Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Guérindon

Anneaux de Goldman

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, n° 1 (1969-1970), exp. n° 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
23e année, 1969/70, n° 9, 8 p.
16 février 1970

ANNEAUX DE GOLDMAN

par Jean GUÉRINDON

La géométrie algébrique affine sur un corps de base K utilise le résultat suivant de Zariski : Si l'anneau $K[u_1, \ldots, u_h]$ est un corps, c'est une extension algébrique de K. Ce dernier théorème reste encore valable si K est un anneau semi-local noethérien intègre et de dimension 1, et plus généralement pour une classe d'anneaux dits de "Goldman", dont une rédaction récente de KAPLANSKY donne les propriétés. On définira les G-idéaux qui sont partout denses dans le spectre premier d'un anneau, et dont les propriétés sont intéressantes. La structure des G-anneaux n'est pas connue même quand ce sont des anneaux principaux semi-locaux. Il reste de nombreux problèmes en relation avec les différentes notions de dimension.

On désigne par R un anneau commutatif avec élément unité, non réduit à zéro. On le suppose intègre, et on désigne par K son corps des fractions. Pour étudier le cas où K est une R-algèbre finie, on établit le lemme suivant.

LEMME 1. - Si R est intègre, $K = \operatorname{fract} R$, et si a est un élément fixé non nul de R, il y a équivalence entre les propriétés :

(i) Tout idéal premier non nul contient a ;

(ii) Tout idéal non nul contient une puissance de a ;

(iii) Le localisé de R à $S = \{a^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ est un corps ;

(iv) On a $K = R[\frac{1}{a}]$.

En effet, si on a (i), soit P un idéal maximal parmi les idéaux qui ne rencontrent pas S (en supposant qu'il y en ait). Alors P est premier, et, comme on a $a \in P$, on a une contradiction, et (ii) est vraie. Si (ii) est vraie, le localisé de R à S n'a d'autre idéal premier que zéro, donc est un corps, donc on a (iii), et la réciproque est également vraie. Si (iii) est vraie, soit $b \in R$ avec $b \neq 0$, on a $(b) \cap S \neq \emptyset$, et on a un $y \in R$ tel que $\frac{1}{b} = \frac{y}{a^n}$, on a donc (iv).

Si on a (iv), soit P un idéal premier non nul, et soit $b \in P$ avec $b \neq 0$; on a $\frac{1}{b} = \frac{y}{a^n}$ $(y \in R)$, $a^n = by \in P$, donc $a \in P$, et on a (i), d'où le lemme.
On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - *Si* R *est intègre, et* $K = \text{fract}\, R$, *il y a équivalence entre les propriétés* :

(i) *Il existe* a *tel que les quatre conditions du lemme 1 soient satisfaites* ;

(ii) K *est une* R-*algèbre finie* $R[u_1 , \dots , u_h]$;

(iii) *L'idéal nul est isolé dans le spectre premier de* R , *muni de la topologie de Zariski* ;

(iv) *L'idéal nul n'est pas l'intersection d'idéaux premiers strictement plus grands*.

Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes, car $R[u_1 , \dots , u_h]$ est du type $R[\frac{1}{a}]$, et réciproquement. Si on a la condition (i) du lemme, alors soit $\mathfrak{U}$ l'idéal principal (a) . Il définit un fermé en $\text{spec}\, R$ auquel (0) n'appartient pas. Inversement, si les idéaux premiers non nuls appartiennent à un fermé de $\text{spec}\, A$, auquel (0) n'appartient pas, ce fermé est l'ensemble des idéaux premiers de R qui contiennent un certain idéal $\mathfrak{U}$ non nul, et tout a non nul de $\mathfrak{U}$ satisfait à la condition (i) du lemme. L'équivalence de (iii) et (iv) est alors évidente.

DÉFINITION. - *On dit que* R *est un anneau de Goldman* (G-*anneau*), *s'il satisfait aux conditions équivalentes du théorème 1*.

