Michel Hacque

Sur la notion de localisation exacte et de localisation plate

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 1 (1969-1970), exp. nº 11, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A9_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70, n° 11, 17 p.

2 mars 1970

SUR LA NOTION DE LOCALISATION EXACTE ET DE LOCALISATION PLATE

par Michel HACQUE

Introduction. - Dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$, au sens de P. GABRIEL [2], est caractérisée par une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{L}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ déterminée par les objets $\mathcal{C}$-fermés, le foncteur canonique $\tilde{S}$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}$ admet un adjoint à gauche $\tilde{T}$, qui est un foncteur exact à gauche de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}$.

Le foncteur localisation $L = \tilde{S} \circ \tilde{T}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est exact à gauche, et il est accompagné du morphisme fonctoriel d'adjonction : $\Psi : I_{\mathcal{A}} \dashrightarrow L$.

Avec ces notations, une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est plate (resp. exacte) si le foncteur localisation L commute aux limites inductives (resp. aux limites inductives finies).

Cet exposé se propose d'examiner la notion de localisation exacte et la notion de localisation plate dans une catégorie de modules. Il va de soi que certains des résultats obtenus restent valables sous des hypothèses plus générales que le lecteur pourra préciser. Les principales propriétés des localisations exactes et des localisations plates ont été annoncées dans [5], et leurs démonstrations complètes figurent dans [4].

1. Hypothèses et notations.

Etant donné un anneau A , avec élément unité, soit $\mathcal{A} = \text{mod } A$ la catégorie des modules unitaires à gauche sur A .

Une mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$, stable par sous-objets, stable par limites projectives et telle que tout objet de $\mathcal{M}$ se plonge dans un objet de $\mathcal{M}$, injectif dans $\mathcal{A}$ ([6] et [3]).

La terminologie relative à la localisation, en particulier en ce qui concerne les sous-catégories fermées, épaisses, localisantes et les ensembles topologisants et idempotents, sera celle de [2], de [4] ou de [1] (ex. 17 à 25, p. 157-165).

Une localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$ peut être caractérisée par l'une des données suivantes :

(a) Une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$.

(b) Un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de A .

(c) Un <u>système localisant</u> (L , Ψ) constitué par un <u>foncteur localisation</u> L exact à gauche de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ et un morphisme fonctoriel $\Psi : I_{\mathcal{A}} \to L$ tel que ΨL et $L\Psi$ soient des isomorphismes fonctoriels égaux de L sur L^2 .

(d) Une sous-catégorie <u>locale</u> $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$, telle que le foncteur canonique $\tilde{S}$ de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{A}$ admette un adjoint à gauche $\tilde{T}$, qui est un foncteur exact à <u>gauche</u> de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}$.

(e) Une <u>momo-sous-catégorie</u> $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$.

Lorsque ces données caractérisent une même <u>localisation</u> $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$, elles sont reliées, par exemple, par les conditions suivantes :

L'ensemble $\mathfrak{F}$ est constitué par les idéaux à gauche I de A , tels que A/I soit un objet de $\mathcal{C}$. Réciproquement, la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$, caractérisée par les objets $\mathfrak{F}$-négligeables.

La sous-catégorie locale $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$, caractérisée par les objets de $\mathcal{A}$ invariants pour le système localisant (L , Ψ) , c'est-à-dire par les objets M pour lesquels $\Psi_M : M \to LM$ est un isomorphisme, et alors $\tilde{T}$ est caractérisé par $L = \tilde{S} \circ \tilde{T}$. Réciproquement, le système localisant (L , Ψ) est caractérisé par $L = \tilde{S} \circ \tilde{T}$, et Ψ est le morphisme fonctoriel d'adjonction.

La sous-catégorie locale $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets $\mathcal{C}$-fermés. Réciproquement, la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est le noyau du foncteur localisation L ou du foncteur $\tilde{T}$.

La mono-sous-catégorie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ caractérisée par les objets M de $\mathcal{A}$ vérifiant $\mathfrak{F}M = 0$. Réciproquement, la sous-catégorie locale $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}$, caractérisée par les objets purs de $\mathcal{M}$ [3].

Dans la suite, la <u>localisation</u> $\tilde{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{A}$ sera caractérisée par l'une quelconque de ces données.

De plus, soit T le foncteur canonique, exact, de $\mathcal{A}$ dans la catégorie quotient $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ [2]. Soit $A_{\mathfrak{F}}$ l'opposé de l'anneau des endomorphismes de TA dans $\mathcal{A}/\mathcal{C}$, et soit $\Psi_A : A \to A_{\mathfrak{F}}$ l'homomorphisme d'anneaux défini par T , en identifiant A à l'opposé de l'anneau de ses endomorphismes dans $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}} = \mathrm{mod}\, A_{\mathfrak{F}}$ la catégorie des modules à gauche, unitaires, sur $A_{\mathfrak{F}}$, et soit $(\Psi_A)_*$ le <u>foncteur restriction des scalaires</u> de $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$ dans $\mathcal{A}$.

Il existe un foncteur S' de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$ caractérisé par la condition suivante : pour tout objet P de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$, l'objet $S'P$ de $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$ est le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(TA , P)$ muni d'une structure de $A_{\mathfrak{F}}$-module à gauche par la composition par les endomorphismes de TA dans $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$.

Le foncteur section $S = (\Psi_A)_* \circ S'$ de $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{A}$ est adjoint à droite au foncteur T , et il est possible de supposer que $L = S \circ T = (\Psi_A)_* \circ S' \circ T$.

Le A-module à gauche défini sur l'anneau $A_{\mathfrak{F}}$ par Ψ_A est donc $(\Psi_A)_* A_{\mathfrak{F}} = LA$, noté également $A_{\mathfrak{F}}$.

