Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

JEAN-PAUL ORTHEAU

Le monoïde d'un ordre maximal. Cas non noethérien

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, nº 1 (1969-1970), exp. nº 7, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_1_A6_0>

26 janvier 1970

LE MONOÏDE D'UN ORDRE MAXIMAL
CAS NON NOETHÉRIEN

par Jean-Paul ORTHEAU

On définit, dans le paragraphe 1, les ordres et les réseaux, et on donne un théorème d'existence général pour les ordres maximaux.

Le deuxième paragraphe est entièrement consacré à l'étude du monoïde d'un ordre maximal lorsque l'anneau de base est un anneau de Krull non nécessairement noethérien (Travaux de GOLDMANN [12] , RILEY [17] et FOSSUM [10]).

Dans le paragraphe 3, une direction jusqu'ici peu explorée est envisagée : Cas où l'anneau de base est un anneau de Prüfer. Sous certaines hypothèses de finitude, on généralise la notion d'anneau de Prüfer, et on montre que, pour une classe spéciale d'anneaux de Prüfer (anneaux quasi-Dedekind), le monoïde d'un ordre maximal a des propriétés très proches de celles du monoïde de l'anneau de base.

1. Introduction.

Dans tout cet exposé, on considère un anneau A commutatif unitaire intègre, de corps des fractions K , et Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K .

DÉFINITION 1.1. - Un A-ordre de Σ est un sous-anneau Λ de Σ , vérifiant les propriétés suivantes :

1° $A \subset \Lambda$,

2° $K\Lambda = \Sigma$ ($\Longleftrightarrow$ Λ contient une base de Σ sur K $\Longleftrightarrow$ $x \in \Sigma$ s'écrit $x = \lambda b^{-1}$, $\lambda \in \Lambda$, $b \in A$) ,

3° Tout élément de Λ est entier sur A .

Remarque 1.2. - On désigne par $\mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x)$ la trace réduite d'un élément x de Σ . La forme bilinéaire

$$\Sigma \times \Sigma \to K : \quad (x , y) \mapsto \mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x , y)$$

est non dégénérée et, pour toute base $x_1 , \ldots , x_n$ de Σ , il existe une base $y_1 , \ldots , y_n$ de Σ , telle que $\mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x_i\, y_j) = \delta_{ij}$.

De plus, si un élément x de Σ est entier sur A , $\mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x)$ est entier sur A .

LEMME 1.3. - *Soit* Λ *un* A-*ordre de* Σ . *Soient* $x_1 , \dots , x_n$ *une base de* Σ , *contenue dans* Λ , *et* $y_1 , \dots , y_n$ *la base de* Σ *telle que* $\mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x_i\, y_j) = \delta_{ij}$. *Alors tout* A-*ordre* Γ , *contenant* Λ , *est contenu dans* $\Sigma \bar{A} y_j$, *où* $\bar{A}$ *désigne la clôture intégrale de* A *dans* K .

Démonstration. - Soit $y \in \Gamma$; $y = \Sigma b_j\, y_j$ avec $b \in K$. Alors, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $x_i\, y \in \Gamma$, et $\mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x_i\, y) \in \bar{A}$, d'après 1.2,

$$\mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x_i\, y) = \sum_{j=1}^{n} b_j\, \mathrm{Trd}_{\Sigma/K}(x_i\, y_j) = b_i \in \bar{A} \quad \text{et} \quad \Gamma \subset \Sigma \bar{A} y_j \ .$$

Remarque 1.4. - L'existence d'un A-ordre est assurée par BOURBAKI ([7], p. 47).

THÉORÈME 1.5. - *Si* A *est un anneau intégralement clos, tout* A-*ordre* Γ *est contenu dans un* A-*ordre maximal*.

Démonstration. - Soit $\theta(\Gamma)$ l'ensemble des A-ordres, contenus dans Σ , et contenant Γ . $\theta(\Gamma)$ est un ensemble non vide d'après 1.4.

Soit $(\Lambda_i)_{i \in I}$ une chaîne de A-ordres appartenant à $\theta(\Gamma)$; $\Lambda = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$ est, de façon évidente, un sous-anneau de Γ contenant Γ , et tel que $K\Lambda = \Sigma$.

Soit $x \in A$, alors il existe $i \in I$, tel que $x \in \Lambda_i$, et x est un entier sur A . $\theta(\Gamma)$ est inductif et, d'après le lemme de Zorn, tout A-ordre Γ est contenu dans un A-ordre maximal.

COROLLAIRE 1.6 ([22], p. 28). - *Soit* A *un anneau non nécessairement intégralement clos, Tout* A-*ordre* Γ *est contenu dans un* A-*ordre maximal*.

Démonstration. - $\Gamma[\bar{A}]$, sous-anneau engendré par Γ et $\bar{A}$ dans Σ , est un $\bar{A}$-ordre (ses éléments sont entiers, car les éléments de $\bar{A}$ commutent à ceux de Γ). $\Gamma[\bar{A}] \subset \Lambda$ est un $\bar{A}$-ordre maximal, d'après 1.5. Tout élément de Λ est entier sur $\bar{A}$, donc sur A , Λ est un A-ordre évidemment maximal.

