Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Claude Tisseron

Quelques applications de la notion de localisation

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, n° 1 (1969-1970), exp. n° 10, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70, n° 10, 15 p.
23 février 1970

QUELQUES APPLICATIONS DE LA NOTION DE LOCALISATION

par Claude TISSERON

Tous les anneaux considérés ont une unité ; les modules et les idéaux considérés sont des modules et des idéaux à gauche ; on dit qu'un anneau A est noethérien si A est noethérien à gauche, etc.

Dans tout cet exposé, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie abélienne localement petite, à sommes et produits quelconques. Dans les applications, on prend pour $\mathcal{A}$ la catégorie Mod A des A-modules à gauche ou la catégorie duale de Mod A .

1. Injectifs relatifs.

1.1. Généralités.

1.1.1. **Définitions**. - Pour une classe S d'objets de $\mathcal{A}$, soit $\iota(S)$ (resp. $\rho(S)$) la classe des objets M de la catégorie $\mathcal{A}$ tels que le foncteur $\mathcal{A}(. , M)$ (resp. $\mathcal{A}(M , .)$) soit exact sur les suites exactes de la forme

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0 ,$$

où N est un objet de S ; un objet de $\iota(S)$ (resp. $\rho(S)$) est appelé S-injectif (resp. S-projectif) ([12] et [13]). Pour une classe S' d'objets de $\mathcal{A}$, soit $\iota^{-1}(S')$ (resp. $\rho^{-1}(S')$) la classe des objets M de $\mathcal{A}$ tels que tout objet de S' soit M-injectif (resp. M-projectif). On note M-injectif au lieu de $\{M\}$-injectif.

Exemples. - Un objet M de $\mathcal{A}$ est quasi-injectif si, et seulement si, il est M-injectif.

Soit $\mathbb{S}$ la classe des objets M de $\mathcal{A}$ tels que tout sous-objet de M soit facteur direct de M . Pour toute classe S d'objets de $\mathcal{A}$, on a $\mathbb{S} \subset \iota^{-1}(S)$ et $\mathbb{S} \subset \rho^{-1}(S)$, et il est d'ailleurs immédiat de vérifier que si un objet M de $\mathcal{A}$ est dans $\iota^{-1}(S)$ (resp. $\rho^{-1}(S)$) pour toute classe S d'objets de $\mathcal{A}$, alors $M \in \mathbb{S}$.

1.1.2. Objets fortement caractéristiques.

Définition. - Un sous-objet N d'un objet M de $\mathcal{A}$ est fortement caractéristique dans M si, pour tout sous-objet N' de N , l'application canonique :

$$\mathcal{A}(N' , N) \to \mathcal{A}(N' , M)$$

est bijective.

Exemples. - Si M est quasi-injectif, tout sous-objet caractéristique de M est fortement caractéristique dans M .

Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie fermée de $\mathcal{A}$, i. e. une sous-catégorie pleine stable par sous-objets, objets quotients et sommes quelconques, pour tout objet M de $\mathcal{A}$, le plus grand sous-objet $\mathcal{C}M$ de M dans $\mathcal{C}$ est fortement caractéristique dans M .

Le lemme suivant va nous permettre d'avoir un autre exemple important de sous-objet fortement caractéristique.

1.1.3. LEMME. - Soit $i : M' \to M$ une extension essentielle dans $\mathcal{A}$, si un objet N de $\mathcal{A}$ est dans $\iota^{-1}(M')$, tout morphisme $f : N \to M$ se factorise par i .

Soit $f : N \to M$, alors f induit un morphisme $f' : f^{-1}(M') \to M'$ qui se prolonge en $g : N \to M'$. On a donc le diagramme commutatif suivant, où

$$q : M \to M/M'$$

est le morphisme canonique et $j = \operatorname{Ker} q.f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & f^{-1}(M') \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f'"'] & N \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "q"] & M/M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que $u = ig - f$ est nul. Posons $A = u^{-1}(u(N) \wedge M')$;alors $u(A) = u(N) \wedge M'$ est non nul dès que $u(N)$ est non nul, car M' est essentiel dans M . Soit

$$s : A \to N ,$$

le morphisme canonique, puisque $u(A) \leq M'$, on peut écrire $us = it$, puis $fs = i(gs - t)$, donc $qfs = 0$, et ainsi $A \leq \operatorname{Ker}(q \cdot f) = f^{-1}(M')$, ce qui prouve que $u(A) = 0$, donc $u(N) = 0$, et $u = 0$.

1.1.4. COROLLAIRE. - Un objet quasi-injectif est fortement caractéristique dans toute extension essentielle.

Soit $i : M' \to M$ une extension essentielle d'un objet quasi-injectif M' de $\mathcal{A}$. Pour tout sous-objet N de M' , on a $N \in \iota^{-1}(M')$, et tout morphisme $N \to M$ se factorise par M' d'après le lemme 1.1.3.

1.1.5. COROLLAIRE. - Soit $i : M' \to M$ une enveloppe injective d'un objet M' de $\mathcal{A}$, un objet N de $\mathcal{A}$ est dans $\iota^{-1}(M')$ si, et seulement si, pour tout morphisme $f : N \to M$, on a $f(N) \leq M'$.

La condition nécessaire n'est autre que le lemme 1.1.3 ; la condition suffisante résulte immédiatement de l'injectivité de M .