Plus généralement, tout objet M de $\mathfrak{A}$ détermine un homomorphisme

$$\Psi_M : M \longrightarrow M_{\mathfrak{F}} = LM .$$

Le module $M_{\mathfrak{F}}$ peut être caractérisé par

$$M_{\mathfrak{F}} = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}} \mathrm{Hom}\,(I , M/\mathfrak{F}M) ,$$

et Ψ_M est alors la limite inductive des homomorphismes canoniques de $M = \mathrm{Hom}\,(A , M)$ dans $\mathrm{Hom}\,(I , M/\mathfrak{F}M)$.

Soit $\rho : A \longrightarrow A' = A/\mathfrak{U}$ l'homomorphisme canonique de l'anneau A dans l'anneau quotient A' de A par l'idéal bilatère $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}A$.

L'idéal bilatère $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}A$ est aussi le noyau de l'homomorphisme :

$$\Psi_A : A \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}$$

de l'anneau A dans l'anneau localisé $A_{\mathfrak{F}}$ de A pour $\mathfrak{F}$, dont le module sous-jacent peut être caractérisé par

$$A_{\mathfrak{F}} = \varinjlim_{I \in \mathfrak{F}} \mathrm{Hom}\,(I , A') .$$

2. Localisations exactes.

2.1. DÉFINITION. - Une localisation $\tilde{\mathfrak{F}}$ dans la catégorie $\mathfrak{A}$ est exacte, si le foncteur localisation L commute aux limites inductives finies.

Un foncteur d'une catégorie abélienne dans une autre catégorie abélienne commute aux limites inductives finies si, et seulement si, il commute aux sommes directes finies et aux conoyaux, c'est-à-dire s'il est additif et s'il est exact à droite.

Comme un foncteur localisation L est toujours additif et exact à gauche, une localisation $\tilde{\mathfrak{F}}$ est exacte si le foncteur localisation L est exact à droite, c'est-à-dire si L est exact.

De plus, puisque d'après le corollaire 3 de [2] (p. 369), l'exactitude du foncteur localisation est équivalente à l'exactitude du foncteur section S , une localisation $\tilde{\mathfrak{F}}$ est exacte si le foncteur section S est exact à droite, ou encore, si le foncteur canonique $\tilde{S}$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{A}$ est exact à droite.

2.2. PROPOSITION. - Avec les notations précédentes, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La localisation $\tilde{\mathcal{L}}$ est exacte.

(b) Si M est un sous-objet de Q, et si M et Q sont des objets de $\mathcal{L}$, alors Q/M est un objet de $\mathcal{L}$.

(c) $\mathrm{Ext}^2(N , M) = 0$ pour tout objet N de $\mathcal{C}$ et tout objet M de $\mathcal{L}$.

(d) $\mathrm{Ext}^1(I , M) = 0$ pour tout $I \in \mathfrak{F}$ et pour tout objet M de $\mathcal{L}$.

(e) Pour toute suite exacte de la forme :

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q \xrightarrow{p} P \longrightarrow 0 ,$$

dans laquelle M et Q sont des objets de $\mathcal{L}$, pour tout $J \in \mathfrak{F}$ et tout $u \in \mathrm{Hom}\,(J , P)$, il existe $I \in \mathfrak{F}$, avec $I \subset J$ et $v \in \mathrm{Hom}\,(I , Q)$ tels que $p \circ v$ coïncide avec la restriction de u à I.

Cette proposition améliore et généralise la proposition 7 de [2] (P. 376), qui établit l'équivalence des conditions (a) et (b).

Pour tout objet M de $\mathcal{L}$, une enveloppe injective Q de M dans $\mathfrak{A}$ est aussi un objet de $\mathcal{L}$. Tout objet N de $\mathcal{C}$ détermine une suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^1(N , Q) \to \mathrm{Ext}^1(N , Q/M) \to \mathrm{Ext}^2(N , M) \to \mathrm{Ext}^2(N , Q) ,$$

dans laquelle les termes extrêmes sont nuls puisque Q est injectif.

La condition (b) entraine que Q/M est un objet de $\mathcal{L}$. D'après le corollaire 4.4 de [3], il en résulte $\mathrm{Ext}^1(N , Q/M) = 0$, ce qui implique $\mathrm{Ext}^2(N , M) = 0$. Ainsi, la condition (b) implique la condition (c).

Pour tout objet M de $\mathcal{L}$ et pour tout $I \in \mathfrak{F}$, puisque A/I est un objet de $\mathcal{C}$, la relation $\mathrm{Ext}^1(I , M) = \mathrm{Ext}^2(A/I , M)$ montre que la condition (c) entraine la condition (d).

La condition (d) implique la condition (e) en choisissant $I = J$, puisque $\mathrm{Ext}^1(J , M)$ entraine la surjectivité de l'application canonique

$$\mathrm{Hom}\,(J , Q) \to \mathrm{Hom}\,(J , P) .$$

Les hypothèses de la condition (b) entrainent que $P = Q/M$ est un objet de $\mathfrak{M}$. L'homomorphisme

$$\Psi_P : P \longrightarrow P_{\mathfrak{F}} ,$$

est donc injectif. Pour montrer que P est un objet de $\mathcal{L}$, il suffit donc de montrer que Ψ_P est surjectif.

Tout élément x de $P_{\mathfrak{F}}$ est représenté par un homomorphisme $u \in \mathrm{Hom}\,(J , P)$ pour un certain $J \in \mathfrak{F}$.

La condition (e) entraine qu'il existe $I \in \mathfrak{F}$, avec $I \subset J$ et un homomorphisme $v \in \mathrm{Hom}(I, Q)$ tels que $p \circ v$ coïncide avec la restriction de u à I. Puisque Q est un objet de $\mathfrak{L}$, l'homomorphisme $v \in \mathrm{Hom}(I, Q)$ se prolonge en $\bar{v} \in \mathrm{Hom}(A, Q)$, qui détermine $p \circ \bar{v} = w \in \mathrm{Hom}(A, P)$. La restriction de w à I est donc $p \circ v$, et elle coïncide avec la restriction de u à I, ce qui prouve que les homomorphismes $w \in \mathrm{Hom}(A, P)$ et $u \in \mathrm{Hom}(J, P)$ ont la même image dans $\mathrm{Hom}(I, P)$ et, par suite, aussi dans $P_{\mathfrak{F}}$. Il en résulte que l'élément x de $P_{\mathfrak{F}}$ est l'image par Ψ_P de $w \in \mathrm{Hom}(A, P) = P$. Ainsi, la condition (e) implique la condition (b), ce qui achève la démonstration.

