément de E " implique " e plus petit élément de F_e ", et " e plus grand élément de E " implique " e plus grand élément de F_e ".

1° Supposons S 0-simple. Soient e et f deux éléments de E. Puisque S est 0-simple, il existe, d'après le théorème 1, des éléments $x, y \in S$, $x', y' \in S$, tels que $xey \leqslant f \leqslant x'ey'$, par exemple. Si $xey \equiv f \ (\mathfrak{F})$, comme $x \equiv g_1 \ (\mathfrak{F})$, $y \equiv g_2 \ (\mathfrak{F})$, avec g_1 et g_2 éléments de E, nous avons $xey = g_1 eg_2$, car $\mathfrak{F}$ est une congruence. D'où $g_1 eg_2 = f$, puisque $g_1 eg_2$ est un idempotent, donc le seul du fuseau de xey. Par contre, si $xey \not\equiv f \ (\mathfrak{F})$, $xey < f$ et $g_1 eg_2 < f$ aussi par convexité des fuseaux, dans un demi-groupe périodique. Donc, dans les deux cas, il existe $g_1, g_2 \in E$, et de même $g_1', g_2' \in E$, tels que $g_1 eg_2 \leqslant f \leqslant g_1' eg_2'$. E est par suite une bande 0-simple.

Montrons maintenant que " e minimum dans E " implique " e minimum dans F_e (donc de S)". Si $a \in F_e$ et si $a < e$, puisque S est 0-simple, il existe $x, y \in S$ tels que $xey \leqslant a < e$. Donc x ou $y \notin F_e$ (e est en effet élément zéro de F_e). Comme e est minimum dans E, si x et $y \notin F_e$, $e < x$, $e < y$, et $e \leqslant xey$, et, si $x \notin F_e$, $y \in F_e$, $ey = e$ et $e < x$. D'où $xey = xe \geqslant e$. Dans tous les cas, l'hypothèse $a < e$ conduit à une contradiction, donc $e \leqslant a$ pour tout a de F_e.

De la même façon, on montre que " e maximum dans E " implique " e maximum dans F_e ".

2° <u>Réciproquement</u>, d'après le théorème 1, il faut montrer que, $\forall\, a, b \in S$, $\exists\, x, y, x', y'$, tels que $xay \leqslant b \leqslant x'ay'$.

(α) <u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>appartenant à</u> F_e.

<u>Si</u> e <u>n'est ni maximum, ni minimum dans</u> E, il existe f, g dans E tels que $f < e < g$. E étant 0-simple, on peut trouver g_1, g_2, g_1', g_2' éléments de E satisfaisant aux inégalités suivantes : $g_1 eg_2 \leqslant f < e < g \leqslant g_1' eg_2'$. Il vient alors, en utilisant la convexité des fuseaux,

$$g_1 ag_2 < b < g_1' ag_2' \qquad \text{et} \qquad g_1 bg_2 < a < g_1' bg_2' \ .$$

<u>Si</u> e <u>est minimum dans</u> E, alors e est le plus petit élément de S. D'où $e \leqslant a < b$, par exemple. Mais, si S n'est pas réduit à un seul élément, il existe au moins un autre idempotent f, et $b < f$. Comme $f \leqslant g_1 eg_2$ avec $g_i \in E$ (E est 0-simple), a et b sont inférieurs à $g_1 ag_2$ et $g_1 bg_2$. D'où $e = eae < b \leqslant g_1 ag_2$ et $e = ebe \leqslant a < g_1 bg_2$.

Même démonstration si e est maximum dans E.

(β) <u>Soient</u> $a \in F_e$, $b \in F_f$, <u>et</u> $e < f$, <u>par exemple</u>.

<u>Si</u> e <u>n'est pas minimum et</u> f <u>non maximum</u>, il existe h et h', idempotents de S, tels que $h < e < f < h'$. Donc, E étant un demi-groupe 0-simple, il existe g_1, g_2, g_1', g_2' éléments de E vérifiant $g_1 fg_2 \leqslant h < e < h' \leqslant g_1' fg_2'$,

d'où, par convexité des fuseaux, et en utilisant le fait que $\mathfrak{F}$ est une congruence, $g_1 bg_2 < a < g'_1 bg'_2$. De même, il existe k_1, k_2, k'_1, k'_2 tels que $k_1 ek_2 \leqslant h < f < h' \leqslant k'_1 ek'_2$, et il vient $k_1 ak_2 < b < k'_1 ak'_2$.