1.1.6. COROLLAIRE. - *Pour toute classe S d'objets de $\mathcal{A}$, toute extension essentielle d'un objet de $\iota(S)$ est dans $\iota(S)$.*

Si $M' \to M$ est une extension essentielle d'un objet M' de $\iota(S)$, soit N un objet de S , alors M' est M-injectif, et **ainsi** N'-injectif pour tout sous-objet N' de N ; si $u : N' \to M$ est un morphisme d'un sous-objet N' de N dans M , il résulte du lemme 1.1.3 que u se factorise par $M' \to M$, donc se prolonge à N .

On donne maintenant quelques propriétés de $\iota(S)$ pour une classe S d'objets de $\mathcal{A}$.

1.1.7. PROPOSITION. - *Pour une famille $(M_i)_I$ d'objets de $\mathcal{A}$, le produit $M = \prod_I M_i$ est dans $\iota(S)$ si, et seulement si, pour tout $i \in I$, M_i est dans $\iota(S)$.*

Soit $N' \to N$ un monomorphisme où N est dans S , on a un diagramme commutatif où les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(N , M) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{A}(N' , M) \arrow[d, "\wr"] \\
\prod_I \mathcal{A}(N , M_i) \arrow[r] & \prod_I \mathcal{A}(N' , M_i)
\end{tikzcd}$$

qui montre que M est dans $\iota(S)$ si, et seulement si, pour tout $i \in I$, M_i est dans $\iota(S)$.

1.1.8. PROPOSITION.

(a) $\iota^{-1}(S)$ *est stable par sous-objets, objets quotients et sommes finies.*

(b) *Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,*

1° *tout objet de S a une enveloppe injective dans $\mathcal{A}$,*

2° *les limites inductives de $\mathcal{A}$ sont exactes,*

alors la sous-catégorie pleine $\iota^{-1}(S)$, définie par $\iota^{-1}(S)$, est fermée.

La démonstration de (a) se fait en reproduisant les démonstrations des lemmes 4 et 5 du chapitre I, § 2 de BOURBAKI [3].

Montrons (b). Il suffit de montrer que $\iota^{-1}(S)$ est stable par sommes quelconques. Soient $(N_i)_I$ une famille d'objets de $\iota^{-1}(S)$, et $N = \bigoplus_I N_i$, leur somme ; montrons que N est dans $\iota^{-1}(S)$.

1° Si tout objet M de S possède une enveloppe injective $\hat{M}$ dans $\mathfrak{A}$, il résulte du critère 1.1.5 qu'il suffit de montrer que, pour tout objet M de S et tout morphisme $f : N \to \hat{M}$, on a $\operatorname{Im}(f) \leqslant M$. Soient $e_i : N_i \to N$ les morphismes canoniques, pour tout $i \in I$, on a $\operatorname{Im}(f.e_i) \leqslant M$, i. e. $f.e_i = \alpha.g_i$, où $\alpha : M \to \hat{M}$ est le morphisme canonique ; la famille $(g_i)_I$ donne alors un morphisme $g : N \to M$ tel que $\alpha.g = f$, d'où le résultat.

2° Supposons maintenant que les limites inductives de $\mathfrak{A}$ soient exactes. Soient $N' \to N$ un monomorphisme, et $f : N' \to M$ un morphisme, où M est un objet de S. Puisque les limites inductives sont exactes, on peut trouver un prolongement maximal $g : N'' \to M$ de f avec $N' \leqslant N'' \leqslant N$. Si N'' est distinct de N, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $N'' \wedge N_J$ soit distinct de N_J, où $N_J = \bigoplus_{i \in I} N_i$. Comme N_J est dans $\iota^{-1}(S)$, d'après (a), la restriction de g à $N'' \wedge N_J$ se prolonge à N_J par $h : N_J \to M$. D'autre part, le diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} N'' \wedge N_J & \longrightarrow & N_J \\ \downarrow & & \downarrow \\ N'' & \longrightarrow & N'' \vee N_J \end{array}$$

représente une somme fibrée, et il existe un morphisme $u : N'' \vee N_J \to M$ prolongeant strictement g, ce qui est absurde. Donc $N'' = N$, ce qui achève la preuve.

Remarque. - Le (a) et le 1° du (b) ont été trouvés indépendamment par E. de ROBERT [13].

1.2. Applications aux objets quasi-injectifs.

Dans ce numéro, les sous-catégories pleines $\iota^{-1}(S)$ de $\mathfrak{A}$ sont toujours supposées fermées. C'est-à-dire que S vérifie par exemple la condition 1°(b) de 1.1.8, ou que $\mathfrak{A}$ est avec limites inductives exactes. Tout objet M de $\mathfrak{A}$ possède alors un plus grand sous-objet dans $\iota^{-1}(S)$ que l'on désignera par $\iota_S M$. Si $S = \{N\}$ pour un objet N de $\mathfrak{A}$, on notera $\iota_N M$ au lieu de $\iota_{\{N\}} M$.

1.2.1. PROPOSITION. - Pour tout objet M de S, le sous-objet $\iota_S M$ de M est quasi-injectif et fortement caractéristique dans M.