2.3. COROLLAIRE. - La localisation $\tilde{\mathfrak{L}}$ dans $\mathfrak{A}$ est exacte si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) Tout objet M de $\mathfrak{L}$ est injectif dans $\mathfrak{A}$.

(2) L'ensemble $\mathfrak{F}$ possède un sous-ensemble cofinal constitué d'idéaux à gauche projectifs.

En effet, la condition (1) entraine par exemple les conditions (c) et (d).

D'autre part, la condition (2) entraine la condition (e) en choisissant $I \in \mathfrak{F}$, avec $I \subset J$ et I projectif.

2.4. <u>Exemple</u>. - Si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des idéaux à gauche de A, essentiels dans A, et si $\mathfrak{F}_0 = \mathcal{E}^2$ est l'ensemble topologisant et idempotent engendré par $\mathcal{E}$, la localisation $\tilde{\mathfrak{L}}_0$ caractérisée par $\mathfrak{F}_0 = \mathcal{E}^2$ est <u>exacte</u>. En effet, d'après le paragraphe 8.2 de [3], tout objet de la sous-catégorie locale $\mathfrak{L}_0$ est injectif dans $\mathfrak{A}$, et le corollaire 2.3 est applicable.

3. Localisations plates.

Pour tout homomorphisme d'anneaux $\Phi : A \longrightarrow B$, le foncteur restriction des scalaires Φ_* de mod B dans mod A, est un adjoint à droite au foncteur extension des scalaires Φ^* de mod A dans mod B.

Pour toute sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de mod A, associée à un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent, il est facile de vérifier que la sous-catégorie pleine $\mathcal{D}$ de mod B caractérisée par les objets dont l'image par Φ_* est un objet de $\mathcal{C}$, constitue une sous-catégorie localisante de mod B, appelée l'<u>image</u> de $\mathcal{C}$ par Φ.

L'ensemble $\mathfrak{G}$ topologisant et idempotent, associé à $\mathcal{D}$, appelé l'<u>image</u> de $\mathfrak{F}$ par Φ, et noté $\mathfrak{G} = \Phi(\mathfrak{F})$, est constitué par les idéaux à gauche J de B, tels que $\Phi_*(B/J)$ soit un objet de $\mathcal{C}$.

Enfin, un morphisme d'anneaux $\Phi : A \longrightarrow B$ est <u>plat à gauche</u>, si B est un A-module plat à <u>droite</u>.

3.1. Définition. - Une localisation $\tilde{\mathcal{E}}$ dans la catégorie $\mathcal{A}$ est plate si le foncteur localisation L commute aux limites inductives.

Il est immédiat que toute localisation plate est une localisation exacte.

3.2. PROPOSITION. - Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La localisation $\tilde{\mathcal{E}}$ est plate.

(b) Le foncteur localisation L admet un adjoint à droite.

(c) Le foncteur localisation L est isomorphe au foncteur : $(\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$.

(d) L'homomorphisme d'anneaux : $\Psi_A : A \dashrightarrow A_{\mathfrak{F}}$ est un épimorphisme plat à gauche et la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$.

(e) L'image $\mathcal{G} = \Psi_A(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{F}$ par Ψ_A vérifie $\mathcal{G} = \{A_{\mathfrak{F}}\}$.

(f) Le foncteur section S commute aux limites inductives.

La proposition 1 (bis) de [2] (p. 404) montre que la condition (a) entraine la condition (b), et d'après la remarque qui précède cette proposition 1 (bis), la condition (b) entraine la condition (c).

Soient $\Phi' : (\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_* \dashrightarrow I_{\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}}$ et $\Psi' : I_{\mathcal{A}} \dashrightarrow (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$, les morphismes fonctoriels liés à l'adjonction de $(\Psi_A)_*$ et $(\Psi_A)^*$. La condition (c) entraine qu'un système localisant (L , Ψ) peut être caractérisé par

$$L = (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^* \quad \text{et} \quad \Psi = \Psi' .$$

Le morphisme fonctoriel $L\Psi = (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^* \Psi'$ de $L = (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$ dans $L^2 = (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$ est donc un isomorphisme fonctoriel. Puisque le foncteur $(\Psi_A)_*$ est fidèle, il en résulte que le morphisme fonctoriel $(\Psi_A)^* \Psi'$ de $(\Psi_A)^*$ dans $(\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$ est un isomorphisme fonctoriel. D'après les propriétés générales des foncteurs adjoints, le composé $\Phi'(\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)^* \Psi'$ est un isomorphisme fonctoriel de $(\Psi_A)^*$ sur $(\Psi_A)^*$, ce qui entraine alors que le morphisme fonctoriel $\Phi'(\Psi_A)^*$ de $(\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$ dans $(\Psi_A)^*$ est un isomorphisme fonctoriel. Puisque $A_{\mathfrak{F}} = (\Psi_A)^* A$, ce résultat, appliqué à l'objet A de $\mathcal{A}$, donne un isomorphisme :

$$\Phi'_{A_{\mathfrak{F}}} : (\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_* A_{\mathfrak{F}} \longrightarrow A_{\mathfrak{F}} .$$

Comme cet isomorphisme $\Phi'_{A_{\mathfrak{F}}}$ est aussi l'homomorphisme canonique de

$$(\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_* A_{\mathfrak{F}} = A_{\mathfrak{F}} \underset{A}{\otimes} A_{\mathfrak{F}} \quad \text{dans} \quad A_{\mathfrak{F}} ,$$

induit par la multiplication dans $A_{\mathfrak{F}}$, la proposition 1.1 de [8] montre que $\Psi_A : A \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}$ est un épimorphisme d'anneaux. Puisque le foncteur localisation L, caractérisé par $LM = (\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^* M = A_{\mathfrak{F}} \otimes_A M$, est exact, il en résulte que $A_{\mathfrak{F}}$ est un A-module à droite plat. Enfin, puisque le foncteur $(\Psi_A)_*$ est fidèle et puisque la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est le noyau de L , elle est aussi le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$. Ainsi, la condition (c) entraine la condition (d).

