Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Thomas S. Blyth

Images homomorphes, ordonnées en treillis des demi-groupes ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 2 (1969-1970), exp. nº DG 8, p. DG1-DG5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A8_0>

IMAGES HOMOMORPHES, ORDONNÉES EN TREILLIS DES DEMI-GROUPES ORDONNÉS

par Thomas S. BLYTH

La recherche des groupes ordonnés, qui sont des images d'un demi-groupe ordonné S par un homomorphisme isotone, a déjà fait l'objet d'une étude complète. Nous considérons ici le cas analogue des homomorphismes isotones qui appliquent un demi-groupe ordonné sur une algèbre de Boole.

Rappelons quelques définitions. Si S est un demi-groupe ordonné, alors l'ensemble $P(S)$ des parties de S est un demi-groupe par rapport à la multiplication suivante :

$$\begin{cases} XY = \{xy \; ; \; x \in X \, , \; y \in Y\} \, , \\ X\emptyset = \emptyset = \emptyset X \, . \end{cases}$$

Ce demi-groupe est un demi-groupe ordonné par rapport à l'inclusion ensembliste, et est aussi résidué au sens que, quels que soient $X \, , Y \in P(S)$, les éléments

$$X \mathbin{.^{\cdot}} Y = \max\{Z \in P(S) \; ; \; YZ \subseteq X\} \qquad \text{et} \qquad X \mathbin{^{\cdot}.} Y = \max\{Z \in P(S) \; ; \; ZY \subseteq X\}$$

existent. Un sous-ensemble non vide H d'un demi-groupe ordonné S est appelé <u>réflexif</u>, si, et seulement si, quel que soit $x \in S$, $H \mathbin{.^{\cdot}} \{x\} = H \mathbin{^{\cdot}.} \{x\}$ (et dans ce cas, nous écrivons $H:\{x\}$). Associée à un sous-ensemble réflexif H , nous avons <u>l'équivalence de Dubreil</u> R_H définie par $x \equiv y \; (R_H) \iff H:\{x\} = H:\{y\}$. Dans le problème des homomorphismes sur un groupe, cette équivalence était la clé de voûte de la solution ; nous verrons qu'il en est de même dans le problème analogue des homomorphismes sur une algèbre de Boole. Nous dirons qu'un sous-ensemble non vide H de S est un <u>idéal double</u> de S , si, et seulement si, H est à la fois un idéal bilatère de S (c'est-à-dire $HS \subseteq H$ et $SH \subseteq H$) et un idéal de l'ensemble ordonné S (c'est-à-dire $x \in H$ et $y \leq x$ impliquent $y \in H$). Si L est un $\cap$-demi-treillis, nous dirons qu'une application $f : S \to L$ est un <u>homomorphisme</u>, si, et seulement si, $\forall \, x \, , y \in S$, $f(xy) = f(x) \cap f(y)$.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> S <u>un demi-groupe ordonné, et soit</u> H <u>un sous-ensemble non vide de</u> S <u>tel que</u> :

(1) H <u>est un idéal double réflexif de</u> S ;
(2) $\forall \, x \in S$, $H:\{x\} = H:\{x^2\}$.

Alors l'équivalence de Dubreil R_H est une congruence, et S/R_H est un $\wedge$-demi-treillis à élément nul $G_H = \{x \in S\ ;\ H:\{x\} = S\} = H:S$, et l'application canonique $\natural_H : S \to S/R_H$ est un épimorphisme isotone. Le $\wedge$-demi-treillis S/R_H est un treillis, si, et seulement si, H satisfait en plus à la propriété suivante :

(3) $\forall\ x\ ,\ y \in S\ ,\ \exists\ z \in S$ tel que $H:\{x\ ,\ y\} = H:\{z\}$;

et si S/R_H est un treillis, il est nécessairement distributif. Inversement, si L est un treillis distributif à élément nul, et si $f : S \to L$ est un épimorphisme isotone, alors $\operatorname{Ker} f = \{x \in S\ ;\ f(x) = 0_L\}$ satisfait aux propriétés (1), (2), et (3).