La seconde assertion résulte de 1.1.2 (exemples). Montrons que $\iota_S M$ est quasi-injectif. Soient $N' \to \iota_S M$ un sous-objet de $\iota_S M$ et $u : N' \to \iota_S M$ un morphisme, comme M est $\iota_S M$-injectif, le composé $N' \to \iota_S M \to M$ se prolonge en un morphisme $v : \iota_S M \to M$ qui se factorise par l'injection $\iota_S M \to M$, puisque $\iota_S M$ est fortement caractéristique dans M, d'où le résultat.

1.2.2. PROPOSITION . — Pour tout objet M de $\mathcal{C}$, $\iota_M M$ est le plus grand sous-objet quasi-injectif et fortement caractéristique de M .

Soit N un sous-objet quasi-injectif et fortement caractéristique de M . Il suffit de démontrer que $N \leqslant \iota_M M$, i. e. que M est N-injectif. Soit $u : N' \to M$ un morphisme d'un sous-objet N' de N dans M , comme N est fortement caractéristique, u se factorise par l'injection $N \to M$, donc se prolonge à N , car N est quasi-injectif, ce qui montre que M est N-injectif, et achève la preuve.

1.2.3. PROPOSITION. - Soit M' un sous-objet quasi-injectif et essentiel d'un objet M de $\mathcal{C}$. Alors $\iota_M M$ est le plus grand sous-objet quasi-injectif et essentiel de M .

Ceci résulte immédiatement de 1.1.4 et 1.2.2.

Sauf pour le lemme 1.2.8, nous supposons maintenant que $\mathcal{C}$ est la catégorie Mod A des A-modules à gauche sur un anneau à unité A .

La terminologie relative aux familles topologisantes (resp. topologisantes et idempotentes) d'idéaux à gauche de A est celle de [7] ou de [3] (chap. II, § 2, exercices 16 et suivants).

Pour toute classe S de A-modules (à gauche), $\iota^{-1}(S)$ est une sous-catégorie fermée de Mod A , et il lui correspond donc l'ensemble topologisant I_S des idéaux (à gauche) α de A tels que A/α soit dans $\iota^{-1}(S)$; pour tout module M, soit $I_S M = \{x \in M \mid \operatorname{Ann}(x) \in I_S\}$, on a $I_S M = \iota_S M$, et M est dans $\iota^{-1}(S)$ si, et seulement si, $I_S M = M$.

1.2.4. Remarque. - Soit $(M_i)_J$ une famille de A-modules, il résulte de 1.1.7 que si $M = \prod_J M_i$, on a $I_M = \bigcap_J I_{M_i}$.

Nous énonçons maintenant deux résultats relatifs aux anneaux semi-artiniens [10]. Un anneau semi-artinien A est un anneau tel que tout A-module possède un sous-module simple, le socle de tout module M est alors essentiel dans M .

1.2.5. COROLLAIRE. - Sur un anneau semi-artinien A , tout A-module possède un plus grand sous-module quasi-injectif et essentiel.

On applique la proposition 1.2.3, en remarquant que le socle d'un module M est un sous-module quasi-injectif et essentiel.

1.2.6. PROPOSITION. - Sur un anneau semi-artinien A , toute classe de A-modules de la forme $\iota^{-1}(S)$ peut être définie en choisissant tous les modules de S quasi-injectifs.

Commençons par démontrer un lemme. Soient S une classe de A-modules, et S_1

la classe des A-modules $I_S M$ pour $M \in S$.

1.2.7. LEMME. - *On a toujours* $I_S \subset I_{S_1}$; *de plus, si pour tout* A-*module* M *de* S , $I_S M$ *est essentiel dans* $I_{S_1} M$, *alors* $I_S = I_{S_1}$.

Soient $\mathfrak{a} \in I_S$, et $f : \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \to I_S M$ un morphisme où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ et $M \in S$; le morphisme f se prolonge en $g : A/\mathfrak{a} \to M$ dont l'image est contenue dans $I_S M$, car $A/\mathfrak{a} = I_S(A/\mathfrak{a})$, ce qui prouve que $A/\mathfrak{a}$ est dans $\iota^{-1}(S_1)$ et $\mathfrak{a} \in I_{S_1}$.

Supposons maintenant que, pour tout $M \in S$, on ait $I_S M$ essentiel dans $I_{S_1} M$, et soit $\mathfrak{a} \in I_{S_1}$, i. e. $A/\mathfrak{a} = I_{S_1}(A/\mathfrak{a})$; soit f un morphisme : $I/\mathfrak{a} \to M$ pour $M \in S$, on a $f(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \subset I_{S_1}(M)$; or, par hypothèse, $I_S M$ est $A/\mathfrak{a}$-injectif, donc $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$-injectif, et il résulte de 1.1.3 que $f(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \subset I_S M$, i. e. puisque $I_S M$ est $A/\mathfrak{a}$-injectif, f se prolonge à $A/\mathfrak{a}$, et ainsi M est $A/\mathfrak{a}$-injectif pour tout $M \in S$, i. e. $\mathfrak{a} \in I_S$.

La proposition résulte alors du fait que, pour tout module M de S , $I_S M$ contient le socle de M qui est essentiel dans M , et , a fortiori, $I_S M$ est essentiel dans $I_{S_1} M$, donc $I_S = I_{S_1}$ avec le lemme, i. e. $\iota^{-1}(S) = \iota^{-1}(S_1)$, et tous les modules de S_1 sont quasi-injectifs.

