Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Thérèse Merlier

Sous-demi-groupes convexes des demi-groupes totalement ordonnés. Erratum et compléments

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 2, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A2_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 2, 3 p.

SOUS-DEMI-GROUPES CONVEXES DES DEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS. ERRATUM ET COMPLÉMENTS

par Thérèse MERLIER

Nous voulons donner ici une correction à un théorème inexact de l'exposé fait à Nice [1] en 1970, et apporter en même temps quelques compléments (théorèmes 4 et 5).

Si S est un demi-groupe totalement ordonné, ses sous-demi-groupes convexes forment un treilli $T(S)$, si nous admettons $\emptyset$ comme sous-demi-groupe convexe impropre. $T(S)$ est évidemment un sous-inf-demi-treillis de $\mathcal{P}(S)$, mais en général la réunion ensembliste de deux sous-demi-groupes convexes n'appartient pas à $T(S)$.

Le plus petit élément de $T(S)$ est évidemment $\emptyset$, mais S peut admettre un sous-demi-groupe convexe propre minimum (l'intersection de tous les sous-demi-groupes convexes propres de S). Nous avions énoncé dans [1], les théorèmes suivants (S désigne un demi-groupe totalement ordonné) :

THÉORÈME 1. - $T(S)$ <u>est une chaîne si, et seulement si,</u> S <u>est archimédien et positivement ordonné</u> (<u>ou négativement ordonné</u>).

THÉORÈME 2. - S <u>admet un sous-demi-groupe convexe propre minimum, et</u> $T(S)$ <u>est un sous-treillis de</u> $\mathcal{P}(S)$ <u>si, et seulement si,</u> S <u>est un nil-demi-groupe</u>.

Le théorème 3 était le suivant : Si S n'admet pas de sous-demi-groupe convexe propre minimum, et si $T(S)$ est un sous-treills de $\mathcal{P}(S)$, alors $T(S)$ est une chaîne.

<u>Ce théorème 3 est inexact</u>. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la bande $S = \{e , f\}$ avec $ef = fe = e$ et $e < f$, par exemple. En effet, dans ce cas, S n'admet pas de sous-demi-groupe convexe propre minimum, $T(S) = \mathcal{P}(S)$, et $\mathcal{P}(S)$ n'est pas une chaîne.

Nous avons cependant, avec les notations et définitions utilisées dans [1], le résultat suivant.

THÉORÈME 3'. - <u>Soit</u> S <u>un demi-groupe totalement ordonné, sans idempotent. Si</u> $T(S)$ <u>est un sous-treillis de</u> $\mathcal{P}(S)$, $T(S)$ <u>est une chaîne</u>.

<u>Démonstration</u>. - Pour que ce treillis soit une chaîne, il suffit de montrer (théorème 1) que S est archimédien et positivement (ou négativement) ordonné. Supposons

qu'il existe $a \in N - P$ (i. e. $a^2 < a$) et $b \in P$ (i. e. $b \leqslant b^2$) : si $a < b$, $S_{a^2} \cup S_b$ n'est pas convexe ($a^2 < a < b$ et $a \notin S_{a^2} \cup S_b$). le cas $b < a$ n'est pas à considérer, car alors ab est un idempotent. Donc $S = P$ par exemple. Soient a et b deux éléments de S, avec $a < b$, $a < a^2$, $b < b^2$: si $a^n < b$ pour tout entier n, $S_a \cup S_{b^2}$ n'est pas convexe, donc il existe p tel que $a < b \leqslant a^p$. Par suite, S est archimédien, et étant f-positivement ordonné, il est positivement ordonné.

Nous avons, de plus, démontré les théorèmes suivants.

THÉORÈME 4. - *Si* $T(S)$ *est un sous-treillis de* $\mathcal{P}(S)$, S *admet au plus deux idempotents*.

En effet, si e, f, g étaient trois idempotents de S, on aurait, par exemple, $e < f < g$ puisque S est supposé totalement ordonné, et $S_e \cup S_g = \{e, g\}$ ne serait pas convexe.