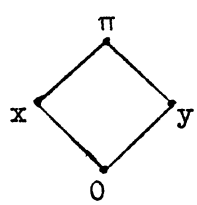
Remarques.

1° Si S est *a priori* ordonné en $\cup$-demi-treillis, on peut remplacer la condition (3) par la condition suivante :

(3') $H:\{x \cup y\} = H:\{z\}$.

Si S est un gerbier, la propriété (3') est automatiquement vérifiée.

2° Il est faux, en général, que tout treillis distributif à élément nul, qui est image homomorphe de S, soit de la forme S/R_H, où H satisfait aux propriétés (1), (2), (3). Par exemple, soit S le demi-groupe ordonné dont le tableau de Cayley et le diagramme de Hasse sont les suivants :



	π	x	y	0
π	π	x	0	0
x	x	x	0	0
y	0	0	0	0
0	0	0	0	0

,

et soit L le treillis distributif à élément nul dont le diagramme de Hasse est :

.

L'application $f : S \to L$, définie par $f(\pi) = \gamma$, $f(x) = \beta$, $f(0) = f(y) = \alpha$, est un épimorphisme isotone. Cependant il est facile de vérifier que les seuls sous-ensembles H de S qui satisfont aux propriétés (1), (2), (3) sont les ensembles $\{0\}$, $\{0\ ,\ x\}$, $\{0\ ,\ y\}$, $\{0\ ,\ x\ ,\ y\}$, S, et pour chacun de ces sous-ensembles, l'ensemble quotient S/R_H n'a au plus que deux éléments.

Un sous-ensemble non vide H de S qui satisfait aux propriétés (1), (2), et (3) ci-dessus sera appelé une pré-base de S. Une pré-base H de S sera appelée forte, si, et seulement si, $H = H:S$.

THÉORÈME 2. - Si H est une pré-base de S, alors $H:S$ est une pré-base forte. Pour toute pré-base forte H de S, le treillis $L = S/R_H$ est faiblement complémenté (c'est-à-dire, $\forall\, a, b \in L$, $a \neq b$, $\exists\, c \in L$ tel que $a \cap c = 0$ et $b \cap c \neq 0$). Tout treillis faiblement complémenté et distributif L, qui est image homomorphe de S, est de la forme S/R_H, où H est une pré-base forte de S, et il y a une bijection entre l'ensemble de telles images et l'ensemble des pré-bases fortes de S.

COROLLAIRE. - Un treillis L à élément nul 0 est 0-distributif (c'est-à-dire, $a \cap x = 0$ et $a \cap y = 0$ impliquent $a \cap (x \cup y) = 0$), si, et seulement si, $R_{\{0\}}$ est une congruence, et $L/R_{\{0\}}$ est faiblement complémenté et distributif.

Pour obtenir les quotients qui sont des algèbres de Boole, nous avons besoin de la notion suivante. Un sous-ensemble non vide H de S sera appelé une base de S, si, et seulement si, H est tel que :

(1) H est un idéal double réflexif de S ;

(2) $\forall\, x \in S$, $H:\{x\} = H:\{x^2\}$;

(3) $\forall\, x \in S$, $\exists\, x^0 \in S$ tel que $H:(H:\{x\}) = H:\{x^0\}$.

THÉORÈME 3. - Si H est une base de S, alors S/R_H est une algèbre de Boole. Toute algèbre de Boole qui est image homomorphe de S est de la forme S/R_H, où H est une base de S, et il y a une bijection entre l'ensemble des homomorphismes isotones de S sur une algèbre de Boole et l'ensemble des bases fortes de S.

COROLLAIRE. - Un treillis L à élément nul 0 est 0-distributif et quasi-complémenté (c'est-à-dire, $\forall\, x \in L$, $\exists\, x^0 \in L$ tel que $x \cap x^0 = 0$ et $x \cup x^0$ est dense), si, et seulement si, $R_{\{0\}}$ est une congruence, et $L/R_{\{0\}}$ est une algèbre de Boole.