Lorsque l'anneau de base A est quelconque, il peut arriver que, pour un A-module M , on ait $I_M M = 0$, i. e. M n'a pas de sous-module quasi-injectif et fortement caractéristique $\neq 0$; par exemple si A est un anneau intègre qui n'est pas un corps, aucun idéal propre de A n'est quasi-injectif et, pour tout idéal $\mathfrak{a} \neq 0$, on a $I_\mathfrak{a} \mathfrak{a} = 0$.

Nous allons voir que lorsque $I_M M = 0$, on peut caractériser aisément I_M .

1.2.8. PROPOSITION. - *Pour un* A-*module* M , *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) M *n'a pas de sous-module quasi-injectif et fortement caractéristique non nul*;
(b) *Un idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A *est dans* I_M *si, et seulement si*, $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a} , \hat{M}) = 0$.

On désigne par $\hat{M}$ une enveloppe injective de M . L'ensemble J_M des idéaux à gauche $\mathfrak{a}$ de A , tels que $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a} , \hat{M}) = 0$, est le plus grand ensemble topologisant F d'idéaux à gauche de A tels que $FM = 0$ comme on peut le vérifier aisément ; de plus, si $\mathfrak{a} \in J_M$, on a $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{b}/\mathfrak{a} , M) = 0$ pour tout idéal $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ donc $\mathfrak{a} \in I_M$ et $J_M \subset I_M$. D'après 1.2.2, (a) équivaut à dire que $I_M M = 0$ et, d'après ce qui précède, ceci équivaut à $J_M = I_M$, d'où le résultat.

Remarques.

1° Lorsque M n'a pas de sous-module quasi-injectif fortement caractéristique

$\neq 0$, l'ensemble topologisant I_M n'est autre que l'ensemble topologisant et idempotent qui permet de caractériser les extensions rationnelles de M au sens d'UTUMI (Cf. [5] et [8]).

2° Si les conditions 1.2.8 sont vérifiées, I_M est un ensemble topologisant et idempotent, car J_M est toujours idempotent.

Ceci n'est pas le cas en général : Considérons en effet un A-module M non quasi injectif, dont le socle est essentiel, et dont le sous-module singulier est nul (On peut prendre par exemple $M = A_S$, où A est le sous-anneau d'un produit infini K^I de copies d'un corps K , engendré par $K^{(I)}$ et l'unité de K^I , cf. [10]). Posons $M_1 = I_M M \neq M$, alors M_1 est essentiel dans M , de plus M est M/M_1-injectif, car tout morphisme d'un sous-module de M/M_1 dans M est nul, donc $I_M(M/M_1) = M/M_1$, ce qui prouve que I_M n'est pas idempotent.

1.3. Produits de modules quasi-injectifs.

1.3.1. PROPOSITION. - Pour un A-module M , il y a équivalence entre :

(a) Pour tout ensemble I , le A-module M^I est quasi-injectif ;

(b) $\mathrm{Ann}(M)$ appartient à I_M ;

(c) Il existe un idéal à droite α de A , tel que $M = r_{\hat{M}}(\alpha)$.

On note $\hat{M}$ une enveloppe injective de M , et $r_{\hat{M}}(\alpha) = \{x \in \hat{M} \mid \alpha x = 0\}$.

(c) $\Longrightarrow$ (a). Si $M = r_{\hat{M}}(\alpha)$, on a $M^I = r_Q(\alpha)$ où $Q = \hat{M}^I$ est un A-module injectif, comme $r_Q(\alpha)$ est un sous-module caractéristique d'un module injectif, c'est un module quasi-injectif.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Remarquons que M^I est quasi-injectif si, et seulement si, $I_{M^I}(M^I) = M^I$ ce qui équivaut, d'après la remarque 1.2.4, à $I_M(M^I) = M^I$. Supposons que l'on ait (a), alors on a en particulier $I_M(M^M) = M^M$, et l'annulateur de la diagonale de M^M , i. e. $\mathrm{Ann}(M)$, est dans I_M .

(b) $\Longrightarrow$ (c). Soit $\hat{M}$ une enveloppe injective du A-module M , posons

$$M' = r_{\hat{M}}(\mathrm{Ann}(M)) ,$$

on a $\mathrm{Ann}(M') = \mathrm{Ann}(M)$, l'assertion (b) signifie que M est un $A/\mathrm{Ann}(M)$-module injectif, comme M est essentiel dans M' comme A-module, donc aussi comme $A/\mathrm{Ann}(M)$-module, on a $M = M'$.

Remarque. - L'assertion (c) figure dans [6], et l'équivalence

$$(a) \Longleftrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c)$$

a été trouvée indépendamment par des méthodes différentes par K. R. FULLER.

1.3.2. Définition. - Nous dirons que A vérifie la condition Q (resp. $Q. F.$) (à gauche) si tout A-module quasi-injectif (resp. quasi-injectif et de type fini) possède les propriétés de la proposition 1.3.1.

Si $(K_i)_I$ est une famille infinie de corps, l'anneau $A = \prod_I K_i$ ne vérifie pas la condition Q, car le A-module $M = \bigoplus_I K_i$ est semi-simple, donc quasi-injectif, et l'annulateur de M qui est nul n'appartient pas à I_M sinon M serait injectif, ce qui est absurde car M est essentiel dans A et différent de A.