Remarque 1.7. - Il est clair, d'après 1.3, que si $A \neq K$, les A-ordres maximaux sont différents de Σ .

On suppose désormais A intégralement clos.

Suivant BOURBAKI ([7], § 4), GOLDMANN [12] et RILEY [17], on généralise de la façon suivante la notion d'idéal fractionnaire.

Définition 1.8 [7]. - On appelle A-*réseau* de Σ , tout sous-A-module M de Σ vérifiant la condition suivante :

Il existe deux sous-A-modules libres L_1 et L_2 de Σ , tels que

$$L_1 \subset M \subset L_2 \quad \text{et} \quad rg_A(L_1) = rg_K(\Sigma) \ .$$

PROPOSITION 1.9 [7]. - Pour qu'un sous-A-module M de Σ soit un A-réseau de Σ, il faut et il suffit que $KM = \Sigma$, et que M soit contenu dans un A-module de type fini de Σ.

PROPOSITION 1.10 [7]. - Soient M un A-réseau de Σ, M_1 un sous-A-module de Σ. S'il existe deux éléments x et y non nuls de K, tels que $xM \subset M_1 \subset yM$, M_1 est un A-réseau de Σ.

Inversement, si M_1 est un A-réseau de Σ, il existe deux éléments a et $b \in A$, non nuls, tels que $aM \subset M_1 \subset b^{-1} M$.

Définition 1.11. - Soit Λ un A-ordre de Σ ; on appelle Λ-réseau, un A-réseau tel que la multiplication de Σ induise une structure de Λ-module bilatère sur M. On désigne par $R(\Lambda)$ l'ensemble des Λ-réseaux, et par $R_f(\Lambda)$ l'ensemble des Λ-réseaux qui sont des Λ-modules de type fini.

PROPOSITION 1.12. - Si M et N sont des Λ-réseaux, il en est de même de :

1° $M \cap N$, $M + N$, $MN = \{$sommes finies $\sum m_i n_i$, $m_i \in M$, $n_i \in N\}$,
2° $M:N = \{x \in \Sigma, \ xN \subset M\}$, $M::N = \{x \in \Sigma, \ Nx \subset M\}$,
3° $S^{-1} M = S^{-1} A \otimes_A M$ pour toute partie multiplicative de A.

Commentaires. - Le fait que ces ensembles soient des A-réseaux provient de [7], § 4, et il est alors évident que ce sont des Λ-modules. Vérifions-le pour (M, N) :

$$(M:N) \cap N \subset (M:N)N \subset M \quad \text{et} \quad (M:N)\Lambda \subset M:N \ ,$$
$$\Lambda(M:N)N \subset \Lambda M \subset M \quad \text{et} \quad \Lambda(M:N) \subset M:N \ .$$

COROLLAIRE 1.13. - $R(\Lambda)$ est un monoïde unitaire résidué.

Il suffit de remarquer que, par 1.3 et 1.9, Λ est un A-réseau.

Remarque 1.14. - Si A est noethérien, $R_f(\Lambda) = R(\Lambda)$, et $R_f(\Lambda)$ est résidué. Il n'en est pas de même dans le cas général. Le problème se pose donc de savoir dans quelles conditions $R_f(\Lambda)$ est résidué. On donnera une réponse partielle dans le § 3.

Donnons maintenant quelques renseignements sur la localisation des ordres et des réseaux.

LEMME 1.15. - Soit Λ un A-ordre. Si $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est un $A_{\mathfrak{M}}$-ordre maximal, pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, alors Λ est maximal.

LEMME 1.16. - *Si* $\mathfrak{M}$ *est un idéal maximal de* A , *et si* M *et* N *sont des* A-*réseaux de* Σ :

1° $(M + N)_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}} + N_{\mathfrak{M}}$, $(M \cap N)_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}} \cap N_{\mathfrak{M}}$, $(MN)_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}} N_{\mathfrak{M}}$;

2° $(M:N)_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}} : N_{\mathfrak{M}}$ *si* N *est de type fini.*

Démonstration. - La vérification du 1° est triviale.

Pour le 2°, $(M:N)_{\mathfrak{M}} \subset M_{\mathfrak{M}} : N_{\mathfrak{M}}$ est vraie quel que soit N .

Inversement, soit $(n_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ un système fini de générateurs de N .

$$x \in M_{\mathfrak{M}} : N_{\mathfrak{M}} \iff xn_i \in M_{\mathfrak{M}} , \quad \forall\ i \quad (1 \leqslant i \leqslant q) .$$

On pose $xn_i = m_i/s_i$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$. Alors,

$$\left(\prod_{i=1}^{q} s_i\right) \times N \subseteq M \quad \text{et} \quad x = y/\left(\prod_{i=1}^{q} s_i\right) \quad \text{avec} \quad yN \subseteq M \quad \text{et} \quad x \in (M:N) .$$

Pour terminer ce paragraphe, on donne un résultat qui se révèlera crucial dans le § 3, et qui est une conséquence immédiate du résultat suivant de ROBSON.