Si $\Psi_A : A \dashrightarrow A_{\mathfrak{F}}$ est un épimorphisme d'anneaux, la proposition 2.1 de [7] montre que le foncteur $(\Psi_A)_*$ est pleinement fidèle, ce qui entraine que Φ' est un isomorphisme fonctoriel de $(\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_*$ sur $I_{\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}}$. La sous-catégorie localisante $\mathcal{D} = \Psi_A(\mathcal{C})$ de $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$, image de la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ par Ψ_A , est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$, caractérisée par les objets N de $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$, tels que $(\Psi_A)_* N$ soit un objet de $\mathcal{C}$. La condition (d) entraine alors qu'un tel objet N est isomorphe à $(\Psi_A)^* \circ (\Psi_A)_* N$, qui est nul puisque $\mathcal{C}$ est le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$. Il en résulte que $\mathcal{D}$ ne contient que des objets nuls, ce qui entraine immédiatement la relation $\mathcal{S} = \{A_{\mathfrak{F}}\}$. Ainsi la condition (d) entraine la condition (e).

Avec les notations antérieures, le foncteur S' de $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$ est toujours adjoint à droite au foncteur $T \circ (\Psi_A)_*$ et la proposition 3 de [2] (p. 413) montre que le foncteur $T \circ (\Psi_A)_*$ induit une équivalence entre $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}/\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}/\mathcal{C}$. La condition (e) signifie que $\mathcal{D}$ ne contient que des objets nuls, ce qui entraine que $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}/\mathcal{D}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$. Il en résulte que le foncteur $T \circ (\Psi_A)_*$ détermine une équivalence entre $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$ et $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ et que, par suite, S' détermine une équivalence entre $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}_{\mathfrak{F}}$. Il en résulte que les foncteurs S' et $(\Psi_A)_*$ commutent aux limites inductives, et la relation $S = (\Psi_A)_* \circ S'$ montre que le foncteur section S commute aux limites inductives. Ainsi la condition (e) entraine la condition (f).

Enfin, puisque le foncteur T , qui est un adjoint à gauche, commute toujours aux limites inductives, la relation $L = S \circ T$ montre que la condition (f) entraine la condition (a), ce qui achève la démonstration.

4. Caractérisations des localisations plates.

4.1. - LEMME. - Si un homomorphisme d'anneaux $\Phi : A \dashrightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche, alors :

(a) Le noyau $\mathcal{C}$ du foncteur extension des scalaires Φ^* , est une sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}$.

(b) L'ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent associé à $\mathcal{C}$ est constitué par les idéaux à gauche I de A , vérifiant l'une des conditions suivantes:

(1) $$B \otimes_A (A/I) = 0 ,$$

(2') $$B\Phi(I) = B \ .$$

En particulier, $\mathfrak{F}$ possède un sous-ensemble cofinal, constitué d'idéaux à gauche de type fini.

(c) Si $\Psi_A : A \dashrightarrow A_{\mathfrak{F}}$ caractérise un localisé de A pour cet ensemble $\mathfrak{F}$, alors il existe un isomorphisme unique u de $A_{\mathfrak{F}}$ sur B, tel que $\Phi = u \circ \Psi_A$.

La démonstration de ces propriétés est aisée, et elle figure dans [4].

4.2. - DÉFINITION. - Un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent d'idéaux à gauche d'un anneau A avec élément unité, est plat s'il vérifie la condition suivante :

(P) "Pour tout $J \in \mathfrak{F}$, il existe $I \in \mathfrak{F}$ et des familles finies $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de J et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'homomorphismes de I dans $A' = A/\mathfrak{F}A$, vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i\ \rho(x_i) = \rho_I \ ,$$

relation dans laquelle ρ est l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathfrak{F}A$ et ρ_I sa restriction à I ".

4.3. LEMME. - Pour toute localisation $\tilde{F}$ dans $\mathfrak{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent d'idéaux à gauche de l'anneau A, est plat.

(b) L'image $\mathfrak{G} = \Psi_A(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{F}$ par Ψ_A vérifie $\mathfrak{G} = \{A_{\mathfrak{F}}\}$.

Puisque l'anneau $A_{\mathfrak{F}}$ est isomorphe à l'opposé de l'anneau des endomorphismes de TA dans $\mathfrak{A}/\mathcal{C}$, si b et c sont des éléments de $A_{\mathfrak{F}}$, représentés par des homomorphismes $f : I \dashrightarrow A'$ et $g : J \dashrightarrow A'$, avec $I \in \mathfrak{F}$ et $J \in \mathfrak{F}$, alors $I' = f^{-1}[\rho(J)]$ est un élément de $\mathfrak{F}$ et le produit $d = bc$ dans $A_{\mathfrak{F}}$ est représenté par le composé : $h = g' \circ f' : I' \dashrightarrow A'$, de la restriction f' de f à I' et de l'homomorphisme $g' : \rho(J) \dashrightarrow A'$, déterminé par g, puisqu'il vérifie $g(\mathfrak{F}A) \subset \mathfrak{F}A' = 0$.