1.3.3. PROPOSITION. -

(a) Tout anneau artinien vérifie la condition Q,

(b) Tout anneau commutatif vérifie la condition $Q. F.$

Commençons par démontrer un lemme.

LEMME. - Pour tout ensemble topologisant F sur un anneau artinien A, il existe un idéal bilatère α tel que F soit l'ensemble des idéaux de A contenant α.

Si α est un élément minimal de F, on vérifie immédiatement que α satisfait les conditions du lemme.

Soient M un A-module quasi-injectif sur un anneau artinien A, et α l'idéal bilatère tel que I_M soit l'ensemble des idéaux contenant α. Comme M est quasi-injectif, on a $I_M M = M$ et, pour tout $x \in M$, on a $\alpha \subset \mathrm{Ann}(x)$, donc $\alpha \subset \mathrm{Ann}(M)$ et $\mathrm{Ann}(M) \in I_M$, ce qui prouve (a).

Montrons (b). Soit M un A-module quasi-injectif ayant un système fini $(x_1, \dots, x_n)$ de générateurs, puisque M est quasi-injectif, on a $\mathrm{Ann}(x_i) \in I_M$ pour $i = 1, \dots, n$, et comme A est commutatif, on a $\mathrm{Ann}(M) = \bigcap_1^n \mathrm{Ann}(x_i) \in I_M$.

1.3.4. PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'anneau A vérifie la condition Q (resp. $Q. F.$) ;

(b) Pour tout idéal bilatère α de A, tout A/α-module (1) quasi-injectif et fidèle est injectif.

Soit M un groupe abélien, alors M est un A/α-module fidèle pour un idéal bilatère α de A si, et seulement si, M est un A-module d'annulateur α, et, dire que M est quasi-injectif (2) comme A-module, équivaut à dire qu'il est quasi-injectif (2) comme A/α-module. La proposition ci-dessus résulte alors de 1.3.1 (b), en remarquant que $\mathrm{Ann}(M) \in I_M$ si, et seulement si, M est un $A/\mathrm{Ann}(M)$-module injectif.

---

(1) (resp. tout A-module de type fini)

(2) (resp. quasi-injectif de type fini).

<u>Remarque</u>. - L'affirmation (a) de 1.3.2 a été trouvée par une méthode différente par K. R. FULLER [6].

1.3.5. PROPOSITION. - <u>Si un épimorphisme d'anneaux</u> $\varphi : A \to B$ <u>est surjectif ou plat à gauche</u> [11], <u>alors</u> B <u>vérifie la condition</u> Q <u>dès que</u> A <u>la vérifie</u>.

La première assertion résulte immédiatement de 1.3.3.

Supposons que φ soit un épimorphisme plat à gauche, i. e. B est un A-module à droite plat ; un B-module M est quasi-injectif si, et seulement si, le A-module $\varphi_*(M)$ est quasi-injectif. En effet, le foncteur-restriction des scalaires φ_* admet un adjoint à gauche φ^*, défini par $\varphi^*(N) = B \otimes_A N$, où $B \otimes_A N$ est muni de sa structure de B-module à gauche ; et, dire que B est plat à droite signifie que φ^* préserve les monomorphismes. Pour un sous-A-module N de $\varphi_*(M)$, on a un diagramme canonique commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(\varphi_*(M) , \varphi_*(M)) \arrow[r, dashed, "u'"] & \mathrm{Hom}_A(N , \varphi_*(M)) \arrow[d, "v'"'] \\
\mathrm{Hom}_A(M , M) \arrow[u, "v"] \arrow[r, dashed, "u"] & \mathrm{Hom}_A(\varphi^*(N) , M)
\end{tikzcd}$$

u' provient de l'injection $N \to \varphi_*(M)$, v' est l'isomorphisme défini par l'adjonction de φ_* et φ^*, v est l'application qui à un morphisme $f : M \to M$ fait correspondre $\varphi_*(f) : \varphi_*(M) \to \varphi_*(M)$, v est un isomorphisme d'après la proposition 2.1 de [11], enfin u provient de l'application composée

$$\varphi^*(N) \to \varphi^*\varphi_*(M) \xrightarrow{\sim} M$$

qui est injective.

On vérifie alors aisément, avec le diagramme ci-dessus, que M est quasi-injectif si, et seulement si, $\varphi_*(M)$ est un A-module quasi-injectif.

On peut alors achever la preuve, soit M un B-module quasi-injectif ; on a $\varphi_*(M^I) \xrightarrow{\sim} \varphi_*(M)^I$ pour tout ensemble I ; par hypothèse $\varphi_*(M)^I$ est quasi-injectif pour tout ensemble I, donc $\varphi_*(M^I)$ également, et M^I est un B-module quasi-injectif d'après le début de la démonstration, d'où le résultat.

2. Une caractérisation des anneaux noethériens.

Il est bien connu que si A est un anneau noethérien, toute somme directe de copies d'un A-module quasi-injectif est un A-module quasi-injectif [4]. Nous nous proposons de démontrer la réciproque.

2.1. PROPOSITION. - Pour un anneau A, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) A est un anneau noethérien ;

(2) Toute somme directe de copies d'un A-module quasi-injectif est un A-module quasi-injectif ;

(3) Toute somme directe de A-modules injectifs est un A-module quasi-injectif.

Nous démontrons (2) $\Longrightarrow$ (3) et (3) $\Longrightarrow$ (1); l'assertion (1) $\Longrightarrow$ (2) figure dans [4].