PROPOSITION 1.17 ([18], p. 614). - *Soit* Λ *un anneau admettant un anneau de quotients à droite,* Q-*artinien à droite. Alors, tout idéal à droite (ou à gauche), contenant un élément régulier, est engendré par les éléments réguliers qu'il contient. De plus, tout idéal de type fini, contenant un élément régulier, admet un système fini de générateurs réguliers.*

COROLLAIRE 1.18. - *Soient* A *un anneau de corps de fractions* K , *et* Σ *une algèbre simple centrale de dimension finie sur* K . *Si* Λ *est un* A-*ordre, tout* Λ-*réseau de type fini admet un système fini de générateurs réguliers.*

2. *Cas où* A *est un anneau de Krull.*

On se propose d'énoncer les résultats obtenus par GOLDMANN, RILEY et FOSSUM concernant $R(\Lambda)$, lorsque A est un anneau de Krull.

PROPOSITION 2.1. - *Soit* A *un anneau de valuation discrète, et soit* Λ *un* A-*ordre maximal. Alors* $R(\Lambda)$ *est un groupe cyclique infini engendré par le radical* $\mathfrak{M}(\Lambda)$.

On va obtenir la stucture de $R(\Lambda)$, lorsque A est un anneau de Krull, en localisant Λ suivant les idéaux premiers de hauteur 1 de A .

PROPOSITION 2.2 ([23], p. 149). - *Soit* A *un anneau de Krull, et soit* M *un* A-*réseau de* Σ . *On suppose donné, pour tout* $p \in P(A)$, ($P(A)$ *désigne l'ensemble des idéaux premiers de hauteur* 1), *un* A_p-*réseau* $N(p)$ *dans* Σ .

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un A-réseau N' dans Σ, tel que $N'_p = N(p)$ pour tout $p \in P(A)$, est que $N(p) = M_p$ pour presque tout $p \in P(A)$. Dans ce cas, $\tilde{N} = \cap N_p$ ($p \in P(A)$ est le plus grand des A-réseaux adéquats.

PROPOSITION 2.3 ([23], p. 154, [10], p. 322). - Soit A un anneau de Krull, un A-ordre Λ est maximal si, et seulement si,

1° Λ est un A-module réflexif,

2° Λ_p est un A_p-ordre maximal, $\forall\ p \in P(A)$.

Démonstration.

(a) Λ est un A-ordre maximal. Alors Λ^{**} est un A-ordre contenant Λ, et par conséquent $\Lambda = \Lambda^{**}$.

Si Λ_{p_0} n'est pas un A_{p_0}-ordre maximal pour $p_0 \in P(A)$, alors, d'après 2.2, il existe un A-ordre Γ réflexif tel que $\Gamma_p = \Lambda_p$ pour $p \neq p_0$ et Γ_{p_0} contenant strictement A_{p_0}, ce qui contredit la maximalité de Λ.

(b) Les propriétés 1° et 2° sont vérifiées. Alors si Γ est un A-ordre contenant Λ, on a $\Gamma_p = \Lambda_p$ pour tout $p \in P(A)$, et $\Gamma \subset \cap \Lambda_p = \Lambda$.

DÉFINITION 2.4. - On définit dans $R(\Lambda)$ (Λ étant un A-ordre maximal) la relation suivante :

Pour $M, N \in R(\Lambda)$, $M \,\mathfrak{a}\, N \iff (M^{-1})^{-1} = (N^{-1})^{-1} \iff M_p = N_p$, $\forall\ p \in P(A)$.

REMARQUE 2.5. - Il est facile de vérifier que $\mathfrak{a}$ est une **relation** d'équivalence. Si $\Sigma = K$, on obtient l'équivalence d'Artin associée au monoïde des idéaux fractionnaires de A.

PROPOSITION 2.6. - Soit Λ un A-ordre maximal, et soient $M, M', N, N' \in R(\Lambda)$. On a alors les propriétés suivantes :

1° $MM^{-1} \,\mathfrak{a}\, \Lambda$,

2° $M \,\mathfrak{a}\, N$ et $M' \,\mathfrak{a}\, N' \implies MM' \,\mathfrak{a}\, NN'$,

3° $M \,\mathfrak{a}\, N$ et $M' \,\mathfrak{a}\, N' \implies M \cap M' \,\mathfrak{a}\, N \cap N'$,

4° $MN \,\mathfrak{a}\, NM$.

Les vérifications sont immédiates en localisant en tout idéal $p \in P(A)$.