Si e est minimum et f non maximum, on a donc $e \leqslant a < b < g$, avec $g \in E$, $g \neq f$. D'où $e = eae < b < g \leqslant g_1 eg_2$, or $g_1 ag_2 \equiv g_1 eg_2$ $(\mathfrak{F})$ $(g_i \in E)$, donc $eae < b < g_1 ag_2$, et, de même, il existe k_1, $k_2 \in E$ tels que $k_1 gk_2 \leqslant e$. Mais e est minimum, donc $k_1 gk_2 = e = k_1 bk_2 \leqslant a < fbf = f$.

Si e n'est pas minimum et si f est maximum : même démonstration que précédemment.

Si e est minimum et f maximum, alors $e \leqslant a < b \leqslant f$. Or E étant Θ-simple, il existe g_1, $g_2 \in E$ tels que $g_1 fg_2 = e$. D'où $g_1 bg_2 = e < a < fbf = f$. Et, de même, $eae = e < b \leqslant f \leqslant g'_1 eg'_2$ avec g'_1, $g'_2 \in E$. D'où $eae = e < b < g'_1 ag'_2 = f$. S est donc Θ-simple.

COROLLAIRE 4. - Soit S un demi-groupe périodique totalement ordonné, dans lequel $\mathfrak{F}$ est une congruence. Si S n'admet, ni plus petit élément, ni plus grand élément, S est Θ-simple si, et seulement si, E est Θ-simple, sans plus petit élément, sans plus grand élément.

COROLLAIRE 5. - Soit S un demi-groupe périodique totalement ordonné, dans lequel les idempotents commutent. Si le demi-groupe des idempotents admet, ou un plus petit élément, ou un plus grand élément, S est Θ-simple si, et seulement si, S est réduit à un seul élément.

Cela résulte du théorème 3 et du théorème 6.

COROLLAIRE 6. - Soit S un demi-groupe totalement ordonné périodique, dans lequel les idempotents commutent. Si S admet un plus petit élément ou un plus grand élément, S est Θ-simple si, et seulement si, S est réduit à un seul élément.

En effet, si S admet un plus petit élément a, le fuseau de a, qui est le fuseau de e par exemple, est tel que e est le plus petit élément de E ; donc E est une bande commutative avec plus petit élément, Θ-simple (théorème 6), donc, d'après le théorème 3, E est réduit à $\{e\}$, et S aussi.

Le théorème 6 fait intervenir des demi-groupes idempotents, bandes, totalement ordonnés Θ-simples. Nous allons maintenant examiner la structure des bandes finies totalement ordonnées, Θ-simples.

4. Bandes finies totalement ordonnées Θ-simples.

Soit S une bande finie totalement ordonnée Θ-simple. Soit z le plus petit élément, et soit u le plus grand élément. Nous avons vu (théorème 4) que l'on pouvait supposer $zx = z$ pour tout x de S, et $ux = u$ pour tout x de S. Dans ce cas, la table de Cayley de la bande S est nécessairement de la forme suivante, les zéros à gauche de S étant $z = z_0$, z_1, ..., z_p, ..., $z_n = u$, avec $z < z_1 < \dots < z_p < \dots < u$, et S étant ordonné par

$$z < a_{1,1} < \dots < a_{r,1} < z_1 < \dots < z_{p-1} < a_{1,p-1} < \dots < z_p < \dots < a_{t,n} < u \; .$$

