Thérèse Merlier

Sous-demi-groupes convexes des demi-groupes totalement ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 2 (1969-1970), exp. nº DG 7, p. DG1-DG5

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70
Demi-groupes, n° 7, 5 p.

SOUS-DEMI-GROUPES CONVEXES DES DEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS

par Thérèse MERLIER

Soit S un demi-groupe ; S est un demi-groupe ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre compatible avec la multiplication. Ce demi-groupe S est dit réticulé s'il est ordonné en treillis ($\vee$ et $\wedge$ désignant respectivement les bornes supérieure et inférieure de deux éléments) et si on a les distributivités de la multiplication par rapport à $\vee$ et $\wedge$.

Dans un demi-groupe S réticulé, un sous-demi-groupe H est dit "s. t. c." s'il est sous-treillis convexe de S. Les sous-demi-groupes s. t. c. forment une famille de Moore si nous admettons la partie $\emptyset$ comme sous-demi-groupe s. t. c. Nous désignerons par S_x le sous-demi-groupe s. t. c. engendré par x. Si S est totalement ordonné, S_x est le sous-demi-groupe convexe engendré par x.

Dans un demi-groupe ordonné, un élément a est f-positif (f-négatif) si $a \leqslant a^2$ $(a^2 \leqslant a)$: Soient P l'ensemble des éléments f-positifs, et N l'ensemble des éléments f-négatifs. $P \cap N$ est l'ensemble des idempotents de S ; notons qu'en général $P \cup N$ est distinct de S.

Remarquons immédiatement que, dans un demi-groupe réticulé S, tout sous-demi-groupe s. t. c. H est réunion de sous-demi-groupes S_x.

PROPOSITION 1. - Dans un demi-groupe réticulé S,

$$S_x = \{y \in S \; ; \; \exists \text{ entiers } p_1 , \ldots , p_r , q_1 , \ldots , q_\ell \; ; \; x^{p_1} \wedge \ldots \wedge x^{p_r} \leqslant y \leqslant x^{q_1} \vee \ldots \vee x^{q_\ell}\}$$

La démonstration est classique.

Remarquons que, dans le cas où $S = P \cup N$,

$$S_x = \{y \in S \; ; \; \exists \text{ entiers } p \text{ et } q , \; x^p \leqslant y \leqslant x^q\}$$

et on peut choisir p ou q égal à 1.

PROPOSITION 2. - Dans un demi-groupe réticulé S, tel que $S = P \cup N$, $S_x = S_y$ entraîne $x = y$.

$S_x = S_y$ si, et seulement si, $x \in S_y$ et $y \in S_x$; soit, puisque $S = P \cup N$, si $y^{p_1} \leqslant x \leqslant y^{q_1}$ et $x^{p_2} \leqslant y \leqslant x^{q_2}$, pour certains entiers p_i, q_i.

Plusieurs cas sont à distinguer :

(α) x et $y \in P$.

$$y \leqslant y^{p_1} \leqslant x \quad \text{et} \quad x \leqslant x^{p_2} \leqslant y \; .$$

D'où $x = y$.

(β) $x \in P$ et $y \in N$:

$$x \leqslant y^{q_1} \leqslant y \text{ , donc } x \leqslant y \text{ , et par suite } x^{q_2} \leqslant y^{q_2} \leqslant y \; .$$

D'où $y = x^{q_2} = y^{q_2}$

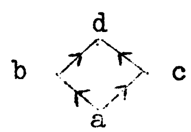
Si $q_2 = 1$, $y = x$.

Si $q_2 > 1$, y est idempotent, et $y = y^{p_1} \leqslant x \leqslant y^{q_1} = y$. D'où $x = y$ **dans tous** les cas.

(γ) Les cas " x et $y \in N$ ", et " $x \in N$ et $y \in P$ " sont semblables.

Remarque 1. - Dans un demi-groupe réticulé, la propriété " $S_x = S_y$ entraîne $x = y$ " peut être vérifiée sans que $S = P \cup N$.