THÉORÈME 2.7 ([10], p. 327). - Soient A un anneau de Krull de corps de fractions K, et Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K. Alors :

1° $G(\Lambda) = R(\Lambda)/\mathfrak{a}$ est un groupe abélien, 2° *Si* Γ *est un deuxième* A-*ordre maximal,* $G(\Gamma)$ *est isomorphe à* $G(\Lambda)$,

3° *Si* Δ *est un troisième* A-*ordre maximal, le diagramme suivant est commutatif* :

$$\begin{tikzcd} G(\Lambda) \arrow[rr, dashed] & & G(\Gamma) \\ & G(\Delta) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

3. A *est un anneau de Prüfer*.

(A) *Rappels* ([7], p. 93, [11], chapitre 4).

DÉFINITION 3.1. - Soit A un anneau commutatif intègre de corps de fractions K . A est dit *de Prüfer* si le monoïde des idéaux fractionnaires de type fini est un groupe.

PROPOSITION 3.2. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1° A *est un anneau de Prüfer,*

2° *Pour tout idéal maximal* $\mathfrak{M}$ *de* A , *l'anneau local* $A_{\mathfrak{M}}$ *est un anneau de valuation,*

3° *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A , *l'anneau local* $A_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau de valuation,*

4° *Tout* A-*module sans torsion de type fini est projectif,*

5° *Tout anneau* B *tel que* $A \subset B \subset K$ *est intégralement clos.*

PROPOSITION 3.3. - *Si* A *est un anneau de Prüfer, tout anneau* B , *tel que* $A \subset B \subset K$, *est un anneau de Prüfer.*

PROPOSITION 3.4. - *Soit* A *un anneau de Prüfer. Pour qu'un* A-*module* M *soit plat, il faut et il suffit qu'il soit sans torsion.*

(B) *Etude de* $R_f(\Lambda)$ *où* Λ *est un* A-*ordre maximal de type fini.*

EXEMPLE 3.5. - $\Sigma = M_n(K)$, *alors* $\Lambda = M_n(A)$ *est un* A-*ordre maximal de type fini.*

On utilise le résultat suivant ([6], p. 24) :

Soit $X \in M_n(K)$, X entière sur A $\Longleftrightarrow$ les coefficients du polynôme caractéristique de X sont entiers sur A .

Il est alors clair que $\Lambda = M_n(A)$ est un A-ordre de type fini.

Soit Γ un A-ordre contenant Λ , et soit $X = (\alpha_{ij}) \in \Gamma$.

On pose $E_{ij} = (\delta_{ij})$. $E_{ij}\,X$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la i-ième ligne qui a la forme $(\alpha_{j1}\ \alpha_{j2} \dots \alpha_{ji} \dots \alpha_{jn})$.

$$E_{ij}\,X \in \Gamma\ , \quad \mathrm{Tr}(E_{ij}\,X) = \alpha_{ji} \in A \quad \text{et} \quad X \in \Lambda\ .$$

PROPOSITION 3.6 ([19], p. 624). - Soient A un anneau de valuation de corps de fractions K, et $\Sigma = M_n(K)$. Alors $\Lambda = M_n(A)$ est un A-ordre maximal de type fini, et tout Λ-réseau de type fini est principal (donc inversible).

COROLLAIRE 3.7. - Soient A un anneau de Prüfer de corps de fractions K, et $\Sigma = M_n(K)$. Alors $\Lambda = M_n(A)$ est un A-ordre maximal de type fini, et $R_f(\Lambda)$ est un groupe.

On peut alors introduire la définition suivante :

DÉFINITION 3.8. - On appelle ordre de Σ tout sous-anneau Λ de Σ tel que

$$x \in \Sigma , \quad x = \lambda\mu^{-1} \quad \text{avec} \quad \lambda , \mu \in \Lambda .$$

On appelle ordre intégral de Σ tout sous-anneau Λ de Σ tel que $K\Lambda = \Sigma$.

Etant donné un ordre intégral Λ, on appelle Λ-réseau tout module bilatère M, contenu dans Σ et tel qu'il existe un $k \in K$, $kM \subset \Lambda$.

On note $R(\Lambda)$ l'ensemble des Λ-réseaux, et $R_f(\Lambda)$ l'ensemble des Λ-réseaux qui sont des Λ-modules de type fini.

On appelle ordre de Prüfer tout ordre intégral de Σ tel que $R_f(\Lambda)$ soit un groupe.

PROPOSITION 3.9. - A est un anneau de Prüfer $\subset K \subset \Sigma$. Si M et N sont deux A-réseaux de type fini, $M \cap N$ est un A-réseau de type fini.

Démonstration ([8], p. 462, théorème 2.2). - On utilise le fait que, sur un anneau A de Prüfer tout A-module sans torsion de type fini est projectif, donc de présentation finie ([5], p. 36).

COROLLAIRE 3.10. - Soient A un anneau de Prüfer de corps de fractions K, et Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K. Si Λ est un A-ordre maximal de type fini, alors $R_f(\Lambda)$ est résidué. De plus, $I:I = I::I = \Lambda$ pour tout Λ-réseau de type fini.