En particulier, si a est un élément de A, l'élément $\Psi_A(a)$ de $A_{\mathfrak{F}}$ est représenté par $f_a : A \dashrightarrow A'$, caractérisé par : $f_a(\alpha) = \rho(\alpha)\ \rho(a)$, qui détermine $f'_a : A' \dashrightarrow A'$, caractérisé par $f'_a(\alpha') = \alpha'\rho(a)$. Le produit $b\cdot\Psi_A(a)$ dans $A_{\mathfrak{F}}$ est donc représenté par $h = f'_a \circ f : I \dashrightarrow A'$, caractérisé par $h(\alpha) = f(\alpha)\ \rho(a)$ pour tout $\alpha \in I$, c'est-à-dire par $h = f.\rho(a)$.

La condition (b) signifie que, pour tout $J \in \mathfrak{F}$, l'idéal à gauche de $A_{\mathfrak{F}}$ engendré par $\Psi_A(J)$ est identique à $A_{\mathfrak{F}}$, c'est-à-dire qu'il existe des familles finies

$(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de J et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de $A_{\mathfrak{F}}$, vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{i=n} b_i \, \Psi_A(x_i) = 1 \, .$$

Si la condition (a) est vérifiée, la relation précédente est également vérifiée en choisissant pour b_i l'élément de $A_{\mathfrak{F}}$ représenté par f_i, puisque ρ_I représente l'élément unité de $A_{\mathfrak{F}}$. Ainsi la condition (a) entraine la condition (b).

Réciproquement, si la condition (b) est vérifiée, les éléments b_i de $A_{\mathfrak{F}}$ sont représentés par des homomorphismes $f''_i : I'_i \dashrightarrow A'$ avec $I'_i \in \mathfrak{F}$. Puisque $I' = \bigcap_{i=1}^{i=n} I'_i$ est un élément de $\mathfrak{F}$, il est possible de remplacer I'_i par I' et f''_i par sa restriction f'_i à I'. L'homomorphisme

$$h = \sum_{i=1}^{i=n} f'_i \, \rho(x_i) \, ,$$

de I' dans A' représente donc l'unité de $A_{\mathfrak{F}}$, et comme cette unité est aussi représentée par $\rho : A \dashrightarrow A'$, il existe $I \in \mathfrak{F}$, avec $I \subset I'$, tel que ρ_I soit la restriction de h à I. Si f_i est la restriction de f'_i à I, il en résulte la relation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i \, \rho(x_i) = \rho_I \, .$$

Ainsi, la condition (a) entraine la condition (a), ce qui achève la démonstration.

4.4. - DÉFINITION. - Un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent d'idéaux à gauche d'un anneau A avec élément unité, est de <u>type fini</u> s'il possède un sous-ensemble cofinal constitué d'idéaux à gauche de type fini.

4.5. - PROPOSITION. - Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\mathfrak{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'ensemble $\mathfrak{F}$ est plat.

(b) L'ensemble $\mathfrak{F}$ est de type fini et le foncteur localisation L est exact.

(c) L'ensemble $\mathfrak{F}$ est de type fini, et en posant $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}A$, il vérifie la condition suivante :

($P'_{\mathfrak{U}}$) "Pour tout $J \in \mathfrak{F}$, il existe :

- un idéal de type fini $I \in \mathfrak{F}$, ayant une famille de générateurs $(a_j)_{1\leq j\leq m}$.
- une famille finie $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de J.
- une famille $(v_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ d'éléments de A, ces éléments vérifiant les conditions suivantes :

($Q_{\mathfrak{U}}$) Pour tout indice j : $\sum_{i=1}^{i=n} v_{ij} \, x_i \equiv a_j$ (modulo $\mathfrak{U}$).

$(Q'_{\mathcal{U}})$ Pour tout indice i , toute relation de la forme :

$$\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j a_j \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathcal{U})$$

avec $\lambda_j \in A$, entraine :

$$\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j v_{ij} \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathcal{U}) .$$

Si $\mathfrak{F}$ est plat, le lemme 4.3 et la proposition 3.2 montrent que la localisation $\mathfrak{L}$ vérifie la condition (d) de la proposition 3.2 et le lemme 4.1 entraine alors que $\mathfrak{F}$ est de type fini. Puisque toute localisation plate est exacte, la condition (a) entraine la condition (b).

Le corollaire 2 de [2] (p. 414) montre que la condition (b) entraine la condition (c) de la proposition 3.2 et d'après cette proposition 3.2 et le lemme 4.3, il en résulte que la condition (b) entraine la condition (a).

Compte tenu du fait que tout ensemble $\mathfrak{F}$ plat est de type fini, il est toujours possible de supposer que l'idéal à gauche $I \in \mathfrak{F}$, intervenant dans la condition (P) de la définition 4.2, est de type fini et possède une famille de générateurs $(a_j)_{1 \leq j \leq m}$.

Etant donné un homomorphisme $f : I \to A'$, soit $(v_j)_{1 \leq j \leq m}$ une famille d'éléments de A vérifiant $f(a_j) = \rho(v_j)$ pour tout indice j . Puisque $f(\mathcal{U} \cap I) \subset \mathfrak{F} A' = 0$, toute relation de la forme :

$$\alpha = \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j a_j \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathcal{U})$$

entraine donc :

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^{j=m} \rho(\lambda_j) f(a_j) = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{j=m} \rho(\lambda_j) \rho(v_j) = \rho[\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j v_j] = 0 \ ,$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^{j=m} \lambda_j v_j \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathcal{U}) .$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, la relation ;

$$f[\sum_{j=1}^{j=m} \mu_j a_j] = \sum_{j=1}^{j=m} \rho(\mu_j) \rho(v_j)$$

caractérise bien un homomorphisme $f : I \dashrightarrow A'$.

Ces remarques montrent bien que la donnée d'une famille finie $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'homomorphismes de I dans A' , est équivalente à la donnée d'une famille

$$(v_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$$

d'éléments de A vérifiant la condition $(Q'_{\mathfrak{U}})$.

La relation figurant dans la condition (P) se traduit donc par les relations

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i(a_j)\ \rho(x_i) = \rho_I(a_j)$$

pour tout indice j , c'est-à-dire par les relations :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \rho(v_{ij})\ \rho(x_i) = \rho_I(a_j) ,$$

qui se traduisent par le condition $(Q_{\mathfrak{U}})$.