	z	$a_{1,1} \cdots a_{r,1}$	z_1	z_{p-1}	$a_{1,p-1} \cdots a_{s,p-1}$	z_p	z_{n-1}	$a_{t,1} \cdots a_{t,n}$	u
z	z	$\cdots$	z	z	$\cdots$	z	z	$\cdots$	z
$a_{1,1}$	z		z_1	z_1	$\cdots$	z_1	z_1	$\cdots$	z_1
$\vdots$	$\vdots$	$\boxed{S_1}$	$\vdots$			z_1			
$a_{r,1}$	z		z_1						
z_1	z_1	$\cdots$	z_1	z_1	$\cdots$	z_1	z_1	$\cdots$	z_1
			$\ddots$						
z_{p-1}	z_{p-1}	$\cdots$	z_{p-1}	z_{p-1}	$\cdots$	z_{p-1}	z_{p-1}	$\cdots$	z_{p-1}
$a_{1,p-1}$	z_{p-1}	$\cdots$	z_{p-1}	z_{p-1}		z_p	z_p	$\cdots$	z_p
$\vdots$	$\vdots$	z_{p-1}		$\vdots$	$\boxed{S_p}$	$\vdots$		z_p	
$a_{s,p-1}$	z_{p-1}	$\cdots$	z_{p-1}	z_{p-1}		z_p	z_p	$\cdots$	z_p
z_p	z_p	$\cdots$	z_p	z_p	$\cdots$	z_p	z_p	$\cdots$	z_p
						$\ddots$			
z_{n-1}	z_{n-1}	$\cdots$	z_{n-1}	z_{n-1}	$\cdots$	z_{n-1}	z_{n-1}	$\cdots$	z_{n-1}
$a_{t,1}$	z_{n-1}	$\cdots$	z_{n-1}				z_{n-1}	u	u
$\vdots$	$\vdots$			z_{n-1}			$\vdots$	$\boxed{S_n}$ $\vdots$	$\vdots$
$a_{t,n}$	z_{n-1}	$\cdots$		z_{n-1}	$\cdots$	z_{n-1}	z_{n-1}	u	
u	u	$\cdots$		u	$\cdots$	u	u	$\cdots$	u

S_p est un sous-demi-groupe de S, ou bien il est vide ; c'est l'ensemble des éléments compris entre deux zéros à gauche, z_{p-1} et z_p.

Pour établir la forme de cette table, nous utilisons essentiellement l'isotonie de la multiplication par rapport à la relation d'ordre.

Soit x un élément de S_1, $z < x < z_1$, $z \leqslant xz \leqslant x$; mais xz est aussi un zéro à gauche, donc $xz = z$; $x \leqslant xz_1 \leqslant z_1$, donc $xz_1 = z_1$.

Soit alors y un élément de S, tel que $z_1 \leqslant y$, $xz_1 \leqslant xy$, d'où $z_1 \leqslant xy$; mais $xy \leqslant z_1 y = z_1$ (z_1 est zéro à gauche), donc $xy = z_1$.

Ce raisonnement est valable pour tout zéro : si S_p est l'ensemble des éléments compris entre z_{p-1} et z_p, si $x \in S_p$, $z_{p-1} < x < z_p$; soit $y \in S$, avec $y \leqslant z_{p-1}$, $z_{p-1} y \leqslant xy \leqslant xz_{p-1}$; mais $z_{p-1} \leqslant xz_{p-1} \leqslant x < z_p$, donc xz_{p-1}, qui est zéro à gauche, est égal à z_{p-1}, et, comme $z_{p-1} y = z_{p-1}$,

$$xy = z_{p-1} .$$

Au contraire, si $y \geqslant z_p$, $xy = z_p$. Enfin, chacun des S_i est un sous-demi-groupe ; le produit de deux éléments est en effet compris entre ces éléments dans une bande.

PROPOSITION 5. - <u>Une bande</u> S <u>finie totalement ordonnée,</u> 0-<u>simple, admet une partition</u>

$$S = \left(\bigcup_{i=0}^{n} z_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) ,$$

<u>où les</u> z_i <u>sont les zéros à gauche (à droite) de</u> S, <u>et où</u> S_i <u>est l'ensemble des éléments de</u> S <u>compris strictement entre</u> z_{i-1} <u>et</u> z_i. <u>De plus, la relation d'équivalence, associée à cette partition, est une congruence</u> $\mathcal{C}$; $S/\mathcal{C}$ <u>est une bande totalement ordonnée, image</u> 0-<u>homomorphe de</u> S.

Ceci résulte de la table de Cayley d'une bande totalement ordonnée 0-simple. Nous pouvons de plus énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 6. - <u>Une bande finie totalement ordonnée</u> 0-<u>simple est réunion disjointe de demi-groupes totalement ordonnés</u> Σ_i $(i = 0 , 1 , \ldots , n)$ <u>avec zéro, le zéro de</u> Σ_i <u>en étant le plus grand élément. De plus, il y a bijection entre ces sous-demi-groupes et les zéros à gauche de</u> S.

D'après la table d'une bande 0-simple, il nous suffit de prendre

$$\Sigma_0 = \{z\} , \qquad \Sigma_1 = S_1 \cup \{z_1\} , \quad \ldots , \quad \Sigma_i = S_i \cup \{z_i\} ,$$

de façon générale.

Remarquons que cette partition ne détermine pas une congruence.

THÉORÈME 7. - Si une bande finie est totalement ordonnée, Θ-simple, alors, pour toute autre relation d'ordre l'ordonnant totalement, elle est encore Θ-simple.