(2) $\Longrightarrow$ (3). Soient $(M_i)_I$ une famille de A-modules injectifs, et $M = \prod_I M_i$; le A-module M est injectif, et, pour chaque $i \in I$, on peut écrire M sous la forme $M = M^i = M_i \oplus P_i$, où $P_i = \prod_{j \neq i} M_j$; par hypothèse, le A-module

$$M^{(I)} = \bigoplus_I M^i = \bigoplus_I M_i \oplus \bigoplus_I P_i$$

est quasi-injectif, donc aussi $\bigoplus_I M_i$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Pour montrer que A est noethérien, nous montrons que toute somme directe de modules injectifs est un module injectif. Soit $(M_i)_I$ une famille de A-modules injectifs ; par hypothèse, $M = \hat{A} \oplus \bigoplus_I M_i$ est quasi-injectif, et comme A est un sous-module de M, on en déduit que M est injectif avec le critère de Baer, donc $\bigoplus_I M_i$ est injectif comme facteur direct de M.

Remarque. - Ceci a été trouvé indépendamment, et par une méthode différente, par K. R. FULLER [6].

3. Modules quasi-projectifs.

3.1. Soit A un anneau, il résulte du dual de la proposition 1.1.8 (a) que, pour une classe S de A-modules, $\rho^{-1}(S)$ est stable par sous-objets, objets quotients et sommes directes finies. La famille P_S des idéaux α de A tels que A/α soit dans $\rho^{-1}(S)$ est donc topologisante. Soit $\mathcal{C}_{P_S}$ la sous-catégorie pleine des modules M tels que $M = P_S M$, où $P_S M = \{x \in M \mid \mathrm{Ann}(x) \in P_S\}$. Alors $\mathcal{C}_{P_S}$ est une sous-catégorie fermée, et tout objet de $\rho^{-1}(S)$ est dans $\mathcal{C}_{P_S}$.
On a alors :

3.1.1. LEMME. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\rho^{-1}(S)$ est stable par sommes directes quelconques ;

(b) Un A-module N est dans $\rho^{-1}(S)$ si, et seulement si, $N = P_S N$.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Si $N = P_S N$, on peut écrire N comme quotient de $\bigoplus_{x \in N} A_x$, qui est dans $\rho^{-1}(S)$ par hypothèse ; donc N est dans $\rho^{-1}(S)$. Si N est dans $\rho^{-1}(S)$, on a évidemment $N = P_S N$.

(b) $\Longrightarrow$ (a), car alors $\rho^{-1}(S)$ est égale à la classe des objets de $\mathcal{C}_{P_S}$ qui est stable par sommes quelconques.

Lorsque S est réduite à un seul module M , on écrit P_M au lieu de $P_{\{M\}}$. Il résulte du dual de 1.1.7 que, pour une famille $(M_i)_I$ de A-modules, on a

$$P_{\bigoplus_I M_i} = \bigcap_I P_{M_i}$$

3.1.2. LEMME. - <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux</u> A-<u>modules dont l'un au moins est de type fini, alors</u> M <u>est</u> N-<u>projectif si, et seulement si,</u> $N = P_M N$.

Si N est de type fini, engendré par $x_1 , \dots , x_n$, on peut écrire N comme quotient de

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_{x_i} ,$$

qui est dans $\rho^{-1}(M)$ dès que $N = P_M N$, donc N est dans $\rho^{-1}(M)$, i. e. M est N-projectif ; si M est N-projectif, on a évidemment $N = P_M N$.

Supposons maintenant M de type fini et $N = P_M N$; soient $N \to N/N'$ un quotient de N , et $f : M \to N/N'$ un morphisme ; on va montrer que f se relève en un morphisme de M dans N , ce qui achèvera de prouver le lemme. On peut écrire N comme quotient de $\bigoplus_{x \in N} A_x$, et, puisque M est de type fini, on peut trouver des éléments $x_1 , \dots , x_n$ de N tels que $f(M)$ soit un quotient de $\bigoplus_{i=1}^{n} A_{x_i}$; par hypothèse, A_{x_i} est dans $\rho^{-1}(M)$ pour $i = 1 , \dots , n$ et aussi

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A_{x_i} ,$$

donc f se factorise par un morphisme $f' : M \to \bigoplus_{i=1}^{n} A_{x_i}$ qui, composé avec l'injection $\bigoplus_{i=1}^{n} A_{x_i} \xrightarrow{\subset} \bigoplus_{x \in N} A_x$ et l'application canonique $\bigoplus_{x \in N} A_x \to N$, donne le relèvement cherché de f .

Rappelons qu'un sous-objet N d'un objet M de $\underset{\sim}{\mathrm{Mod}}$ A est dit <u>superflu</u> dans M si, pour tout sous-module N' de M , la relation $N + N' = M$ implique $N' = M$, cela signifie que l'épimorphisme $M \to M/N$ est un monomorphisme essentiel de la catégorie duale de $\underset{\sim}{\mathrm{Mod}}$ A . Si $P \to P' \to 0$ est un épimorphisme dont le noyau est superflu, et si P est projectif, on dit que $P \to P'$ est une couverture projective de P (Cf. [1]). C'est la notion duale de la notion d'enveloppe injective.