Renforçons maintenant la notion d'homomorphisme. Soient E, F deux ensembles ordonnés. Une application $f : E \to F$ est appelée résiduée, si, et seulement si, elle est isotone, et il existe une application isotone (nécessairement unique) $f^+ : F \to E$, telle que $f^+ \circ f \geqslant id_F$ et $f \circ f^+ \leqslant id_E$ [autrement dit : si, et seulement si, $\forall\, y \in F$, $\exists\, x \in E$ tel que $f^{-1}[\leftarrow, y] = [\leftarrow, x]$; ou bien : si, et seulement si, $\forall\, y \in F$, $\max\{x \in E \,;\, f(x) \leqslant y\}$ existe].

THÉORÈME 4. - Soit S un demi-groupe ordonné, et soit B une algèbre de Boole. Si $f : S \to B$ est un épimorphisme isotone, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est résidué ;

(2) $\operatorname{Ker} f$ admet un élément maximum qui est équirésiduel.

Les théorèmes 3 et 4 donnent le résultat suivant.

THÉORÈME 5. - Un demi-groupe ordonné S admet une algèbre de Boole comme image par un homomorphisme résidué, si, et seulement si, S admet un élément t tel que :

(1) t est quasi-intègre [$\forall x \in S$, $xt \leq t$, $tx \leq t$] ;

(2) t est équi-résiduel ;

(3) $\forall x \in S$, $t:x = t:x^2$.

Toute algèbre de Boole qui est image de S par un homomorphisme résidué est de la forme S/A_t (où A_t est l'équivalence de Molinaro définie par

$$x \equiv y \quad (A_t) \iff t:x = t:y \quad) ,$$

pour un élément t qui satisfait aux propriétés (1), (2), (3), et il y a une bijection entre l'ensemble de telles images et l'ensemble des éléments t qui satisfont à (1), (2), (3), et à :

(4) $t = t:(t:t)$.

COROLLAIRE. - Soit S un $\cap$-demi-treillis. Il y a une bijection entre l'ensemble des épimorphismes résidués de S sur une algèbre de Boole et l'ensemble des éléments de S qui sont résidués.

Appelons maintenant demi-groupe de Brouwer, un demi-groupe ordonné dans lequel tout élément satisfait aux propriétés (1), (2), (3) du théorème 5. En particulier, tout demi-treillis de Brouwer (demi-treillis implicatif) est demi-groupe de Brouwer. Le résultat suivant caractérise ces demi-groupes.

THÉORÈME 6. - Un demi-groupe ordonné S est un demi-groupe de Brouwer, si, et seulement si, S est abélien, résidué, et tel que

$$\forall x \in S , \qquad B_x = F_x \quad \text{et} \quad S/F_x \quad \text{est idempotent}$$

(où B_x et F_x sont les équivalences de Molinaro définies par

$$a \equiv b \quad (B_x) \iff a:x = b:x \qquad \text{et} \qquad a \equiv b \quad (F_x) \iff ax = bx \quad) .$$

La condition que chaque demi-groupe quotient S/F_x soit idempotent (rencontrée dans le résultat précédent) implique beaucoup sur la structure du demi-groupe, comme l'indique le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Soit S un demi-groupe abélien. Alors S est un demi-treillis de 0-demi-groupes, si, et seulement si, chaque demi-groupe quotient S/F_x est idempotent.

Ce résultat nous permet de décrire complètement la structure des demi-groupes de Brouwer.

THÉORÈME 8. - S est un demi-groupe de Brouwer, si, et seulement si, S est un demi-treillis de Brouwer de 0-demi-groupes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLYTH (T. S.). - On isotone homomorphic boolean images of ordered semigroups, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Section A, t. 68, 1970, p. 211-228.

[2] BLYTH (T. S.). - Homomorphic images of $\cup$-semigroups, Bull. Soc. royale Sc. Liège, t. 38, 1969, p. 149-154.

[3] BLYTH (T. S.). - Sur les demi-groupes de Brouwer et Glivenko, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 15-40.

[4] JANOWITZ (M. F.) and JOHNSON (C. S., Jr). - A note on Brouwerian and Glivenko semigroups, J. of London math. Soc., Series 2, t. 1, 1969, p. 733-736.

(Texte reçu le 5 octobre 1970)

Thomas S. BLYTH
Mathematical Institute
University of St-Andrews
St-ANDREWS, Scotl. (Grande-Bretagne)