THÉORÈME 5. - *Soit* S *un demi-groupe totalement ordonné, et soit* E *l'ensemble de ses idempotents.* $T(S)$ *est un sous-treillis de* $\mathcal{P}(S)$, *et* S *n'admet pas de sous-demi-groupe convexe propre minimum si, et seulement si,*

1° $E = \emptyset$, *et* $T(S)$ *est une chaîne* ;

ou

2° $E = \{z\}$, z *est zéro de* S, *la section commençante* [*finissante*] *de* z *est un nil-demi-groupe, la section strictement finissante* [*commençante*] *de* z *est un demi-groupe non vide dont le treillis des sous-demi-groupes convexes est une chaîne* ;

ou

3° $E = \{e, f\}$, *où* f *couvre* e *et où les sections commençante de* e *et finissante de* f *sont des nil-demi-groupes.*

Condition nécessaire. - D'après le théorème 4, $E = \{\emptyset\}$ ou $E = \{z\}$ ou $E = \{e,f\}$.

- Si $E = \emptyset$, on a bien le 1° d'après le théorème 3'.
- Si $E = \{z\}$; soient $z^{\leqslant} = \{x \,;\, x \leqslant z\}$ et $z^{\geqslant} = \{x \,;\, x \geqslant z\}$ les sections commençante et finissante de z. Si $x < z$, alors $x < x^2$, sinon $S_{x^2} \cup S_z$ n'est pas convexe ; de même, si $z < x$, $x^2 < x$. Si $x < z < y$, et si $x^p < z < y^q$ pour tout entier p et q, $S_x \cup S_y$ ne contient pas z, donc n'est pas convexe. Donc, si $z^<$ et $z^>$ [sections strictement commençante et finissante] ne sont pas vides, $z^<$, par exemple, est tel qu'il contient un élément x vérifiant $x^p = z$.

Dans ce cas, $z^{\leqslant}$ est un nil-demi-groupe. En effet, si x' est un autre élément de $z^{\leqslant}$, si $x \leqslant x' \leqslant z$, alors $x^p = x'^p = z$ et, si $x' < x$, comme $S_{x'} \cup S_z$ est convexe, il contient x , et par suite, $x' < x \leq x'^q \leq z$, donc $z = x^p = x'^{pq}$. Mais $z^{\leq}$ et $z^{\geq}$ ne peuvent être simultanément deux nil-demi-groupes, car alors $\{z\}$ serait minimum parmi les sous-demi-groupes convexes propres ; donc, si $z^{\leq}$ est un nil-demi-groupe, $z^{>} = \{x \; ; \; x > z\}$ ne peut être vide, et est un sous-demi-groupe. Enfin, si $z < x^2 < x$, zx est un idempotent, donc $zx = z$, et z est zéro du demi-groupe S ; de plus, d'après le théorème 3', $T(z^{>})$ est une chaîne, donc la condition 2° est satisfaite.

– Si $E = \{e , f\}$ avec $e < f$; s'il existait x tel que $e < x < f$, la convexité de $S_e \cup S_{x^2}$ impliquerait $e \leq x^2 < x$, et la convexité de $S_f \cup S_{x^2}$, $x < x^2 \leq f$; donc f couvre e dans S . Enfin, si $x < e$, $x < x^2$, sinon $S_{x^2} \cup S_e$ n'est pas convexe et, de plus, il existe p tel que $x < x^p = e$, sinon $S_x \cup S_f$ n'est pas convexe. Ainsi, la section commençante de e est un nil-demi-groupe. Même raisonnement par $f^{\geq}$.

Condition suffisante. – Il est facile de vérifier que, dans chacun des trois cas, $S_x \cup S_y$ est un sous-demi-groupe convexe pour tout x et tout y ; donc, $T(S)$ est un sous-treillis de $\mathcal{P}(S)$.

De plus, si S admet un sous-demi-groupe convexe minimum propre, on sait (cf. la démonstration du théorème 2) que ce dernier est un idempotent. Donc, si $E = \emptyset$, on a le résultat cherché. Dans le second cas, $S_z \cap S_x = \emptyset$ pour tout x de la section strictement finissante [commençante] de z ; dans le dernier cas, $S_e \cap S_f = \emptyset$, donc S ne peut admettre de sous-demi-groupe convexe minimum propre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MERLIER (Thérèse). – Sous-demi-groupes convexes des demi-groupes totalement ordonnés, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 23e année, 1969/70, fasc. 2 : Demi-groupes [1970. Nice], n° 7, 5 p.

(Texte reçu le 15 novembre 1971)

Thérèse MERLIER
15 boulevard de la République
92260 FONTENAY AUX ROSES