Il existe des G-*anneaux non noethériens*. Par exemple, l'anneau V d'une valuation archimédienne non discrète est un anneau local intègre de dimension 1 qui n'est pas noethérien. Il n'a que deux idéaux premiers, l'idéal nul et son radical. C'est un G-anneau.

LEMME 2. - *Soit* R *un anneau principal (intègre). Pour que* R *soit un* G-*anneau, il faut et il suffit que* R *possède un nombre fini d'idéaux premiers*.

En effet, si R a une infinité d'idéaux premiers P_i , l'intersection des P_i est nécessairement l'idéal nul. Si R a un nombre fini d'idéaux premiers

$$R_{\pi_1} , \dots , R_{\pi_k} ,$$

l'élément $a = \pi_1 \dots \pi_k$ satisfait aux conditions du lemme 1.

LEMME 3. - *Soit* R *un anneau de Dedekind. Pour que* G *soit un* G-*anneau, il faut et il suffit qu'il ait un nombre fini d'idéaux premiers. Il est alors principal*.

En effet, si R a une infinité d'idéaux premiers P_i , l'intersection des P_i est (0) , et R n'est pas un G-anneau. Si R a un nombre fini d'idéaux premiers P_i , on a $\bigcap_i P_i \neq (0)$, et R est un G-anneau. Comme on sait qu'un anneau de Dedekind semi-local est principal, on a établi le lemme. On peut, de plus, établir que l'anneau R est *euclidien*.

THÉORÈME 2. - Si R est intègre, $K = \text{fract}\, R$, et soit X une indéterminée, alors $B = R[X]$ n'est pas un G-anneau.

En effet, si $R[X]$ était un G-anneau, alors $K[X]$ serait un G-anneau, car tout idéal $\mathfrak{J}$ non nul de $K[X]$ est tel que $\mathfrak{J} \cap R[X]$ est un idéal non nul de $R[X]$, et on applique la propriété (ii) du lemme 1. De plus, on va voir que tout anneau $K[X]$ (K corps) n'est pas un G-anneau, et on aura une contradiction.

D'après le lemme 2, il suffit de montrer que $K[X]$ a une infinité d'idéaux premiers. Si K est infini, on a tous les idéaux du type $(X - b)$ avec $b \in K$. Si K est fini, on applique le procédé d'Euclide : Si on avait seulement un nombre fini d'éléments irréductibles $\pi_1, \dots, \pi_k$, un facteur premier π de

$$1 + \pi_1 \pi_2 \dots \pi_k$$

en serait un autre, d'où une contradiction.

Dans le cas noethérien, on a :

THÉORÈME 3. - Si R est un anneau intègre noethérien, il y a équivalence entre les propriétés :

(i) R est un G-anneau ;
(ii) R est semi-local de dimension 0 ou 1 ;
(iii) R possède un nombre fini d'idéaux premiers.

En effet, si on a (i), désignons par $P_1, \dots, P_h$ les idéaux premiers minimaux de R_a, a étant l'élément fixé de R au moyen du théorème 1. Tout idéal premier non nul P de R contient a, donc l'un des P_i. Ces idéaux P_i sont donc tous les idéaux premiers de hauteur 1 de R. Si on avait un P, avec $P \neq P_i$ pour tout i, on aurait $P \not\subset P_i$ pour tout i et donc, d'après un lemme classique, $P \not\subset P_1 \cup \dots \cup P_h$. Il existerait $b \in P$ et $b \notin P_i$ pour tout i, et les idéaux premiers de R_b seraient de hauteur ≥ 2, ce qui contredit le théorème de l'idéal principal. On a donc (ii) et (iii). Les autres implications du théorème sont évidentes. On donnera plus loin un exemple de G-anneau noethérien non de Dedekind.

DÉFINITION. - Soit R un anneau, et soit P un idéal. On dit que P est un G-idéal si R/P est un G-anneau.

Un G-idéal est premier. Un idéal maximal est un G-idéal. Le théorème 7 caractérisera les G-idéaux au moyen des idéaux maximaux de $R[X]$.