Considérons, par exemple, le zéro-demi-groupe S suivant $S = \{a , b , c , d\}$, de zéro c . Ordonnons S de sorte que le diagramme de Hasse soit le suivant :



$c = b^2$ n'est pas comparable à b , dans ce demi-groupe réticulé. Cependant,

$$S_a = \{a , c\} \; ; \quad S_b = S \; ; \quad S_c = \{c\} \; ; \quad S_d = \{d , c\} \; .$$

Rappelons les définitions suivantes :

Un demi-groupe S ordonné est dit non négativement ordonné si, $\forall a \in S$, $\forall b \in S$,

$$ab \nleqslant a \; , \qquad ba \nleqslant a \; .$$

Dans le cas où S est totalemnt ordonné, nous retrouvons la notion de positivement ordonné $(a \leqslant ab \; , \; a \leqslant ba)$. Non positivement ordonné se définit de façon duale.

Un demi-groupe S ordonné est archimédien si :

$$a \text{ et } b \in P \; , \; a < b \implies \exists \, n \; , \; a^n \nleqslant b \; ;$$
$$a \text{ et } b \in N \; , \; a < b \implies \exists \, p \; , \; a \nleqslant b^p \; .$$

PROPOSITION 3. - Dans un demi-groupe S réticulé, tel que $S = P \cup N$, S_x est un sous-demi-groupe archimédien, non négativement ordonné ou non positivement ordonné.

Soit $x \leqslant x^2$ par exemple. Montrons que, pour tout y de S_x, $y \leqslant y^2$.

$$y \in S_x \Longrightarrow x \leqslant y \leqslant x^p .$$

D'où $y \leqslant x^p \leqslant y^p$; comme y est comparable à y^2, $y \leqslant y^2$ si $p > 1$ (Si $p = 1$, $y = x$). Il est clair que S_x est archimédien.

Soient y et $y' \in S_x$. Si nous avions $yy' < y'$, nous en déduirions, par isotonie, $y^k y' < y'$ pour tout entier k. Or $x \leqslant y' \leqslant x^p \leqslant y'^p$ et $x \leqslant y \leqslant x^p$ (On peut choisir le même entier p puisque $S = P \cup N$). D'où

$$y' \leqslant y'^2 \leqslant x^p y' \leqslant y^p y' < y' .$$

Ceci est impossible, donc $yy' \nless y'$, et S_x est non négativement ordonné.

COROLLAIRE 1. - Dans un demi-groupe totalement ordonné, S_x est un sous-demi-groupe archimédien, positivement ou négativemnt ordonné.

Dans un demi-groupe réticulé (totalement ordonné), la famille des sous-demi-groupes s. t. c. (convexes) ne se réduit à S, que si S est lui-même réduit à un seul élément [2]. D'autre part, les sous-demi-groupes convexes forment un sous-inf-demi-treillis de $P(S)$, dont le plus petit élément existe, mais peut être vide.

Nous allons donner maintenant des conditions nécessaires et suffisantes, pour que les sous-demi-groupes convexes forment un sous-treillis de $P(S)$, ou une chaîne pour l'inclusion ensembliste.

THÉORÈME 1. - Soit S un demi-groupe totalement ordonné. Les sous-demi-groupes convexes de S forment une chaîne si, et seulement si, S est archimédien et positivement ordonné (ou négativement ordonné).

Supposons S archimédien et positivement ordonné. Soient H et H' deux sous-demi-groupes convexes tels que $H \nsubseteq H'$; il existe alors $h \in H$ et $h \notin H'$. Puisque S est totalement ordonné et archimédien, nous avons, si h' est un élément quelconque de H', $h < h' \leqslant h^n$ ou $h' < h \leqslant h'^n$. Seul le premier cas est réalisable, puisque $h \notin H'$. Par suite, $h' \in S_h$ et $H' \subseteq H$.

Réciproquement, supposons que les sous-demi-groupes convexes forment une chaîne. S n'est pas un demi-groupe idempotent, car dans un tel demi-groupe la condition précédente ne peut être vérifiée puisque $S_x = \{x\}$. Donc il existe au moins un x tel que $x < x^2$ par exemple. Dans ce cas, tout élément y de S est f-positif, puisque $S_x \subset S_y$ ou $S_y \subset S_x$. Soient alors a et $b \in S$; S_a est contenu dans S_b par exemple, d'où a et $b \in S_b$. Comme ce dernier est, d'après le corollaire 1, positivement ordonné et archimédien, il en est de même de S.