On a alors :

3.1.3. PROPOSITION. - Si tout module de S est de type fini ou possède une couverture projective, un module N est dans $\rho^{-1}(S)$ si, et seulement si, $N = P_S N$.

Soit $N = P_S N$, il faut montrer que tout A-module M de S est N-projectif. Si M est de type fini, on remarque que l'on a $P_S \subset P_M$, et ainsi $P_M N = N$, i. e. d'après 3.1.2, M est N-projectif. Si M a une couverture projective, on écrit une suite exacte $\bigoplus_{x \in N} A_x \to N \to 0$; par hypothèse, M est A_x-projectif pour tout $x \in N$, et, d'après le dual de 1.1.8 (b.1°), M est $\left(\prod_{x \in N} A_x\right)$-projectif, donc $\left(\bigoplus_{x \in N} A_x\right)$-projectif, puis N-projectif, car $\rho^{-1}(M)$ est stable par sous-objets et objets quotients.

3.1.4. COROLLAIRE. - Toute somme directe de copies d'un A-module quasi-projectif, de type fini ou ayant une couverture projective, est un A-module quasi-projectif.

Soient M un A-module quasi-projectif, de type fini ou ayant une couverture projective, et I un ensemble. Alors $M^{(I)}$ est quasi-projectif si, et seulement si, $M^{(I)} \in P(M^{(I)})$, ce qui équivaut, d'après le dual de 1.1.7, à $M \in P(M^{(I)})$, et, d'après 3.1.3, ceci équivaut à $P_M(M^{(I)}) = M^{(I)}$; or, puisque M est quasi-projectif, on a $P_M M = M$ et, par suite, $P_M(M^{(I)}) = M^{(I)}$, d'où le résultat.

3.1.5. COROLLAIRE. - Soit M un module de type fini ou ayant une couverture projective, alors M est projectif si, et seulement si, pour tout idéal α de A, l'application canonique $\mathrm{Hom}_A(M , A) \to \mathrm{Hom}_A(M , A/\alpha)$ est surjective.

La condition est nécessaire. Réciproquement, soit M un module vérifiant les conditions énoncées ; alors $A \in \rho^{-1}(M)$, et, d'après 3.1.3 et 3.1.1, tout module est dans $\rho^{-1}(M)$, et M est projectif.

Remarque. - La première assertion de ce corollaire a été trouvée indépendamment par E. de ROBERT [13].

3.1.6. COROLLAIRE. - Sur un anneau commutatif, tout module de type fini quasi-projectif et fidèle est projectif.

Soit $x_1 , \dots , x_n$ une famille de générateurs du module quasi-projectif et fidèle M ; on a $0 = \mathrm{Ann}(M) = \bigcap_1^n \mathrm{Ann}(x_i) \in P_M$, car $M = P_M M$, donc $A \in \rho^{-1}(M)$, et le corollaire résulte de 3.1.5.

3.1.7. PROPOSITION. - Soit A un anneau parfait ; un A-module M est projectif dès que, pour tout idéal $\alpha \subset \mathcal{R}(A)$, l'application canonique.

$$\mathrm{Hom}_A(M , A) \to \mathrm{Hom}_A(M , A/\alpha)$$

est surjective.

$R(A)$ est le radical de Jacobson de A , et A est parfait si tout A-module possède une couverture projective [1]. D'après le lemme 2.4 de [1] (p. 472), un idéal $\mathfrak{a}$ de A est superflu dans A si, et seulement si, $\mathfrak{a} \subset R(A)$. On va montrer que A est dans $\rho^{-1}(M)$; la conclusion résultera alors de 3.1.5. Soient $\mathfrak{b}$ un idéal de A , et $u : M \to A/\mathfrak{b}$ un morphisme ; on doit montrer que u se relève en $v : M \to A$. D'après l'hypothèse, on peut supposer que $\mathfrak{b}$ n'est pas superflu dans A , i. e. il existe un idéal $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = A$, et comme A est parfait, on peut supposer que $\mathfrak{c}$ est minimal pour cette propriété (Cf. [9]), et alors $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ est superflu dans $\mathfrak{c}$, et par suite dans A . D'autre part, comme $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = A$, on vérifie aisément que l'application canonique $A/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c} \to A/\mathfrak{b}$ possède une section s , et il résulte de l'hypothèse que $s \circ u$ se relève en un morphisme $v : M \to A$ qui donne le relèvement cherché de u , d'où le résultat.

3.2. Modules quasi-projectifs sur un anneau parfait.

Si tout module M d'une classe S de A-modules possède une couverture projective, il résulte du dual de 1.1.8 que $\rho^{-1}(S)$ est stable par produits quelconques, c'est donc une sous-catégorie fermée et cofermée de $\underline{\text{Mod}}\ A$; il existe donc un idéal bilatère $\mathfrak{a}_S$ tel que P_S soit formé des idéaux $\mathfrak{a}$ de A qui contiennent $\mathfrak{a}_S$ (Cf. [14]). On a alors, pour tout A-module M , équivalence entre $M \in \rho^{-1}(S)$ et $\mathfrak{a}_S M = 0$.