DÉFINITION. - On dit que R est un anneau de Jacobson (Hilbert, dans la terminologie de Kaplansky) si tout G-idéal est maximal.

THÉORÈME 4. - <u>Un idéal</u> I <u>de l'anneau</u> R <u>est un</u> G-<u>idéal si, et seulement si, il existe</u> a <u>de</u> R <u>tel que</u> I <u>soit maximal parmi les idéaux qui ne rencontrent pas</u> $S = \{a^0 = 1 , a , a^2 , \ldots\}$.

Si I est un G-idéal, on prend l'élément a , dont l'existence est affirmée dans le théorème 1, et l'idéal I est bien maximal relativement à

$$S = \{a^n , n \geq 0\} .$$

Inversement, si a est donné, et I maximal pour $\{a^n\}$, alors I est premier, et R/I est intègre. Si $\bar{a}$ est la classe $a + I$, tout idéal premier non nul de R/I contient $\bar{a}$, et R/I est un G-anneau.

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> R <u>un anneau, et soit</u> P <u>un idéal premier de</u> R , <u>alors</u> P <u>est l'intersection des</u> G-<u>idéaux qui le contiennent</u>.

En effet, si $a \in R$, $a \notin P$, il existe un G-idéal qui contient P et ne contient pas a , d'après le théorème 4 , d'où le résultat qui s'interprète en disant que, <u>dans le spectre premier de</u> R , <u>les</u> G-<u>idéaux sont partout denses</u>.

COROLLAIRE 2. - <u>Le nilradical</u> N <u>d'un anneau</u> R <u>est l'intersection des</u> G-<u>idéaux de</u> R .

On voit en effet que si a est non nilpotent, il existe un G-idéal qui ne le contient pas. Si N est premier, on retrouve le corollaire 1.

La caractérisation (ii), du théorème suivant, des anneaux de Jacobson est utile.

THÉORÈME 5. - <u>Il y a équivalence entre les propriétés</u> :

(i) R <u>est un anneau de Jacobson</u> ;

(ii) <u>Tout idéal premier non maximal est intersection d'idéaux premiers strictement plus grands</u> ;

(iii) <u>Tout idéal premier est intersection d'idéaux maximaux</u>.

Si on a (i), tout idéal premier non maximal P est intersection de G-idéaux P_i , et comme P n'est pas un G-idéal, on a $P \neq P_i$ pour tout i , et on a (ii) et (iii). De plus, (iii) entraîne évidemment (ii). Enfin (ii) entraîne (i) d'après le théorème 1 (condition iv).

C. Q. F. D.

Les <u>anneaux de Jacobson noethériens</u> sont caractérisés au moyen du théorème suivant.

THÉORÈME 6. - <u>Si</u> R <u>est noethérien, il y a équivalence entre les trois propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 5 et la propriété</u> :

(iv) Tout idéal premier non maximal est contenu en une infinité d'idéaux premiers.

Cela résulte immédiatement du théorème 3. L'équivalence entre les conditions (i) et (iii) peut se montrer directement par localisation (Cf. ATIYAH [1], Exercices).

Les extensions transcendantes simples $R[X]$ d'un G-anneau ne sont pas des G-anneaux, mais on a le résultat fondamental suivant.

THÉORÈME 7. - Si R et T sont intègres, et tels que $R \subseteq T$, T étant de la forme $R[\alpha_1 , \dots , \alpha_n]$ avec les α_i algébriques sur R , alors R et T sont simultanément des G-anneaux.

Les théorèmes 6 et 7 donnent alors immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Si $R[u]$ est un G-anneau, alors u est algébrique sur R , et R est un G-anneau.

Ce corollaire entraîne immédiatement le théorème de Zariski, cité dans l'introduction, et l'étend au cas où k est un G-anneau. On désignera par K le corps des fractions de R , et par L celui de T .