THÉORÈME 2 . - Dans un demi-groupe totalement ordonné, les sous-demi-groupes convexes forment un treillis, sous-treillis de $P(S)$, de plus petit élément non vide si, et seulement si, S est un nil-demi-groupe.

Soit S un nil-demi-groupe totalement ordonné de zéro z . Puisque pour tout x de S , il existe un entier n tel que $x^n = z$, $\{z\}$ est le plus petit sous-demi-groupe convexe de S . Il suffit de montrer que la réunion de deux sous-demi-groupes convexes l'est encore. Si S_x et S_y sont deux sous-demi-groupes convexes quelconques engendrés par x et y , il est facile de voir que $S_x \cup S_y$ est encore un sous-demi-groupe, $S_x \cup S_y$ est évidemment convexe puisque $S_x \cap S_y$ est non vide. Tout semi-groupe convexe étant réunion de S_x , le résultat voulu s'en déduit.

Réciproquement, supposons que les sous-demi-groupes convexes de S forment un sous-treillis de $P(S)$ avec pour plus petit élément $H \neq \emptyset$. H est nécessairement de la forme S_z , et comme nous avons toujours $S_{z^2} \subseteq S_z$ et (Proposition 2) $z^2 = z$. Cet idempotent z est évidemment le seul. Soit $a \in S$; nous savons que $z \in S_a$ pour tout a de S . Si $a \lessgtr a^2$, $a \lessgtr z \lessgtr a^n$. D'où $a^n \lessgtr z^n = z \lessgtr a^n$ et $a^n = z$; il en est de même si $a^2 \lessgtr a$; S est donc bien un nil-demi-groupe.

Remarque 2. - Le théorème 2 donne une autre condition équivalente à celles données par E. Ja. GABOVIČ [1], à savoir :

"Un demi-groupe totalement ordonné est un nil-demi-groupe si, et seulement si, il satisfait l'une des conditions suivantes :

(a) S est archimédien et périodique,

(b) S est réunion d'une suite croissante de demi-groupes nilpotents convexes."

THÉORÈME 3. - Soit S un demi-groupe totalement ordonné. Si les sous-demi-groupes convexes de S forment un treillis, sous-treillis de $P(S)$, de plus petit élément vide, alors ce treillis est une chaîne.

Pour que ce treillis soit une chaîne, il suffit de montrer (théorème 1) que S est positivement ordonné (ou négativement ordonné) et archimédien. Supposons qu'il existe $a \in N - P$ et $b \in P$: si $a < b$, $S_b \cap S_{a^2} = \emptyset$ et $S_{a^2} \cup S_b$ ne serait pas convexe $(a \notin S_{a^2} \cup S_b$ et $a^2 < a < b)$ Si $b < a$, le produit ab est idempotent [3]. Dans ce dernier cas, S_{ab} est le plus petit sous-demi-groupe convexe de S . Par suite, l'hypothèse $a \in N - P$, $b \in P$ est absurde, et S égale P par exemple.

Soient a et b deux éléments quelconques de S avec $a < b$, $a < a^2$, $b < b^2$. Il est clair que $S_a \cap S_b$ est vide si, et seulement si, $a^n < b$ pour tout n . Mais, dans ce cas, $S_a \cup S_{b^2}$ ne serait pas convexe $(a^n < b < b^2)$, donc il existe x appartenant à $S_a \cap S_b$ et $a \leqslant b \leqslant a^p$. D'où : S_b est contenu dans S_a .

En appliquant le corollaire 1, on voit que S est positivement ordonné et archimédien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABOVIČ (E. Ja). - Demi-groupes périodiques totalement ordonnés [en Russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 23, 1968, p. 225-226.

[2] KHION (Ja. V.). - Sur les demi-groupes partiellement ordonnés dans lesquels les sous-demi-groupes convexes propres sont disjoints [en Russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat., t. 27, 1963, p. 67-74.

[3] SAITO (Tôru). - Regular elements in an ordered semigroup , Pacif. J. of Math., t. 13, 1963, p. 263-295.

Mlle Thérèse MERLIER
15 boulevard de la République
92 - FONTENAY-AUX-ROSES

(Texte reçu le 15 septembre 1970)