Il en résulte bien l'équivalence des conditions (a) et (c), ce qui achève la démonstration.

4.6. - THÉORÈME. - Pour toute localisation $\tilde{\mathfrak{F}}$ dans $\mathfrak{A}$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) La localisation $\tilde{\mathfrak{F}}$ est plate.

(b) Le foncteur localisation L admet un adjoint à droite.

(c) Le foncteur localisation L est isomorphe au foncteur $(\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$.

(d) L'homomorphisme d'anneaux : $\Psi_A : A \dashrightarrow A_{\mathfrak{F}}$ est un <u>épimorphisme plat à gauche</u> et la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$ est le noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$.

(e) L'image $\mathcal{G} = \Psi_A(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{F}$ par Ψ_A vérifie $\mathcal{G} = \{A_{\mathfrak{F}}\}$.

(f) Le foncteur section S commute aux limites inductives.

(g) L'ensemble $\mathfrak{F}$ est de type fini et le foncteur localisation L est exact.

(h) L'ensemble $\mathfrak{F}$ est de type fini, et en posant $\mathfrak{U}' = \mathfrak{F}A$, il vérifie la condition $(P'_{\mathfrak{U}})$.

(i) L'ensemble $\mathfrak{F}$ est <u>plat</u> (c'est-à-dire vérifie la condition (P)).

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.2, du lemme 4.3 et de la proposition 4.5.

4.7. - COROLLAIRE. - Si un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent d'idéaux à gauche d'un anneau A avec élément unité, possède un sous-ensemble cofinal constitué d'idéaux projectifs de type fini, alors :

(a) L'ensemble $\mathfrak{F}$ est plat.

(b) L'homomorphisme d'anneaux $\Psi_A : A \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}$ est un épimorphisme plat à gauche.

La condition (a) résulte du corollaire 2.3, qui montre que le foncteur localisation est exect, ce qui entraine la condition (g) du théorème 4.6. La condition (b) en résulte immédiatement.

4.8. - Remarques.

(a) Le théorème 4.6 entraine en particulier que si le foncteur localisation L est isomorphe au foncteur $(\Psi_A)_* \circ (\Psi_A)^*$, c'est-à-dire si $LM = A_{\mathfrak{F}} \otimes_A M$, l'ensemble $\mathfrak{F}$ est de type fini et le foncteur localisation L est exact. Ce résultat constitue une réciproque du corollaire 2 de [2] (p. 414).

(b) D'après un résultat classique, rappelé dans la proposition 2.1 de [8], un idéal à gauche I de A est un idéal projectif de type fini si, et seulement si, il existe des familles finies $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éméments de I et $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ d'homomorphismes de I dans A tels que, pour tout $x \in I$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} g_i(x).x_i = x .$$

Cette caractérisation des idéaux projectifs de type fini, montre donc que les hypothèses du corollaire 4.7, entrainent la condition (P) en choisissant pour I un idéal projectif de type fini contenu dans J.

Il en résulte ainsi une autre démonstration de la condition (a) du corollaire 4.7.

De plus, lorsque $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}A = 0$, la condition (P), qui entraine que l'idéal J est projectif de type fini s'il est possible de choisir $I = J$, exprime en somme une propriété de "projectivité globale" des éléments de l'ensemble $\mathfrak{F}$.

5. Applications aux épimorphismes plats d'anneaux.

Etant donné un anneau A avec élément unité, deux homomorphismes d'anneaux $\Phi : A \longrightarrow B$ et $\Phi' : A \longrightarrow B'$, de source A, seront dits équivalents s'il existe un isomorphisme $u : B' \longrightarrow B$, vérifiant : $\Phi = u \circ \Phi'$.

Pour toute localisation $\tilde{\mathcal{F}}$ dans $\mathfrak{A}$, déterminée par un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent, soit $\lambda(\tilde{\mathcal{F}}) = \mu(\mathfrak{F})$, la classe d'équivalence d'homomorphismes d'anneaux de source A, caractérisé par un homomorphisme canonique $\Psi_A : A \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}$, de A dans le localisé $A_{\mathfrak{F}}$.

Soient λ et μ les applications déterminées par ces conditions.

5.1. - THÉORÈME. - Avec les notations précédentes, pour tout anneau A avec élément unité, l'application λ (resp. μ) est une bijection de l'ensemble des <u>localisations plates</u> $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{A}$ (resp. de l'ensemble des ensembles $\mathfrak{F}$ topologisants, idempotents et <u>plats</u>) sur l'ensemble des classes d'équivalence d'<u>épimorphismes plats à gauche</u> de source A .

Pout toute localisation plate $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{A}$, déterminée par un ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant, idempotent et plat, le théorème 4.6 montre que $\lambda(\mathfrak{L}) = \mu(\mathfrak{F})$ est une classe d'équivalence d'épimorphismes plats à gauche de source A . De plus, les applications λ et μ sont injectives, puisque réciproquement, $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{F}$ sont parfaitement déterminés par la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, noyau du foncteur $(\Psi_A)^*$. Enfin, ces applications sont surjectives, puisque d'après le lemme 4.1, toute classe d'équivalence d'épimorphismes plats à gauche de source A , est l'image par λ d'une localisation $\mathfrak{L}$ dans $\mathfrak{A}$ et que cette localisation est plate puisque la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, qui lui est associée, est le noyau du foncteur Φ^* et par suite du foncteur $(\Psi_A)^*$, ce qui montre que la condition (d) du théorème 4.6 est vérifiée.

5.2. - COROLLAIRE (N. POPESCU et T. SPIRCU [7]). - Pour tout homomorphisme d'anneaux $\Phi : A \dashrightarrow B$, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'homomorphisme d'anneaux $\Phi : A \dashrightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche.