Démonstration. - Soient M et N deux Λ-réseaux de type fini. N admet un système fini de générateurs réguliers $(n_i)_{1 \leq i \leq q}$. Alors

$$M:N = \bigcap_{i=1}^{q} Mn_i^{-1} ,$$

Mn_i^{-1} est un A-module de type fini. Il en est donc de même de $M:N$, et $M:N$ est a fortiori un Λ-réseau de type fini. $R_f(\Lambda)$ est résidué. Si I est un Λ-réseau de type fini, $I:I$ est une A-algèbre qui est un A-module de type fini. Tout élément de $I:I$ est entier sur A. $I:I$ est un A-ordre contenant Λ, d'où le résultat $I:I = \Lambda$.

THÉORÈME 3.11. - Soient A un anneau de Prüfer de corps de fractions K , et Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K .

Si Λ est un A-ordre maximal de type fini, et si tout Λ-réseau de type fini est projectif, $R_f(\Lambda)$ est un groupe.

Démonstration ([20], lemme 1.2). - Soit M un Λ-réseau de type fini. Il est projectif par hypothèse. Alors il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ et une famille $(\Phi_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_\Lambda(M , \lambda)$ tels que, $\forall m \in M$,

$$m = \sum_{i\in I} \Phi_i(m)\, \lambda_i \quad \text{et} \quad \Phi_i(m) = 0 ,$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de i .

On peut identifier M^{-1} et $\mathrm{Hom}_\Lambda(M , I)$ de la façon suivante :

Si $\sigma \in M^{-1}$, on lui associe $\Phi : a \longmapsto a\sigma$ et $\Phi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M , \Lambda)$. Inversement, soient $\Phi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M , \Lambda)$ et $\Phi' \in \mathrm{Hom}_\Sigma(\Sigma , \Sigma)$ son prolongement à Σ . Alors si $\Phi'(1) = \sigma$, on a, pour tout $a \in M$,

$$\Phi'(a) = a\ \Phi'(1) = a\sigma \in \Lambda \quad \text{et} \quad \sigma \in M^{-1} .$$

Soit $(\sigma_i)_{i\in I}$ l'image de $(\Phi_i)_{i\in I}$ dans cet isomorphisme.

Alors, $\forall m \in M$, $\Phi_i(m) = m\sigma_i = 0$ pour presque tout i . On peut choisir m régulier dans Σ , et alors $\sigma_i = 0$ pour presque tout i.

Soit m quelconque dans M , alors $m = \Sigma\, \Phi_i(m)\, \lambda_i = m(\Sigma\sigma_i\, \lambda_i)$.

Ainsi $1 = \Sigma\sigma_i\, \lambda_i \in M^{-1} M$, et par conséquent $M^{-1} M = \Lambda$.

On montrerait de même que $MM^{-1} = \Lambda$, d'où le résultat.

Remarque. - On peut espérer s'affranchir de l'hypothèse que tout Λ-réseau de type fini est projectif, ce que je n'ai pas réussi à faire jusqu'à présent.

(C) Sur-ordres plats.

Certains résultats de la théorie d'AKIBA [1] ont une traduction immédiate dans le cadre des algèbres simples centrales.

PROPOSITION 3.12. - Soit A un anneau unitaire. Pour qu'un A-module à droite E soit plat, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante :

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles finies d'éléments de E et de A respectivement, telles que $\sum_{i\in I} e_i\, b_i = 0$, il existe un ensemble fini J , une famille $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de A , et une famille (a_{ji}) $(j \in J\ ,\ i \in I)$ d'éléments de A tels que

$$\sum_{i\in I} a_{ji}\, b_i = 0 \quad \underline{\text{pour tout}} \quad j \in J \ ,$$

<u>et que</u>

$$e_i = \sum_{j\in J} x_j\, a_{ji} \quad \underline{\text{pour tout}} \quad i \in I \ .$$

PROPOSITION 3.13 ([1], théorème 1). - <u>Soient</u> $\Lambda \subset \Gamma$ <u>deux ordres de</u> Σ <u>tels que</u> Γ <u>soit</u> Λ-<u>plat à gauche et à droite, alors, pour tout élément</u> b <u>régulier dans</u> <u>dans</u> Γ ,

$$(\Lambda::b)_\Lambda\, \Gamma = \Gamma \quad \underline{\text{où}} \quad (\Lambda::b)_\Lambda = \{a \in \Lambda \ , \ ba \in \Lambda\} \ ,$$

$$\Gamma(\Lambda:b)_\Lambda = \Gamma \quad \underline{\text{où}} \quad (\Lambda:b)_\Lambda = \{a \in \Lambda \ , \ ab \in \Lambda\} \ .$$

<u>Démonstration</u>. - $b = \lambda/\mu$, où λ et $\mu \in \Lambda$.

Alors $\mu(\lambda/\mu) - \lambda 1 = 0$ et, d'après 3.12, il existe un ensemble fini $(b_j)_{j\in J}$ d'éléments de Γ et un ensemble fini $(a_{1j}\ , a_{2j})$ d'éléments de Λ tels que :

1° $\mu a_{1j} - \lambda a_{2j} = 0$ pour tout $j \in J$,
2° $b = \lambda/\mu = \sum_{j\in J} a_{1j}\, b_j$,
3° $1 = \sum_{j\in J} a_{2j}\, b_j$.