La démonstration du théorème 7 repose sur la propriété classique : Si D est un anneau intègre entier sur un sous-anneau C , alors C et D sont simultanément des corps. Supposons que R soit un G-anneau, on a $K = R[\frac{1}{a}]$. Alors $T[\frac{1}{a}]$ est intègre et algébrique (donc entier) sur le corps K , donc $T[\frac{1}{a}]$ est un corps qui est L , et T est un G-anneau.

Réciproquement, si T est un G-anneau, on a $L = T[\frac{1}{v}]$ et $T = R[u_1 , \dots , u_h]$. Alors $w = \frac{1}{v}$, u_1 , ... , u_h sont algébriques sur K ; on a des équations

$$aw^m + \dots = 0 \ , \quad b_i\, u_i^{n_i} + \dots = 0 \ ,$$

en sorte que les $w , u_1 , \dots , u_h$ sont entiers sur $R_1 = R[a^{-1} , b_1^{-1} , \dots , b_h^{-1}]$. Alors $L = R[w , u_1 , \dots , u_h]$ est intègre et entier sur R_1 , et donc R_1 est un corps qui est $\operatorname{fract} R = K$. Donc R est un G-anneau, et le théorème est démontré.

Remarque. - Si R est un anneau noethérien intègre et de dimension 1, alors :

(i) Si R est semi-local, R est un G-anneau ;

(ii) Si R n'est pas semi-local, R est un anneau de Jacobson.

La démonstration est immédiate, et les réciproques sont vraies, car un anneau de Jacobson qui est un G-anneau est un corps.

Si on appelle "dimension combinatoire" de tout anneau R (Cf. [4], § 10) le sup des longueurs des chaînes d'idéaux premiers, qui sont chacun intersection d'idéaux premiers maximaux, on voit que, dans le cas (i), cette dimension est 0 , et, dans le cas (ii), elle est 1 . Par contre, un anneau local noethérien intègre, de dimension au moins 2 , n'est pas un G-anneau (d'après le théorème 3), et est de dimension combinatoire nulle.

PROBLÈME. - Un G-anneau non nécessairement noethérien est-il semi-local ?

Remarquons que si R est semi-local noethérien de dimension 1, c'est un G-anneau (Cf. Remarque ci-dessus), et on a les deux éventualités :

(α) R est intégralement clos, alors c'est un anneau de Dedekind, et comme il est semi-local, il est principal ;

(β) R n'est pas intégralement clos, il n'est pas principal.

Contre-exemple. - Un anneau local intègre noethérien, de dimension 1, et non-régulier, est un G-anneau qui n'est ni principal (ni factoriel), ni de Dedekind.

Relativement au spectre maximal, on a les résultats suivants.

THÉORÈME 8. - Un anneau R est un G-anneau si, et seulement si, $R[X]$ contient un idéal maximal M tel que $M \cap R = (0)$.

En effet, si R est un G-anneau et si fract $R = K = R[\frac{1}{a}]$, alors $R[X] \xrightarrow{f} K$, défini par $f(X) = \frac{1}{a}$, est surjectif, et son rayon M est maximal. Comme f est bijectif sur R , on a $M \cap R = 0$.

Si M est maximal en $R[X]$ et $M \cap R = (0)$, soit $f : R[X] \to R[X]/M$ et $f(X) = u$. On a $K = R[u]$, et le corollaire du théorème 7 montre que R est un G-anneau. Notons que l'on a $M = (aX - 1)$.

THÉORÈME 9. - R est un anneau de Jacobson si, et seulement si, tout idéal maximal de $R[X]$ se contracte à un idéal maximal en R .

Si R est un anneau, soient M maximal en $R[X]$, et $P = M \cap R$. Le théorème résulte immédiatement de celui qui suit.

THÉORÈME 10. - Soit R un anneau, si P est un G-idéal de $R[X]$, alors $P \cap R$ est un G-idéal de R . Si p est un idéal premier de R , p est un G-idéal si, et seulement si, il existe un idéal maximal M de $R[X]$ tel que $M \cap R = p$.