(b) L'ensemble $\mathfrak{F}$ des idéaux à gauche I de A tels que $B\Phi(I) = B$ est topologisant et idempotent (resp. la sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, noyau du foncteur Φ^* , est localisante) et de plus, il existe un isomorphisme $u : A_{\mathfrak{F}} \dashrightarrow B$, tel que $\Phi = u \circ \Psi_A$.

Le lemme 4.1 montre que la condition (a) entraine la condition (b).

Si la sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{A}$, noyau du foncteur Φ^* , est localisante, il est immédiat qu'elle est associée à l'ensemble $\mathfrak{F}$ topologisant et idempotent constitué par les idéaux à gauche I de A tels que $B\Phi(I) = B$.

La seconde hypothèse de la condition (b) implique donc la première. Lorsqu'elle est réalisée, elle entraine que l'image $\mathcal{G} = \Psi_A(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{F}$ par Ψ_A , vérifie $\mathcal{G} = \{A_{\mathfrak{F}}\}$, c'est-à-dire la condition (e) du théorème 4.6, ce qui montre que la condition (b) entraine la condition (a).

5.3. - LEMME. - Etant donnée une partie Σ de l'anneau A , telle que tous les idéaux à gauche de A qui contiennent un élément de Σ , constituent un ensemble $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Sigma}$ topologisant et idempotent (par exemple, une partie multiplicative Σ vérifiant la condition :

(*) "Pour tout $s \in \Sigma$ et tout $a \in A$, il existe $t \in \Sigma$ et $b \in A$, tels que $ta = bs$ ".)

alors, il y a équivalence des conditions suivantes:

(a) L'ensemble $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Sigma}$ est plat.

(b) En posant $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}A$, la partie Σ vérifie la condition suivante :

"Pour tout $\sigma \in \Sigma$, il existe $s \in \Sigma$ et $v \in A$ tels que :

(1) $v\sigma \equiv s$ (modulo $\mathfrak{U}$) .

(2) Toute relation de la forme

$$\lambda s \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathfrak{U}) ,$$

avec $\lambda \in A$, entraine :

$$\lambda v \equiv 0 \quad (\text{modulo } \mathfrak{U}) . "$$

De plus, lorsque Σ est une partie multiplicative vérifiant (*), ces conditions équivalentes sont réalisées lorsque Σ vérifie la condition :

(**) "Si $a \in A$, si $s \in \Sigma$, et si $as = 0$, alors il existe $t \in \Sigma$ tel que $ta = 0$".

La démonstration de ce lemme figure dans [4].

Il convient de remarquer que ce résultat constitue une amélioration du résultat classique (voir par exemple la proposition 5 de [2] (p. 415)) qui assure que les conditions (*) et (**) sont suffisantes pour que $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Sigma}$ soit plat.

5.4. - COROLLAIRE. - Pour tout homomorphisme d'anneaux $\Phi : A \longrightarrow B$ surjectif, il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'homomorphisme surjectif $\Phi : A \longrightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche.

(b) Le noyau $\mathfrak{U}$ de Φ est un idéal bilatère <u>fortement idempotent à gauche</u> [3], c'est-à-dire qu'il vérifie la condition suivante :

"Pour tout $\alpha \in \mathfrak{U}$, il existe au moins un $\beta \in \mathfrak{U}$, tel que $\alpha = \beta\alpha$ ".

Une démonstration de ce corollaire utilisant le lemme 4.3 est donnée dans [4], et une autre démonstration figure dans [3].

5.5. - <u>Remarque</u>. - Les idéaux bilatères fortement idempotents à gauche de A interviennent dans la caractérisation des mono-sous-catégories $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{A}$ qui sont abéliennes ou localisantes [3].

5.6. - <u>Commentaires</u>.

(a) La condition (P) qui figure dans la définition des ensembles $\mathfrak{F}$ topologisants, idempotents et plats présente l'intérêt d'une analogie formelle avec la caractérisation des idéaux à gauche projectifs de type fini.

La condition $(P'_{\mathfrak{U}})$ donne une caractérisation "interne" des ensembles $\mathfrak{F}$ topologisants, idempotents et plats. Elle est techniquement compliquée, mais elle est à comparer aux caractérisations de la platitude d'un module, de même style, données dans [1].

(b) Les résultats obtenus précisent et complètent ceux de [7]. En effet, ils donnent par exemple des critères permettant de reconnaitre qu'un homomorphisme d'anneaux $\Phi : A \dashrightarrow B$ est un épimorphisme plat à gauche, mais ils font intervenir le but B de Φ. Ils ne permettent pas d'obtenir la construction (tout au moins théorique) de tous les épimorphismes plats à gauche de source donnée A. Le théorème 4.1 fournit cette possibilité grâce à la considération des ensembles $\mathfrak{F}$ topologisants, idempotents et plats d'idéaux à gauche de A, caractérisés de façon "interne".

6. Exemples de localisations plates.

Les exemples les plus simples de localisations plates sont ceux déterminés par une partie multiplicative Σ de l'anneau A vérifiant les conditions (*) et (**). Dans le cas où A est commutatif, ces conditions sont automatiquement vérifiées, et les exemples obtenus redonnent les propriétés classiques des anneaux de fractions $\Sigma^{-1} A$ et des modules de fractions $\Sigma^{-1} M$ [1].

Un autre exemple intéressant peut être fourni par ce qui va suivre.

En reprenant les notations de l'exemple 2.4, si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des idéaux à gauche de A, essentiels dans A, cet ensemble $\mathcal{E}$ est toujours topologisant. L'idéal singulier $\mathcal{E}A$ de A qui est le plus grand sous-module $\mathcal{E}$-négligeable de A est constitué par les éléments de A dont l'annulateur est essentiel.

Si $\mathcal{E}A = 0$, il est facile de vérifier que $\mathcal{E}$ est aussi idempotent, c'est-à-dire que $\mathcal{E} = \mathcal{E}^2 = \mathfrak{F}_0$ (voir par exemple le lemme 1 de [2] (p. 416) ou l'exercice 24 de [1] (p. 164)).