Le 1° entraîne $a_{2j} \in (\Lambda::b)_\Lambda$, et le 3° entraîne $(\Lambda::b)_\Lambda\, \Gamma = \Gamma$.

On montre de même que $\Gamma(\Lambda:b)_\Lambda = \Gamma$.

COROLLAIRE 3.14. - <u>Soient</u> $\Lambda \subset \Gamma$ <u>deux ordres de</u> Σ , <u>tels que</u> Γ <u>soit</u> Λ-<u>plat</u> <u>(à gauche et à droite). Pour tout</u> Λ-<u>réseau, on a</u>

$$(\mathfrak{b} \cap \Lambda)\Gamma = \mathfrak{b} = \Gamma(\mathfrak{b} \cap \Lambda) \ .$$

<u>Démonstration</u>. - On a déjà $(\mathfrak{b} \cap \Lambda)\Gamma \subset \mathfrak{b}$.

Soit $b \in \mathfrak{b}$, $(\Lambda::b)_\Lambda\, \Gamma = \Gamma$ par 3.13. Par conséquent, il existe un ensemble fini I , une famille $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de $(\Lambda::b)_\Lambda$ et une famille $(b_i)_{i\in I}$ d'éléments de Γ tels que

$$\sum_{i\in I} a_i\, b_i = 1 \ .$$

Alors

$$b = \Sigma(ba_i)b_i \in (\Lambda \cap \mathfrak{b})\Gamma \ .$$

THÉORÈME 3.15. - <u>Si</u> Λ <u>est un ordre de Prüfer et si</u> Γ <u>est un sur-ordre plat de</u> Λ , Γ <u>est un ordre de Prüfer</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère de type fini de Γ . D'après 3.14, $(\mathfrak{b} \cap \Lambda)\Gamma = \mathfrak{b} = \Gamma(\mathfrak{b} \cap \Lambda)$. Soit $(b_i)_{i\in I}$ un système générateur fini de $\mathfrak{b}$. Alors,

$$b_i = \sum_{j\in J_i \text{ fini}} \gamma_{ij}\, b'_{ij} \quad \text{où} \quad \gamma_{ij} \in \Gamma \quad \text{et} \quad b'_{ij} \in \mathfrak{b} \cap \Lambda\ , \quad (b'_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$$

constitue un système générateur fini de $\mathfrak{b}$, contenu dans $\mathfrak{b} \cap \Lambda$.

$\mathfrak{b} = \Gamma(\sum_{i,j} \Lambda b'_{ij}\ \Lambda)$; $(\sum_{i,j} \Lambda b'_{ij}\ \Lambda)$ est inversible dans $R_f(\Lambda)$, i. e. $\exists\, \mathfrak{b}' \in R_f(\Lambda)$ tel que $(\sum_{i,j} \Lambda b'_{ij}\ \Lambda)\mathfrak{b}' = \Lambda$. Alors $\Gamma(\Sigma\Lambda b'_j\ \Lambda)\mathfrak{b}'\Gamma = \Gamma$, et comme

$$\Gamma(\Sigma\Lambda b'_j\ \Lambda) = (\Sigma\Lambda b'_j\ \Lambda)\Gamma\ ,$$

$$\Gamma(\Sigma\Lambda b'_j\ \Lambda)\Gamma\mathfrak{b}'\Gamma = \Gamma \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}^{-1} = \Gamma\mathfrak{b}'\Gamma\ .$$

Si M est un Γ-réseau de type fini quelconque, il existe un $k \in K$ tel que kM soit un idéal bilatère de Γ , d'où le résultat.

COROLLAIRE 3.16. - A <u>est un anneau de Prüfer de corps de fractions</u> K . Σ <u>est une algèbre simple centrale de dimension finie sur</u> K . <u>Soit</u> Λ <u>un</u> A-<u>ordre maximal de type fini, alors tout sur-ordre</u> Γ <u>de</u> Λ <u>est un ordre de Prüfer</u>.

<u>Démonstration</u>. - D'après le lemme qui sera établi plus loin (3.17), Λ est un A-module fidèlement plat. D'après [5] (p. 34), $\Lambda \otimes_A \Gamma$ est Λ-plat. Par conséquent, quelle que soit la suite exacte de Λ-modules,

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0\ ,$$

la suite

$$0 \to (\Lambda \otimes_A \Gamma) \otimes_\Lambda M' \xrightarrow{(1\otimes 1)\otimes f'} (\Lambda \otimes_A \Gamma) \otimes_\Lambda M \xrightarrow{(1\otimes 1)\otimes f} (\Lambda \otimes_A \Gamma) \otimes M'' \to 0$$

est exacte.

Maintenant Λ est fidèlement plat, et

$$0 \to \Gamma \otimes_\Lambda M' \to \Gamma \otimes_\Lambda M \to \Gamma \otimes_\Lambda M'' \to 0$$

est exacte, Γ est un Λ-module plat. Le théorème 3.15 donne alors le résultat suivant.