Reprenons la table d'une bande S totalement ordonnée par $\leqslant$, Θ-simple pour cette relation. Supposons que la relation $\preccurlyeq$ ordonne S totalement ; montrons que, relativement à $\preccurlyeq$, le plus petit élément de S est encore un zéro à gauche. Raisonnons par l'absurde, et supposons que x est le plus petit élément de $(S , \preccurlyeq)$. Puisque x n'est pas zéro à gauche, dans $(S , \leqslant)$ nous avons $z_{p-1} < x < z_p$, par exemple. Dans $(S , \preccurlyeq)$, $x < z_p$, donc par isotonie $xz \preccurlyeq z_p\, z = z_p$; mais $xz = z_{p-1}$ (table de Cayley de $S , \leqslant$), donc $z_{p-1} \prec z_p$. De même, dans $(S , \preccurlyeq)$, nous avons $x \prec z_{p-1}$, d'où $xu \preccurlyeq z_{p-1}\, u = z_{p-1}$; mais $xu = z_p$, donc $z_p \prec z_{p-1}$. Les deux inégalités $z_{p-1} \prec z_p$ et $z_p \prec z_{p-1}$ étant simultanément irréalisables, le plus petit élément de $(S , \preccurlyeq)$ est un zéro à gauche. De la même façon, le plus grand élément est un zéro à gauche et, d'après le théorème 4, $(S , \preccurlyeq)$ est Θ-simple.

5. Construction de demi-groupes totalement ordonnés Θ-simples.

PROPOSITION 7. - Si S est un demi-groupe totalement ordonné, simplifiable, Θ-simple, et si S' est un demi-groupe totalement ordonné, le produit direct $D = S' \times S$ est un demi-groupe totalement ordonné Θ-simple.

D peut être totalement ordonné par l'ordre lexicographique

$$((a , b) \leqslant (c , d)) \iff (b < d \text{ ou } b = d \text{ et } a \leqslant c) .$$

D est Θ-simple pour cette relation d'ordre total. Puisque S est simplifiable, S n'admet, ni plus petit, ni plus grand élément ; de tels éléments sont en effet zéros à gauche ou à droite (S est Θ-simple).

Soient (a , b) et (c , d) deux éléments de D . Il existe donc un élément x de S tel que $b < x$, $d < x$. Comme S est Θ-simple, $b < x \leqslant zdt$, $z , t \in S$, et

$$(a , b) < (z' , z)(c , d)(t' , t) ,$$

avec (z' , t') quelconque élément de D . De même, il existe y de S tel que $y < b$, $y < d$, et, par suite, il existe u et v tels que $udt < b$ et

$$(u' , u)(c , d)(v' , v) < (a , b) .$$

D est donc Θ-simple.

Remarque. - Si S' n'est pas simple, D ne peut l'être. Donc, si S est un demi-groupe totalement ordonné simple, simplifiable (donc 0-simple), si S' est un demi-groupe totalement ordonné non simple, $D = S' \times S$ est totalement ordonné, 0-simple sans être simple.

Exemple. - Soit S le groupe multiplicatif des rationnels strictement positifs ; S est totalement ordonné par $(a \leqslant b) \iff (a/b \leqslant 1)$, et S est évidemment simple. Il est de plus simplifiable.

Soit S' le demi-groupe additif des entiers positifs. S' est totalement ordonné par $(a \leqslant b) \iff (b - a \geqslant 0)$. Le produit $S' \times S$ est un demi-groupe, totalement ordonné par l'ordre lexicographique, 0-simple (comme S), et qui ne peut être simple, puisque S' ne l'est pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Volume 2. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[2] DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). - Quelques propriétés des 0-demi-groupes, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Classe Sc. fis., mat. e nat., t. 41, 1966, p. 279-289.

[3] KHION (Ja. V.). - Sur les demi-groupes partiellement ordonnés dans lesquels les sous-demi-groupes convexes propres sont disjoints [en russe], Izvest. Akad. Nauk SSSR, Serija mat., t. 27, 1963, p. 67-74.

[4] Sverdlovskaja Tetrad' [Cahiers de Sverdlovsk (Problèmes non résolus de théorie des demi-groupes)]. - Sverdlovsk, 1969 (Uralskij Gosudarstvennyj Universitet), p. 5, Problème n° 9.

(Texte reçu le 3 mars 1971)

Thérèse MERLIER
15 boulevard de la République
92 - FONTENAY-aux-Roses