Bernhard H. Neumann

Quelques remarques sur les demi-groupes cancellatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 2 (1969-1970), exp. nº DG 11, p. DG1-DG2

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A10_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70
Demi-groupes, n° 11, 2 p.

QUELQUES REMARQUES SUR LES DEMI-GROUPES CANCELLATIFS

par Bernhard H. NEUMANN

Les demi-groupes cancellatifs (c'est-à-dire vérifiant la règle de simplification) occupent une position intermédiaire entre les demi-groupes généraux et les groupes ; mais ils présentent leurs difficultés propres. Les remarques suivantes sont extraites d'une note qui s'occupe principalement des demi-groupes cancellatifs algébriquement clos [3].

Une question qui a occupé les mathématiciens est celle de la possibilité, ou non, de plonger un demi-groupe cancellatif dans un groupe. On connaît bien le théorème suivant de O. ORE (voir par exemple CLIFFORD and PRESTON [1], § 1.10) :

Le demi-groupe cancellatif A peut être plongé dans un groupe s'il est "réversible à gauche", c'est-à-dire si tout couple d'éléments de A admet des multiples communs à droite $[\forall\, a\, ,\, b \in A\, ,\;\; aA \cap bA \neq \emptyset]$; et, par symétrie, la même conclusion s'obtient si A est réversible à droite $[\forall\, a\, ,\, b \in A\, ,\;\; Aa \cap Ab \neq \emptyset]$.

On peut généraliser ce théorème de la façon suivante :

Le demi-groupe cancellatif A peut être plongé dans un groupe si tout couple d'éléments admet des multiples communs à droite ou à gauche, c'est-à-dire,

$$\forall\, a\, ,\, b \in A\, ,\quad (aA \cap bA) \cup (Aa \cap Ab) \neq \emptyset\, .$$

Il suffit de remarquer qu'un demi-groupe cancellatif A, qui ne peut pas être plongé dans un groupe, contient, selon le critère d'ORE, deux éléments a, b qui n'ont pas de multiple commun à droite, $aA \cap bA = \emptyset$, et aussi deux éléments c, d sans multiples communs à gauche, $Ac \cap Ad = \emptyset$. Alors, si $p = asc$, $q = btd$ avec s, t éléments quelconques de A, on a

$$pA \cap qA \subseteq aA \cap bA = \emptyset \quad \text{et} \quad Ap \cap Aq \subseteq Ac \cap Ad = \emptyset\, .$$

C'est une chose remarquable que ce fait presque trivial n'a été découvert qu'il y a quelques mois.

Dans la théorie des groupes, le produit libre généralisé, ou produit libre à sous-groupes amalgamés, est très utile : mais dans la théorie des demi-groupes, le produit libre généralisé n'existe que dans des cas très spéciaux. Dans le cas de demi-groupes cancellatifs, il y a un théorème utile de J. M. HOWIE :

Le produit libre généralisé de deux demi-groupes cancellatifs existe si leur demi-groupe commun est un groupe.

La démonstration originale de HOWIE est une adaptation de celle de O. SCHREIER dans le cas des groupes, c'est-à-dire une construction explicite du produit libre généralisé. On peut donner une démonstration plus simple, utilisant le "produit permutationnel", ou ce qui lui correspond dans le cas des demi-groupes; ce n'est qu'une traduction presque triviale de la méthode permettant d'établir le même résultat pour les groupes, et il n'est pas nécessaire de la répéter ici.

Il faut cependant un outil différent, pour remplacer le produit libre généralisé dans le cas où il n'existe pas : c'est le fait suivant, dont la démonstration est beaucoup trop longue pour être reproduite ici :

Soit A un demi-groupe cancellatif quelconque, soient P et Q deux sous-ensembles de l'ensemble des éléments de A, de même cardinal : $|P| = |Q|$; et soit $\varphi : P \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow Q$ une bijection de P sur Q. Alors A peut être plongé dans un demi-groupe cancellatif B, qui contient en outre quatre éléments s, t, s', t' tels que, pour chaque $a \in A$, on ait $sat = s'\varphi(a)t'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. Vol. 1 and 2. - Providence, American mathematical Society, 1961, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[2] HOWIE (J. M.). - An embedding thorem with amalgamation for cancellative semigroups, Proc. Glasgow math. Assoc., t. 6, 1963, p. 19-26.

[3] NEUMANN (B. H.). - Some remarks on cancellative semigroups, Math. Z. (à paraître).

Bernhard H. NEUMANN
Prof. Australian nat. University
Box 4, G. P. O.
CANBERRA, A. C. T. (Australie)

(Texte reçu le 5 octobre 1970)