LEMME 3.17. - <u>Si</u> Λ <u>est un</u> A-<u>ordre maximal de type fini</u>, Λ <u>est fidèlement plat sur</u> A .

<u>Démonstration</u>. - Λ étant projectif de type fini, $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est libre de type fini, donc fidèlement plat pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A ([5], p. 138). Alors, d'après [5] (p. 116), Λ est un A-module fidèlement plat.

(D) A <u>est un anneau "quasi Dedekind"</u>.

GILMER a introduit la notion suivante ([11], § 29) :

DÉFINITION 3.18. - Soit un anneau commutatif intègre de corps de fractions K. A est dit "quasi-Dedekind" si A_p est un anneau de valuation discrète pour tout idéal p premier non nul de A.

PROPOSITION 3.19. - Si A est un quasi-Dedekind, tout idéal premier est maximal.

THÉORÈME 3.20. - Soient A un anneau "quasi-Dedekind" de corps des fractions K, Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K. Soit Λ un A-ordre, qui est de plus un ordre de Prüfer de Σ, alors $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est un $A_{\mathfrak{M}}$-ordre maximal pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, et Λ est lui-même un A-ordre maximal.

Démonstration. - $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est un $A_{\mathfrak{M}}$-ordre pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, donc un $A_{\mathfrak{M}}$-module libre de type fini. $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est un $A_{\mathfrak{M}}$-module fidèlement plat et, d'après [5] (p. 116), Λ est un A-module fidèlement plat.

En raisonnant comme dans la démonstration de 3.16, on obtient que $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est un sur-ordre plat de Λ, donc un ordre de Prüfer (3.15). Or $R(\Lambda_{\mathfrak{M}}) = R_f(\Lambda_{\mathfrak{M}})$. Tout $\Lambda_{\mathfrak{M}}$-réseau est inversible, et $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est maximal (cf. [20], p. 253).

Maintenant Λ est maximal d'après 1.15.

THÉORÈME 3.21. - Soient A un anneau "quasi-Dedekind" de corps de fractions K, Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K. Soit Λ un A-ordre tel que $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ soit maximal pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de Λ. Alors Λ est un ordre de Prüfer.

Démonstration. - On montre, de façon analogue à 1.16, que $(M:N)_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}}:N_{\mathfrak{M}}$ si N est un Λ-réseau de type fini.

Soit maintenant un Λ-réseau M de type fini. Alors $(\Lambda:M) = M^{-1}$ est un Λ-réseau de type fini, et $(M^{-1})_{\mathfrak{M}} = (M_{\mathfrak{M}})^{-1}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A. Dans $R(\Lambda_{\mathfrak{M}})$, $(M_{\mathfrak{M}})^{-1} M_{\mathfrak{M}} = \Lambda_{\mathfrak{M}}$, et en globalisant $M^{-1} M = \Lambda$.

PROPOSITION 3.22. - Soient A un anneau "quasi-Dedekind" de corps de fractions K, Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K. Soit Λ un A-ordre tel que $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ soit maximal pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A. On a alors les propriétés suivantes :

1° $R(\Lambda)$ est un monoïde simplifiable et commutatif ;

2° $R(\Lambda)$ est un treillis distributif ;

3° $M(N \cap P) = MN \cap MP$, $\forall\, M, N, P \in R(\Lambda)$;

4° $(M + N)(M \cap N) = MN$, $\forall\, M, N \in R(\Lambda)$.

Commentaires. - La méthode consiste à localiser en tout idéal $\mathfrak{M}$ maximal de A. On travaille alors dans $R_f(\Lambda_{\mathfrak{M}})$ où $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ est un ordre maximal sur un anneau de valuation discrète.

Le 1° et le 2°, par exemple, proviennent du fait que $R(\Lambda_{\mathfrak{M}})$ est simplifiable et commutatif et un ensemble totalement ordonné, donc un treillis distributif.

Signalons pour terminer ce paragraphe une réciproque partielle de 3.22.

PROPOSITION 3.23. - Soient A un anneau de Prüfer de corps de quotients K, Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K. Soit Λ un A-ordre tel que $R(\Lambda)$ soit simplifiable. Alors A est un anneau "quasi-Dedekind".

Démonstration. - On remarque d'abord que si A est un anneau de valuation ot Λ un A-ordre, tout idéal entier de A est le contracté d'un Λ-réseau entier de Λ. En globalisant, on obtient le même résultat, quand A est un anneau de Prüfer.

Il est alors immédiat que si $R(\Lambda)$ est simplifiable, il en est de même de $I(A)$ (ensemble des idéaux fractionnaires de A), ce qui caractérise les anneaux quasi-Dedekind.

4. Conclusion.

Un certain nombre de problèmes semblent ouverts.

PROBLÈME 1. - Peut-on caractériser un ordre maximal Λ sur un anneau de Prüfer par la propriété $I:I = I::I$ pour tout $I \in R_f(\Lambda)$?