Soient P un idéal premier de $R[X]$, et $p = P \cap R$. On a un homomorphisme $\varphi : (R/p)[X] \to R[X]/P$, et de plus, comme $(R/p) \cap \operatorname{Ker} \varphi = (0)$, on a, en posant $u = X + \operatorname{Ker} \varphi$, et en désignant par N le noyau de φ , φ^* étant associé canoniquement à φ :

$$(R/p)[u] \xrightarrow{\psi} (R/p)[X]/N \xrightarrow{\varphi^*} R[X]/P .$$

Alors φ^* et ψ sont des isomorphismes. Donc $(R/p)[u]$ et $R[X]/P$ sont simultanément des G-anneaux. Si P est un G-idéal, alors R/p est un G-anneau d'après le théorème 7, et réciproquement.

Plus précisément, si p est un G-idéal arbitraire de R, R/p est un G-anneau et, d'après le théorème 8, il existe un idéal maximal M_1 de $(R/p)[X]$ tel que $M_1 \cap (R/p) = (0)$. Soit alors λ l'homomorphisme canonique

$$\lambda : R[X] \to (R/p)[X] ,$$

obtenu par réduction des coefficients modulo p. On désignera par λ^* l'isomorphisme associé

$$\lambda^* : R[X]/pR[X] \to (R/p)[X] ,$$

alors $(\lambda^*)^{-1}(M_1)$ est un idéal maximal de la forme $M/pR[X]$, M étant un idéal maximal de $R[X]$. On a $M \cap R \supseteq p$ et, si $r \in M \cap R$, on a

$$\lambda^*(r + pR[X]) \in (R/p) \cap \mu = (0) ,$$

donc $r \in p$, et on a bien $M \cap R = p$, ce qui établit le théorème.

Remarque 1. - Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des homomorphismes unitaires d'anneaux f tels que l'image réciproque d'un G-idéal soit un G-idéal.

Dans la catégorie $\mathcal{C}$, on a déjà les injections canoniques $A \to A[X]$ (théorème 8). Remarquons d'autre part que si $A \xrightarrow{f} B$ est telle que B soit entier sur $f(A)$, alors ${}^af : \operatorname{spec} B \to \operatorname{spec} A$ envoie tout G-idéal premier P de B sur un idéal ${}^af(P) = f^{-1}(p)$ qui est un G-idéal de A, donc f est en $\mathcal{C}$. En effet, si p_j est un idéal premier quelconque tel que $p_j \supsetneqq p$, il existe un idéal premier P_j de B tel que ${}^af(P_j) = p_j$ et $P_j \supsetneqq P$, et, d'après le théorème 1, il existe b en $B - P$ tel que $b \in P_j$, donc il existe $a \in A - p$ tel que $f(a) = b$ et $a \notin p_j$. Alors p est un G-idéal.

Remarque 2. - Si R est un anneau noethérien semi-local et intègre tel qu'il existe un entier r tel que tous les idéaux aient un système de r générateurs au plus, alors R est un G-anneau. En effet, par localisation aux idéaux maximaux, on a des anneaux de dimension 1 (Cf. COHEN [2]) et, d'après le théorème 3, R est un G-anneau. La réciproque est vraie (Cf. COHEN [2], théorème 10, et le théorème 3 du présent exposé). Ainsi les G-anneaux noethériens sont les anneaux intègres pour lesquels il existe un entier r tel que tous les idéaux aient au plus r générateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATIYAH (M. F.) and MACDONALD (I. G.). - Introduction to commutative algebra. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1969 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[2] COHEN (I. S.). - Commutative rings with restricted minimum condition, Duke math. J., t. 17, 1950, p. 17-42.

[3] GOLDMAN (O.). - Hilbert rings and the Hilbert Nullstellensatz, Math. Z., t. 54, 1951, p. 136-140.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, IV. - Paris, Presses Universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 28).

[5] KAPLANSKY (I.). - Commutative rings. - London, Queen Mary College, 1966 (Queen Mary College Mathematics Notes).

Jean GUÉRINDON
Prof. Fac. Sc. Rennes
211 rue de Fougères
35 - RENNES

(Texte reçu le 23 février 1970)