On a alors le lemme suivant :

3.2.1. LEMME. - *Il y a équivalence entre* " $\mathfrak{a}_S = 0$ " *et* "*tout module de* S *est projectif*".

Si $\mathfrak{a}_S = 0$, on a $\rho^{-1}(S) = \text{Ob}(\underline{\text{Mod}}\ A)$, et tout module de S est projectif ; inversement, si tout module de S est projectif, on a $A \in \rho^{-1}(S)$ et $\mathfrak{a}_S A = 0$, donc $\mathfrak{a}_S = 0$.

3.2.2. COROLLAIRE. - *Sur un anneau parfait* A , *tout* A-*module quasi-projectif et fidèle est projectif*.

Soit M un A-module quasi-projectif, on a $M \in \rho^{-1}(M)$, donc $\mathfrak{a}_M M = 0$, et ainsi $\mathfrak{a}_M \subset \text{Ann}(M)$; si M est fidèle, on a $\mathfrak{a}_M = 0$, et M est projectif avec 3.2.1.

Remarque. - Si A est un anneau semi-parfait [1], la conclusion du corollaire et sa preuve sont vraies pour des modules de type fini.

3.2.3. COROLLAIRE (Théorème 3.3 de [6]). - *Soit* R *un anneau parfait, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a) M <u>est quasi-projectif</u>,

(b) M <u>est un</u> $A/\mathrm{Ann}(M)$-<u>module projectif</u>,

(c) M <u>est isomorphe à</u> P/IP , <u>où</u> P <u>est une couverture projective de</u> M <u>et</u> I <u>un idéal bilatère de</u> A .

(a) $\Longrightarrow$ (b) résulte de 3.2.2, car M est un $A/\mathrm{Ann}(M)$-module quasi-projectif et fidèle, et $A/\mathrm{Ann}(M)$ est un anneau parfait (lemme 2.2 de [1]).

(b) $\Longrightarrow$ (c), car si $P \to M \to 0$ est une couverture projective de M , alors $P/\mathrm{Ann}(M)\, P \to M \to 0$ est une couverture projective de M considérée comme $A/\mathrm{Ann}(M)$-module (même référence).

(c) $\Longrightarrow$ (a), car IP est un sous-module caractéristique du module projectif P , donc P/IP est quasi-projectif.

<u>Remarque</u>. - Le corollaire 3.2.3 et sa preuve restent valables pour un module de type fini sur un anneau semi-parfait.

3.2.4. PROPOSITION. - <u>Sur un anneau parfait</u> A , <u>tout</u> A-<u>module</u> M <u>admet un plus petit sous-module superflu</u> N , <u>tel que</u> M/N <u>soit quasi-projectif</u>.

Soit $P \xrightarrow{q} M \to 0$ une couverture projective de M avec $K = \mathrm{Ker}\, q$ superflu dans P , alors $K \subset R(P) = R(A)\, P$ qui est un sous-module superflu de P (Cf. [9]), de plus $P/R(P)$ est un $A/R(A)$-module, donc est semi-simple, et $R(M) = q(R(P))$ est un sous-module superflu de M tel que $M/R(M) \sim P/R(P)$ soit semi-simple, donc quasi-projectif. D'autre part, comme M admet une couverture projective, $\rho^{-1}(M)$ est une sous-catégorie fermée de la catégorie duale de $\underset{\sim}{\mathrm{Mod}}\, A$, et on peut appliquer à M le dual de 1.2.3, i. e. M possède un plus grand quotient M/N , où N est superflu dans M et M/N quasi-projectif, d'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASS (H.). - Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 95, 1960, p. 466-488.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chap. 2 : Algèbre linéaire, 3e édition. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).

[3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, Chap. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[4] CHAPTAL (Nicole). - Sur les modules quasi-injectifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t.264, 1967, Série A, p. 173-175.

[5] FAITH (C.). - Lectures on injective modules and quotient rings. - Berlin, Springer-Verlag, 1967 (Lecture Notes in Mathematics, 49).

[6] FULLER (K. R.). - On direct representations of quasi-injectives and quasi-projectives, Archiv der Math., t. 20, 1969, p. 495-502.

[7] GABRIEL (P.). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[8] HUDRY (A.). - Quelques remarques sur la notion d'extension rationnelle maximale d'un module et sur les anneaux de fractions au sens d'Utumi, Publications du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 6, 1969, fasc. 2, p. 139-151.

[9] MIYASHITA (Y.). - Quasi-projective modules, perfect modules and a theorem for modular lattices, J. Fac. Sc. Hokkaido Univ., Series 1, t. 19, 1965/66, p. 86-110.

[10] NĂSTĂSESCU (C.) et POPESCU (N.). - Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 357-368.

[11] POPESCU (N.) et SPIRCU (T.). - Sur les épimorphismes plats d'anneaux, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 376-379.

[12] RAVEL (J.). - Sur les modules M-injectifs, Publications du Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon, t. 5, 1968, fasc. 1, p. 63-71.

[13] de ROBERT (E.). - Projectifs et injectifs relatifs. Applications, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 361-364.

[14] ROOS (J.-E.). - Caractérisation des catégories qui sont quotients de catégories de modules par des sous-catégories bilocalisantes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, Série A, p. 4954-4957.

[15] TISSERON (C.). - Quelques remarques sur la F-injectivité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 1074-1076.

[16] TISSERON (C.). - Quelques propriétés des modules quasi-injectifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 1377-1380.

(Texte reçu le 24 février 1970)

Claude TISSERON
Faculté des Sciences d'Alger
Service de Mathématiques
ALGER (Algérie)