Commentaires. - Cette condition caractérise les anneaux intégralement clos (cas où $\Sigma = K$) et caractérise les ordres maximaux dans le cas noethérien.

PROBLÈME 2. - Dans quelles conditions la condition " Λ maximal" implique-t-elle la condition " $\Lambda_{\mathfrak{M}}$ maximal pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A " ?

Commentaires. - C'est toujours vrai quand A est noethérien intégralement clos. En utilisant la démonstration d'AUSLANDER-GOLDMANN ([2], proposition 12), on peut montrer que c'est encore vrai pour un A-ordre maximal de type fini lorsque A est un anneau de Prüfer.

PROBLÈME 3 (fondamental). - Peut-on éviter l'hypothèse de finitude faite dans le paragraphe 3, et montrer que tout ordre maximal sur un anneau de Prüfer est un ordre de Prüfer ?

Complément. - Dans la remarque suivant le théorème 3.11, on espérait s'affranchir de l'hypothèse que tout Λ-réseau de type fini est projectif. C'est le but du lemme suivant :

LEMME. - Soient A un anneau de Prüfer, K son corps de fractions, Σ une algèbre simple centrale de dimension finie sur K. Alors tout Λ-réseau Γ de type fini est projectif lorsque Λ est un A-ordre de type fini.

Démonstration. - Elle se fait en deux étapes :

1° Γ est un Λ-module plat (à gauche et à droite).

La démonstration est identique à celle du corollaire 3.16.

2° Γ est un Λ-module de présentation finie.

Il suffit de montrer que si f est un Λ-épimorphisme d'un Λ-module libre L_0 dans Γ, alors $\operatorname{Ker} f$ est de type fini (L_0 de type fini).

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to L_0 \to \Gamma$$

est une suite exacte de A-modules ; Γ est un A-module de présentation finie ; L_0 est un A-module de type fini. Alors, d'après BOURBAKI ([5], p. 37), on a que $\operatorname{Ker} f$ est un A-module de type fini, et a fortiori un Λ-module de type fini.

Maintenant, d'après CHASE ([8], p. 459), Γ, Λ-module plat ot de présentation finie, est projectif.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKIBA (Tomoharu). - Remarks on generalized rings of quotients, Proc. Jap. Acad., t. 40, 1964, p. 801-806.

[2] AUSLANDER (M.) and GOLDMANN (O.). - Maximal orders, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 1-24.

[3] BASS (Hyman). - Algebraic K-theory. - New-york, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1968 (Mathematics Lecture Note Series).

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre. Chap. 8. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient.et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative. Chap. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).

[6] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative. Chap. 5 et 6. - Paris, Hermann, 1964 (Act. scient. et ind., 1308 ; Bourbaki, 30).

[7] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative. Chap. 7. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1314 ; Bourbaki, 31).

[8] CHASE (Stephen U.). - Direct products of modules, Trans. Amer. math. Soc., t.97, 1960, p. 457-473.

[9] DEURING (M.). - Algebren. - Berlin, Springer-Verlag, 1935 (Ergebnisse der Mathematik, 41).

[10] FOSSUM (Robert M.). - Maximal orders over Krull domains, J. of Algebra, t. 10, 1968, p. 321-332.

[11] GILMER (Robert W.). - Multiplicative ideal theory. - Kingston, Queen's University, 1968 (Queen's Papers on pure and applied Math., 12).

[12] GOLDMANN (Oscar). - Quasi-equality in maximal orders, J. Math. Soc. Japan, t. 13, 1961, p. 371-376.

[13] HINOHARA (Yukitoshi). - Note on non-commutative semi-local rings, Nagoya math. J., t. 17, 1960, p. 161-166.

[14] KAPLANSKY (Irving). - Submodules of quaternion algebras, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 19, 1969, p. 219-232.

[15] MAURY (Guy). - Caractérisation des ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux sont bilatères, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 993-996.

[16] MICHLER (G. O.). - Asano orders, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 19, 1969, p. 421-443.

[17] RILEY (John A.). - Reflexive ideals in maximal orders, J. of Algebra, t. 2, 1965, p. 451-465.

[18] ROBSON (J. C.). - Artinian quotient rings, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 17, 1967, p. 600-616.

[19] ROBSON (J. C.). - Rings in which finitely generated right ideals are principal, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 17, 1967, p. 617-623.

[20] ROBSON (J. C.). - Non-commutative Dedekind rings, J. of Algebra, t. 9, 1968, p. 249-265.

[21] SILVER (L.). - Non commutative localizations and applications, J. of Algebra, t. 7, 1967, p. 44-76.

[22] STROOKER (Jan Rustom). - Faithfully projective modules and clean algebras. - Leiden, Groen en Zoon, 1965 (Thèse Univ. Utrecht, 1965).

Jean-Paul ORTHEAU
Ass. Fac. Sc. Brest
Cité des Bruyères
29N - PLOUGASTEL-DAOULAS

(Texte reçu le 23 février 1970)