Il convient de noter que cette condition entraine que $\mathcal{E}$ coïncide avec l'ensemble $\mathcal{R}$ des idéaux à gauche de A rationnels dans A, au sens de UTUMI, qui caractérise également la plus fine des localisations dans $\mathfrak{A}$ telles que l'homomorphisme canonique de A dans son localisé soit injectif.

Pour mémoire, il est utile d'indiquer que le localisé $A_{\mathcal{E}}$ de A admet pour A-module à gauche sous-jacent une enveloppe injective de A.

6.1. PROPOSITION. - Avec les notations précédentes, étant donné un anneau A

avec unité, vérifiant $\mathcal{E}A = 0$, alors il y a équivalence des conditions suivantes :

(a) L'anneau $A_{\mathcal{E}}$ est semi-simple.

(b) La localisation $\tilde{\mathcal{L}}_0$ dans $\mathfrak{A}$ est plate.

(c) Tout idéal à gauche essentiel dans A contient un idéal à gauche de type fini essentiel dans A .

(d) Il n'existe pas de famille infinie formée d'idéaux à gauche de A , dont la somme est directe.

Soit $u_A : A \dashrightarrow A_{\mathcal{E}}$, l'homomorphisme canonique de l'anneau A dans l'anneau localisé $A_{\mathcal{E}}$ de A pour $\mathcal{E}$. Il est facile de vérifier que l'image $\mathcal{G} = u_A(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ par u_A est constituée par les idéaux à gauche de $A_{\mathcal{E}}$ essentiels dans $A_{\mathcal{E}}$ (voir par exemple l'exercice 25 de [1] (p. 164)). La condition (a) qui montre que $A_{\mathcal{E}}$ ne possède pas d'idéaux à gauche essentiels autres que $A_{\mathcal{E}}$, entraine $\mathcal{G} = \{A_{\mathcal{E}}\}$ et le théorème 4.6 montre donc que la condition (a) entraine la condition (b).

Réciproquement, le théorème 4.6 montre que la condition (b) entraine l'équivalence de la sous-catégorie locale $\mathcal{L}_0$ de $\mathfrak{A}$ et de la catégorie de modules mod $A_{\mathcal{E}}$.

Le paragraphe 8.2 et le corollaire 4.6 de [3] montrent que tout objet de $\mathcal{L}_0$ est injectif dans $\mathcal{L}_0$ et par suite tout $A_{\mathcal{E}}$-module à gauche est injectif, ce qui prouve que $A_{\mathcal{E}}$ est semi-simple. Il en résulte donc l'équivalence des conditions (a) et (b).

D'après l'exemple 2.4, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est exacte, et le théorème 4.6 montre que $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est plate si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est de type fini, ce qui se traduit par la condition (c). Ainsi, il en résulte l'équivalence des conditions (a), (b) et (c).

Cela étant, sous la condition (a), soit n la longueur du $A_{\mathcal{E}}$-module à gauche $A_{\mathcal{E}}$. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'idéaux à gauche de A dont la somme est directe. Puisque $\tilde{\mathcal{L}}_0$ est plate, le foncteur localisation commute en particulier aux sommes directes, ce qui donne :

$$(\bigoplus_{j\in J} I_j)_{\mathcal{E}} = \bigoplus_{j\in J} (I_j)_{\mathcal{E}} \quad ,$$

et cette formule montre que le nombre d'éléments de J est inférieur ou égal à n . Ainsi, la condition (a) entraine la condition (d).

Tout revient donc à montrer par exemple que la condition (d) entraine la condition (c), c'est-à-dire que tout idéal à gauche I de A essentiel dans A contient un idéal à gauche I' de A essentiel dans I . Il est possible de construire par récurrence des éléments non nuls a_k de I , pour $1 \leqslant k \leqslant p$, tels que la somme des idéaux à gauche monogènes Aa_k soit directe. La construction de a_p est possible tant que l'idéal à gauche :

$$\bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant p-1} Aa_k ,$$

n'est pas essentiel dans I . La condition (d) entraine évidemment que la construction s'arrête pour un entier p tel que l'idéal à gauche

$$I' = \bigoplus_{1 \leqslant k \leqslant p} Aa_k$$

soit essentiel dans I , et par suite dans A .

Ainsi, la condition (d) entraine la condition (c), ce qui achève la démonstration.

6.2. Remarque. - Sous les conditions équivalentes de la proposition 6.1, l'homomorphisme injectif $u_A : A \longrightarrow A_{\mathcal{E}}$ est en particulier un épimorphisme plat à gauche.

La proposition 6.1 constitue une généralisation du lemme 6 de [2] (p. 418), préparatoire à la démonstration du "théorème de Goldie".

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. Chap. 1 : Modules plats. Chap. 2 : Localisation. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[2] GABRIEL (P.). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[3] HACQUE (M.). - Mono-sous-catégories d'une catégorie de modules, Publ. Dép. Math. Fac. Sc. Lyon, t. 6, 1969, fasc. 1, p. 13-48.

[4] HACQUE (M.). - Localisations exactes et localisations plates, Publ. Dép. Math. Fac. Sc. Lyon, t. 6, 1969, fasc. 1, p. 97-117.

[5] HACQUE (M.) . - Remarques sur les épimorphismes plats d'anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 1447-1450.

[6] MITCHELL (B.). - Theory of categories. - New York and London, Academic Press, 1965 (Pure and applied Mathematics, 17).

[7] POPESCU (N.) et SPIRCU (T.). - Sur les épimorphismes plats d'anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 376-379.

[8] SILVER (L.). - Non commutative localizations and applications, J. of Algebra, t. 7, 1967, p. 44-76.

Michel HACQUE
M. Conf. Fac. Sc. Lyon
25 Côteaux du Rhodon
78 - CHEVREUSE

(Texte reçu le 5 mars 1970)